

# Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

W. Kippels

9. Juli 2021

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Vorgehensweise</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Übungsaufgaben</b>	<b>6</b>
4.1	Aufgabe 1 . . . . .	6
4.2	Aufgabe 2 . . . . .	6
4.3	Aufgabe 3 . . . . .	6
4.4	Aufgabe 4 . . . . .	6
4.5	Aufgabe 5 . . . . .	6
4.6	Aufgabe 6 . . . . .	7
4.7	Aufgabe 7 . . . . .	7
4.8	Aufgabe 8 . . . . .	7
4.9	Aufgabe 9 . . . . .	7
4.10	Aufgabe 10 . . . . .	7
4.11	Aufgabe 11 . . . . .	8
4.12	Aufgabe 12 . . . . .	8
4.13	Aufgabe 13 . . . . .	8
4.14	Aufgabe 14 . . . . .	8
4.15	Aufgabe 15 . . . . .	9
4.16	Aufgabe 16 . . . . .	9
4.17	Aufgabe 17 . . . . .	9
4.18	Aufgabe 18 . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Lösungen mit Lösungsweg</b>	<b>10</b>
5.1	Aufgabe 1 . . . . .	10

5.2	Aufgabe 2	13
5.3	Aufgabe 3	16
5.4	Aufgabe 4	18
5.5	Aufgabe 5	21
5.6	Aufgabe 6	23
5.7	Aufgabe 7	25
5.8	Aufgabe 8	28
5.9	Aufgabe 9	30
5.10	Aufgabe 10	34
5.11	Aufgabe 11	35
5.12	Aufgabe 12	37
5.13	Aufgabe 13	40
5.14	Aufgabe 14	44
5.15	Aufgabe 15	46
5.16	Aufgabe 16	49
5.17	Aufgabe 17	52
5.18	Aufgabe 18	54

# 1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

*Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: [mail@dk4ek.de](mailto:mail@dk4ek.de)

Vielen Dank!

## 2 Einleitung

Manchmal soll irgendeine technische Größe optimiert werden. Hier kann die Differentialrechnung mit Erfolg eingesetzt werden. Aber nicht nur in der Technik gibt es solche Probleme, auch in der Wirtschaft und vielen anderen Bereichen werden oft Optimierungen angestrebt. Hier einige Beispiele:

- Ein Behälter soll aus möglichst wenig Material hergestellt werden.
- Ein Bauteil soll möglichst stabil sein.
- Die Geschwindigkeit eines flussaufwärts fahrenden Rheinschiffes soll auf einen möglichst kleinen Kraftstoffverbrauch eingestellt werden.
- Bei welchem Aussteuerungsgrad wird die Endstufe einer Stereo-Anlage am heißesten? Danach wird dann der Kühlkörper bemessen.
- Bei welchem Einfallswinkel wird das Licht in einem Regentropfen am wenigsten gebrochen? Das Ergebnis zeigt sich in der Position des Regenbogens.

## 3 Vorgehensweise

Die Idee ist folgende: Kann man eine Funktion aufstellen, die die zu optimierende Größe als Funktionswert liefert, dann muss man nur ein Minimum oder ein Maximum dieser Funktion suchen. Dies geschieht nach dem bekannten Verfahren, indem man nämlich die Funktion ableitet und gleich Null setzt. Danach muss man prüfen, ob die gefundenen Kandidaten Minima oder Maxima darstellen.

Ich möchte die Vorgehensweise an einem einfachen Beispiel darstellen. Dabei wird die allgemeine Vorgehensweise neben dem Beispiel dargestellt.

**Das Beispiel:** Ein Schäfer will mit 100 m Maschendraht für einen Zaun ein rechteckiges Feld für seine Schafe begrenzen, so dass die Fläche darin möglichst groß wird. Welche Länge  $l$  und Breite  $b$  muss das Rechteck erhalten?

### Vorgehensweise:

#### Schritt 1:

Man stellt eine Funktionsgleichung (die sogenannte **Hauptbedingung**) auf, die als Ergebnis die zu **optimierende Größe** liefert. Dabei kommt zunächst meist mehr als eine Variable vor. (*Der häufigste Fehler beim Lösen von Extremwertaufgaben liegt übrigens darin, dass **nicht** die zu optimierende Größe als Hauptbedingung verwendet wird!*)

### Beispiel:

#### Schritt 1:

Die zu optimierende Größe ist die Fläche **A**. Mit den beiden Variablen **l** und **b** für die Länge und Breite des Rechteckes ergibt sich:

$$A = l \cdot b$$

Schritt 2:

Man stellt eine Beziehung (eine sogenannte **Nebenbedingung**) zwischen den Variablen auf und stellt diese nach einer beliebigen Variablen um. Bei drei Variablen sind zwei Nebenbedingungen erforderlich, bei vier Variablen drei Nebenbedingungen, usw. Hat man keine Idee, woraus man die Nebenbedingung(en) erstellen kann, schaut man nach, welche Angaben in der Aufgabenstellung noch nicht ausgenutzt worden sind.

Schritt 3:

Die umgestellte(n) Nebenbedingung(en) wird (werden) in die Funktionsgleichung – die Hauptbedingung – eingesetzt. Man erhält eine Funktion von nur noch einer Variablen.

Schritt 4:

Die Funktion wird nach der verbliebenen Variablen abgeleitet und gleich Null gesetzt, um Kandidaten für einen Extremwert zu erhalten.

Schritt 5:

Mit Hilfe der zweiten Ableitung (oder einem anderen Verfahren) wird geprüft, ob entsprechend der Aufgabenstellung ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.

Schritt 6:

Die restlichen Größen laut Aufgabenstellung werden bestimmt. (*In der Praxis werden hier oft Punkte verschenkt, weil man froh ist, die eigentliche Aufgabe gelöst zu haben und daher diesen Teil übersieht.*)

Schritt 2:

Bekannt ist der Umfang des Rechteckes, die Gesamtlänge des Zaunes. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2l + 2b &= 100 \text{ m} \\ \Leftrightarrow 2l &= 100 \text{ m} - 2b \\ \Leftrightarrow l &= 50 \text{ m} - b \end{aligned}$$

Schritt 3:

Einsetzen von  $l$  in die Hauptbedingung ergibt:

$$A = (50 \text{ m} - b) \cdot b$$

Die Fläche  $A$  als Funktion der Breite  $b$  lautet dann:

$$\begin{aligned} A(b) &= (50 \text{ m} - b) \cdot b \\ \Leftrightarrow A(b) &= 50 \text{ m} \cdot b - b^2 \end{aligned}$$

Schritt 4:

$$\begin{aligned} A'(b) &= 50 \text{ m} - 2b \\ \Rightarrow 0 &= 50 \text{ m} - 2b_E \\ \Leftrightarrow 2b_E &= 50 \text{ m} \\ \Leftrightarrow b_E &= 25 \text{ m} \end{aligned}$$

Schritt 5:

$$\begin{aligned} A''(b) &= -2 < 0 \\ \Rightarrow \text{Maximum bei } b_E &= 25 \text{ m} \end{aligned}$$

Schritt 6:

**Alle** Seitenlängen des Rechteckes sind gesucht, es fehlt also noch die Länge  $l_E$ . Ich verwende zur Berechnung die entsprechend umgestellte Nebenbedingung.

$$\begin{aligned} l &= 50 \text{ m} - b \\ \Rightarrow l_E &= 50 \text{ m} - 25 \text{ m} = 25 \text{ m} \end{aligned}$$

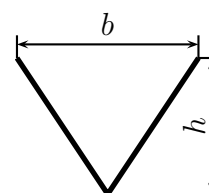
## 4 Übungsaufgaben

### 4.1 Aufgabe 1

Eine zylinderförmige Konservendose mit dem Volumen  $V$  soll aus Weißblech hergestellt werden. Dabei soll der Blechverbrauch möglichst gering sein. Bestimmen Sie die Höhe  $h$  und den Durchmesser  $d$  der Dose.

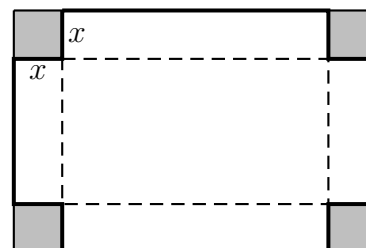
### 4.2 Aufgabe 2

Eine V-förmige Rinne soll aus einem 30 cm breiten Blechstreifen geformt werden. Welche Breite  $b$  und welche Höhe  $h$  muss die Rinne bekommen, damit ihr Querschnitt möglichst groß wird? Damit ist gemeint, dass die Rinne möglichst viel Wasser transportieren kann, wenn sie randvoll gefüllt ist.



### 4.3 Aufgabe 3

Aus einer Blechtafel mit 480 mm Länge und 300 mm Breite soll ein oben offener quaderförmiger Behälter entstehen. Dazu werden an den vier Ecken quadratische Ausschnitte herausgeschnitten, so dass die dadurch entstandenen Seitenteile hochgebogen werden können. Diese werden dann an den Kanten miteinander verschweißt. Welche Kantenlänge  $x$  müssen die herausgeschnittenen Eckstücke haben, damit das Volumen  $V$  des Behälters möglichst groß wird? Wie groß wird dann das Volumen  $V$ ?



### 4.4 Aufgabe 4

In eine Kugel mit dem Durchmesser  $D$  soll ein möglichst großer Zylinder einbeschrieben werden. Bestimmen Sie den Durchmesser  $d$  und die Höhe  $h$  des Zylinders.

### 4.5 Aufgabe 5

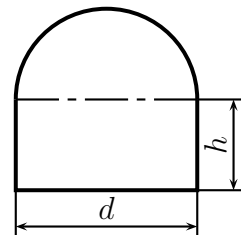
Eine Schublade mit quadratischem Grundriss besteht aus 4 dicken Seitenteilen aus Holz sowie aus einem dünnen Boden. Die Seitenteile sind doppelt so dick wie der Boden. Welche Abmessungen soll die Schublade haben, damit sie bei einem Fassungsvermögen von 16 Litern möglichst wenig wiegt?

## 4.6 Aufgabe 6

In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge  $l$  soll ein möglichst großes Rechteck einbeschrieben werden. Wie lang sind die Rechteckseiten  $a$  und  $b$ ?

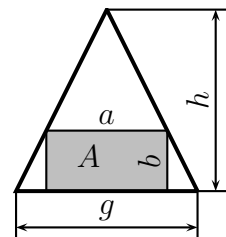
## 4.7 Aufgabe 7

Ein Wasserstollen soll im Querschnitt die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis haben. Wie groß sind die Stollenwandhöhe  $h$  und der Durchmesser  $d$  zu wählen, damit der Stollen bei einer Querschnittsfläche von  $5\text{ m}^2$  einen möglichst kleinen Umfang hat?



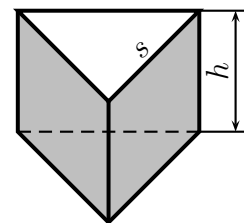
## 4.8 Aufgabe 8

Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe  $h$  und der Grundseite  $g$ . In dieses Dreieck wird ein Rechteck einbeschrieben, wie nebenstehend dargestellt. Die Rechteckseiten  $a$  und  $b$  sollen so gewählt werden, dass der Flächeninhalt  $A$  des Rechtecks möglichst groß wird. Bestimmen Sie die Rechteckseiten  $a$  und  $b$  sowie die sich ergebende Fläche  $A$  für diesen Fall.



## 4.9 Aufgabe 9

Ein oben offener prismatischer Behälter mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche soll hergestellt werden. Das Volumen des Behälters soll  $8\text{ dm}^3$  betragen. Der Behälter soll so gebaut werden, dass dabei der Blechverbrauch minimal wird.



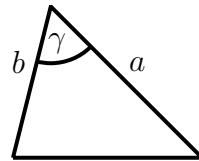
Bestimmen Sie die Höhe  $h$  des Behälters und die Seitenlänge  $s$  des Grundflächendreiecks für diese Bedingungen.

## 4.10 Aufgabe 10

Die Zahl 60 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass Produkt möglichst groß wird.

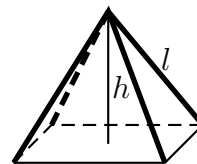
### 4.11 Aufgabe 11

Wie groß muss man den Winkel  $\gamma$  eines Dreieckes machen, der die Seiten  $a = 10$  cm und  $b = 6$  cm hat, damit der Flächeninhalt des Dreieckes möglichst groß wird?



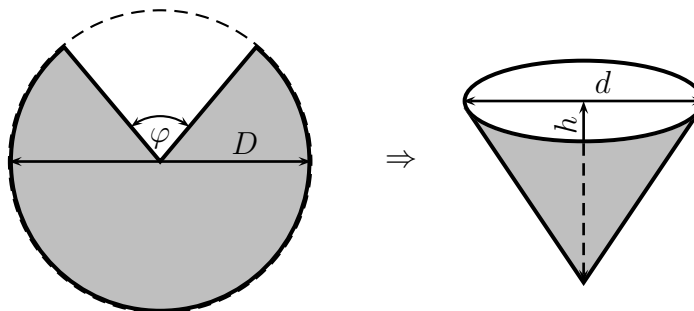
### 4.12 Aufgabe 12

Aus vier Stangen mit einer Länge von  $l = 2$  m soll ein Zelt in der Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche und möglichst großem Volumen aufgestellt werden. Welche Höhe  $h$  erhält das Zelt und wie groß ist damit das Volumen des Zeltes?



### 4.13 Aufgabe 13

Aus einem kreisförmigen Blechstück mit dem Durchmesser  $D$  wird ein Sektor herausgeschnitten. Die Schnittkanten des verbleibenden Blechstückes werden zusammengefügt, so dass ein oben offener Kegel entsteht.

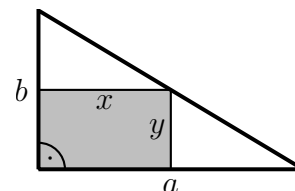


a) Welche Höhe  $h$  und welchen Durchmesser  $d$  muss dieser Kegel erhalten, damit das Volumen des Kegels möglichst groß wird?

b) Wie groß ist der Winkel  $\varphi$  des ausgeschnittenen Kreissektors?

### 4.14 Aufgabe 14

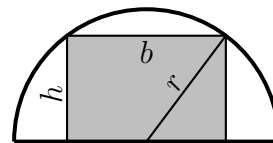
Aus einem Reststück Blech, das die Form eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten  $a = 5$  dm und  $b = 3$  dm hat, soll ein möglichst großes Rechteck geschnitten werden. Dabei liegt eine Ecke des Rechteckes im Scheitel des rechten Winkels des Dreieckes, die gegenüberliegende Ecke auf der Hypotenuse. Wie lang sind die beiden Seiten  $x$  und  $y$  des Rechteckes?





### 4.15 Aufgabe 15

In einen halbkreisförmigen Wanddurchbruch soll gemäß nebenstehender Skizze ein rechteckiges Fenster mit möglichst großer Fläche  $A$  eingebaut werden. Bestimmen Sie die Höhe  $h$  und die Breite  $b$  des optimalen Fensters, wenn der Bogenradius  $r$  bekannt ist.



### 4.16 Aufgabe 16

Eine zylinderförmige oben offene Regenwassersammeltonne mit einem Volumen von  $V = 200$  Liter soll so hergestellt werden, dass möglichst wenig Material verbraucht wird. Welchen Durchmesser  $d$  und welche Höhe  $h$  muss die Tonne haben?

### 4.17 Aufgabe 17

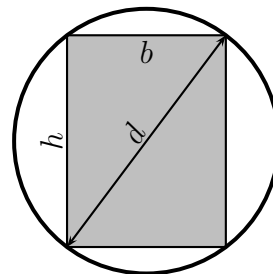
Ein Hochregallager mit einem Gesamtvolumen von  $500 \text{ m}^3$  soll möglichst kostengünstig hergestellt werden. Dabei schlagen die Wände mit  $1000 \text{ € je m}^2$ , die Decke mit  $600 \text{ € je m}^2$  sowie der Boden mit  $400 \text{ € je m}^2$  zu Buche. Welche Maße sollten verwendet werden, wenn ein quadratischer Grundriss gewählt wird?

### 4.18 Aufgabe 18

Aus einem runden Baumstamm mit einem Durchmesser von  $d = 60 \text{ cm}$  soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt und einem möglichst großen Widerstandsmoment geschnitten werden. Das Widerstandsmoment kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

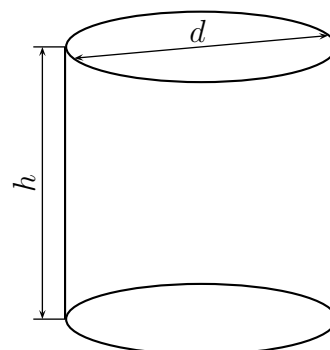
Bestimmen Sie die Höhe  $h$  und die Breite  $b$  des günstigsten rechteckigen Querschnitts!



## 5 Lösungen mit Lösungsweg

### 5.1 Aufgabe 1

Eine zylinderförmige Konservendose mit dem Volumen  $V$  soll aus Weißblech hergestellt werden. Dabei soll der Blechverbrauch möglichst gering sein. Bestimmen Sie die Höhe  $h$  und den Durchmesser  $d$  der Dose.



**Lösung:** Der „Blechverbrauch“ soll optimiert werden. Das ist die Oberfläche der Dose, also Mantel + Deckel + Boden. Damit erhalten wir die **Hauptbedingung**:

$$A = \pi \cdot d \cdot h + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

Die Hauptbedingung enthält 2 Variablen ( $d$  und  $h$ ). Deshalb benötigen wir noch genau eine **Nebenbedingung**. Diese erhalten wir mit Hilfe des bekannten Volumens  $V$ :

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$$

Wir müssen die **Nebenbedingung** nach  $d$  oder  $h$  umstellen und in die **Hauptbedingung** einsetzen. Da sie sich einfacher nach  $h$  als nach  $d$  umstellen lässt, tun wir das.

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \quad | \cdot 4 \\ 4V &= \pi \cdot d^2 \cdot h \quad | : (\pi \cdot d^2) \\ \frac{4V}{\pi \cdot d^2} &= h \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Hauptbedingung erhalten wir  $A$  als eine Funktion von  $d$ .

$$\begin{aligned} A(d) &= \pi \cdot d \cdot \frac{4V}{\pi \cdot d^2} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \\ A(d) &= \frac{4V}{d} + \frac{\pi}{2} \cdot d^2 \\ A(d) &= 4V \cdot d^{-1} + \frac{\pi}{2} \cdot d^2 \\ A'(d) &= -4V \cdot d^{-2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot d \\ A'(d) &= -4V \cdot d^{-2} + \pi \cdot d \\ A'(d) &= -\frac{4V}{d^2} + \pi \cdot d \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwertes ist, dass die erste Ableitung gleich 0 ist.

$$\begin{aligned}
 -\frac{4V}{d_E^2} + \pi \cdot d_E &= 0 & | + \frac{4V}{d_E^2} \\
 \pi \cdot d_E &= \frac{4V}{d_E^2} & | \cdot d_E^2 \\
 \pi \cdot d_E^3 &= 4V & | : \pi \\
 d_E^3 &= \frac{4V}{\pi} & | \sqrt[3]{\phantom{x}} \\
 d_E &= \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}
 \end{aligned}$$

Als nächstes muss geprüft werden, ob der gefundene Wert für  $d$  tatsächlich ein Minimum ergibt. Das geht am einfachsten mit der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned}
 A'(d) &= -4V \cdot d^{-2} + \pi \cdot d \\
 A''(d) &= 8V \cdot d^{-3} + \pi \\
 A''(d_E) &= 8V \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \right)^{-3} + \pi \\
 A''(d_E) &= 8V \cdot \left( \frac{4V}{\pi} \right)^{-1} + \pi \\
 A''(d_E) &= 8V \cdot \frac{\pi}{4V} + \pi \\
 A''(d_E) &= 2 \cdot \pi + \pi \\
 A''(d_E) &= 3 \cdot \pi > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt}
 \end{aligned}$$

Zuletzt muss noch  $h_E$  bestimmt werden. Das geschieht am einfachsten durch Einsetzen von  $d_E$  in die umgestellte Nebenbedingung am Anfang.

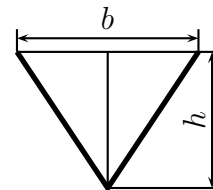
$$\begin{aligned}
 h &= \frac{4V}{\pi \cdot d^2} \\
 h_E &= \frac{4V}{\pi \cdot d_E^2} \\
 h_E &= \frac{4V}{\pi \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \right)^2} \\
 h_E &= \frac{4V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{4^2 V^2}{\pi^2}}} \\
 h_E &= \frac{4V}{\sqrt[3]{\frac{\pi^3 \cdot 4^2 V^2}{\pi^2}}} \\
 h_E &= \frac{4V}{\sqrt[3]{\pi \cdot 4^2 V^2}} \\
 h_E &= \sqrt[3]{\frac{4^3 V^3}{\pi \cdot 4^2 V^2}} \\
 h_E &= \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}
 \end{aligned}$$

Bei der optimalen Dose ist also Höhe und Durchmesser gleich.

$$d_E = h_E = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

## 5.2 Aufgabe 2

Eine V-förmige Rinne soll aus einem 30 cm breiten Blechstreifen geformt werden. Welche Breite  $b$  und welche Höhe  $h$  muss die Rinne bekommen, damit ihr Querschnitt möglichst groß wird? Damit ist gemeint, dass die Rinne möglichst viel Wasser transportieren kann, wenn sie randvoll gefüllt ist.



**Lösung:** Der Querschnitt der Rinne soll optimiert werden. Das ist die dreieckförmige Fläche. Damit erhalten wir die Hauptbedingung:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Um die Nebenbedingung besser erkennen zu können, zeichnet man zweckmäßigerweise in das Dreieck, dessen Fläche optimiert werden soll, die Höhe  $h$  ein. Man erhält dadurch zwei rechtwinklige Teildreiecke mit den Katheten  $h$  und  $\frac{b}{2}$  sowie der Hypotenuse 15 cm. In diesen Teildreiecken gilt der Satz des Pythagoras. Damit erhalten wir die Nebenbedingung:

$$h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (15 \text{ cm})^2$$

Die Nebenbedingung stellen wir zweckmäßigerweise nach  $b$  um, denn dann verschwinden die Brüche.

$$\begin{aligned} h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= (15 \text{ cm})^2 \\ h^2 + \frac{b^2}{4} &= 225 \text{ cm}^2 && | - h^2 \\ \frac{b^2}{4} &= 225 \text{ cm}^2 - h^2 && | \cdot 4 \\ \frac{b^2}{4} &= 900 \text{ cm}^2 - 4h^2 && | \sqrt{\phantom{x}} \\ b &= \sqrt{900 \text{ cm}^2 - 4h^2} \end{aligned}$$

Die umgestellte Nebenbedingung setzen wir in die Hauptbedingung ein und erhalten die Funktion  $A(h)$ . Die Funktion leiten wir nach  $h$  ab und setzen sie gleich Null, um Extrema zu bestimmen.

$$\begin{aligned} A &= \frac{b \cdot h}{2} \\ A(h) &= \frac{\sqrt{900 \text{ cm}^2 - 4h^2} \cdot h}{2} \\ A(h) &= \frac{1}{2} \sqrt{900 \text{ cm}^2 \cdot h^2 - 4h^4} \\ A(h) &= \frac{1}{2} (900 \text{ cm}^2 \cdot h^2 - 4h^4)^{\frac{1}{2}} && | \text{ (Kettenregel anwenden)} \end{aligned}$$

Für die Anwendung der Kettenregel<sup>1</sup> machen wir eine Nebenrechnung, in der die Funktion  $A(h)$  aufgespalten wird in eine Funktion  $A(g(h))$ . Dann ist  $A(g)$  die **äußere** und  $g(h)$  die **innere** Funktion.

$$\begin{aligned}
 g(h) &= 900 \text{ cm}^2 \cdot h^2 - 4h^4 & \Rightarrow & \quad g'(h) = 1800 \text{ cm}^2 \cdot h^1 - 16h^3 \\
 A(g) &= \frac{1}{2}g^{\frac{1}{2}} & \Rightarrow & \quad A'(g) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot g^{\frac{1}{2}-1} \\
 & & & \quad A'(g) = \frac{1}{4} \cdot g^{-\frac{1}{2}} \\
 & & & \quad A'(g) = \frac{1}{4} \cdot (900 \text{ cm}^2 \cdot h^2 - 4h^4)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Mit diesen Nebenrechnungen können wir die Kettenregel anwenden:

$$\begin{aligned}
 A'(h) &= g'(h) \cdot A'(g) \\
 A'(h) &= \underbrace{(1800 \text{ cm}^2 \cdot h - 16h^3)}_{\text{innere Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4} (900 \text{ cm}^2 \cdot h^2 - 4h^4)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{äußere Ableitung}} \\
 A'(h) &= \frac{1800 \text{ cm}^2 \cdot h - 16h^3}{4\sqrt{900 \text{ cm}^2 \cdot h^2 - 4h^4}} \\
 0 &= \frac{1800 \text{ cm}^2 \cdot h - 16h^3}{4\sqrt{900 \text{ cm}^2 \cdot h^2 - 4h^4}} & | \cdot 4\sqrt{900 \text{ cm}^2 \cdot h^2 - 4h^4} \\
 0 &= 1800 \text{ cm}^2 \cdot h - 16h^3 \\
 0 &= h(1800 \text{ cm}^2 - 16h^2) & \Rightarrow h_{E1} = 0 \text{ (entfällt)} \\
 0 &= 1800 \text{ cm}^2 - 16h^2 & | : 16 \\
 0 &= 112,5 \text{ cm}^2 - h^2 & | + h^2 \\
 h^2 &= 112,5 \text{ cm}^2 & | \sqrt{\quad} \\
 h_{2/3} &= \pm\sqrt{112,5} \text{ cm} \approx \pm 10,6066 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Der negative Wert entfällt ebenso, wie zuvor schon  $h_{E1} = 0$ . Es bleibt also nur:

$$h_E = \sqrt{112,5} \text{ cm} \approx 10,6066 \text{ cm}$$

Es muss geprüft werden, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt. Da die Bestimmung der zweiten Ableitung recht mühsam ist, möchte ich für die Prüfung das Verfahren verwenden, das mit der ersten Ableitung auskommt<sup>2</sup>. Ich setze die Werte 10 cm und 11 cm in die erste Ableitung ein um zu prüfen, ob ein Vorzeichenwechsel von positiv zu negativ vorliegt.

<sup>1</sup>Einzelheiten zur Kettenregel siehe hier: <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ablreg.pdf>

<sup>2</sup>Einzelheiten dazu siehe hier in Kapitel 3.5: <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/kudisk.pdf>

$$\begin{aligned}
A'(h) &= \frac{1800 \text{ cm}^2 \cdot h - 16h^3}{4\sqrt{900 \text{ cm}^2 \cdot h^2 - 4h^4}} \\
A'(10 \text{ cm}) &= \frac{1800 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm} - 16 \cdot (10 \text{ cm})^3}{4\sqrt{900 \text{ cm}^2 \cdot (10 \text{ cm})^2 - 4(10 \text{ cm})^4}} \\
&= \frac{2000 \text{ cm}^3}{4\sqrt{50000 \text{ cm}^4}} > 0 \\
A'(11 \text{ cm}) &= \frac{1800 \text{ cm}^2 \cdot 11 \text{ cm} - 16 \cdot (11 \text{ cm})^3}{4\sqrt{900 \text{ cm}^2 \cdot (11 \text{ cm})^2 - 4(11 \text{ cm})^4}} \\
&= \frac{-1496 \text{ cm}^3}{4\sqrt{50336 \text{ cm}^4}} < 0
\end{aligned}$$

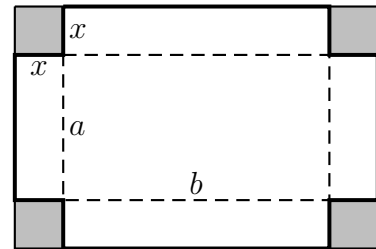
Wir erhalten bei  $h_E = \sqrt{112,5} \text{ cm}$  – wie erwartet – einen Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus. Es liegt also tatsächlich ein Maximum vor. Es fehlt nur noch die Berechnung der Breite  $b_E$ .

$$b_E = \sqrt{900 \text{ cm}^2 - 4h^2} = \sqrt{900 \text{ cm}^2 - 4 \cdot (\sqrt{112,5} \text{ cm})^2} = \sqrt{450} \text{ cm} \approx 21,2132 \text{ cm}$$

Zusammengefasst:  $h_E = \sqrt{112,5} \text{ cm}$       $b_E = \sqrt{450} \text{ cm}$

### 5.3 Aufgabe 3

Aus einer Blechtafel mit 480 mm Länge und 300 mm Breite soll ein oben offener quaderförmiger Behälter entstehen. Dazu werden an den vier Ecken quadratische Ausschnitte herausgeschnitten, so dass die dadurch entstandenen Seitenteile hochgebogen werden können. Diese werden dann an den Kanten miteinander verschweißt. Welche Kantenlänge  $x$  müssen die herausgeschnittenen Eckstücke haben, damit das Volumen  $V$  des Behälters möglichst groß wird? Wie groß wird dann das Volumen  $V$ ?



**Lösung:** Benennen wir die Seiten des fertigen Kastens mit  $a$  (die kürzere Seite) und  $b$  (die längere Seite), dann erhalten wir die Hauptbedingung:

$$V = a \cdot b \cdot x$$

Hierin sind noch 3 Variablen enthalten, wir brauchen also noch 2 Nebenbedingungen. Diese ergeben sich durch die Seitenlängen.

$$a = 300 \text{ mm} - 2x$$

$$b = 480 \text{ mm} - 2x$$

Diese setzen wir in die Hauptbedingung ein und erhalten  $V$  als Funktion von  $x$ . Wir leiten sie dann nach  $x$  ab, setzen sie gleich Null und erhalten die Kandidaten für die Lösungen:

$$\begin{aligned} V(x) &= (300 \text{ mm} - 2x) \cdot (480 \text{ mm} - 2x) \cdot x \\ V(x) &= 144\,000 \text{ mm}^2 \cdot x - 600 \text{ mm} \cdot x^2 - 960 \text{ mm} \cdot x^2 + 4x^3 \\ V(x) &= 144\,000 \text{ mm}^2 \cdot x - 1\,560 \text{ mm} \cdot x^2 + 4x^3 \\ V'(x) &= 144\,000 \text{ mm}^2 - 3\,120 \text{ mm} \cdot x + 12x^2 \\ 0 &= 144\,000 \text{ mm}^2 - 3\,120 \text{ mm} \cdot x + 12x^2 && | : 12 \\ 0 &= 12\,000 \text{ mm}^2 - 260 \text{ mm} \cdot x + x^2 && | \text{ p-q-Formel} \\ x_{E1/2} &= 130 \text{ mm} \pm \sqrt{130^2 \text{ mm}^2 - 12\,000 \text{ mm}^2} \\ &= 130 \text{ mm} \pm \sqrt{16\,900 \text{ mm}^2 - 12\,000 \text{ mm}^2} \\ &= 130 \text{ mm} \pm 70 \text{ mm} \\ x_{E1} &= \underline{200 \text{ mm}} \\ x_{E2} &= \underline{60 \text{ mm}} \end{aligned}$$

Wie man sehr schnell erkennt, kommt  $x_{E1} = 200 \text{ mm}$  nicht als Lösung in Frage, denn würde man so weit in das Blech einschneiden, bliebe weniger als nichts übrig. Wir müssen also nur die Lösung  $x_{E2} = 60 \text{ mm}$  auf ein Maximum prüfen. Das geht am einfachsten mit der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned} V'(x) &= 144\,000 \text{ mm}^2 - 3\,120 \text{ mm} \cdot x + 12x^2 \\ V''(x) &= -3\,120 \text{ mm} + 24x \\ V''(x_{E2}) &= -3\,120 \text{ mm} + 24 \cdot 60 \text{ mm} \\ &= -1\,680 \text{ mm} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum!} \end{aligned}$$



Zum Schluss berechnen wir noch das gesuchte Volumen:

$$\begin{aligned}V(x) &= 144\,000 \text{ mm}^2 \cdot x - 1\,560 \text{ mm} \cdot x^2 + 4x^3 \\V(x_{E2}) &= 144\,000 \text{ mm}^2 \cdot 60 \text{ mm} - 1\,560 \text{ mm} \cdot (60 \text{ mm})^2 + 4 \cdot (60 \text{ mm})^3 \\&= 3\,888\,000 \text{ mm}^3 \\V(x_{E2}) &= 3,8881\end{aligned}$$

Hier noch einmal die Lösungen zusammengefasst:

$$x_E = 60 \text{ mm}, \quad V_E = 3,8881$$

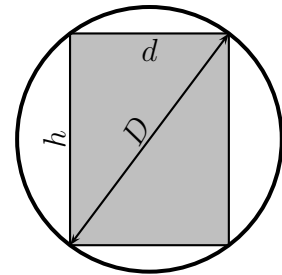
## 5.4 Aufgabe 4

In eine Kugel mit dem Durchmesser  $D$  soll ein möglichst großer Zylinder eingeschrieben werden. Bestimmen Sie den Durchmesser  $d$  und die Höhe  $h$  des Zylinders.

**Lösung:** Da das Zylindervolumen maximal werden soll, ergibt die Formel für das Zylindervolumen die Hauptbedingung:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$$

Wir haben zwei Variablen, benötigen also genau eine Nebenbedingung. Diese können wir am besten erkennen, wenn man sich eine Skizze von der Seitenansicht anfertigt. Wir erhalten einen Kreis (die Kugel) mit dem Durchmesser  $D$  und darin ein Rechteck (Seitenansicht des Zylinders) mit den Seiten  $h$  und  $d$ . Zeichnet man den Kugeldurchmesser als Diagonale in das Rechteck ein, dann erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke. Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras erhält man als Zusammenhang zwischen  $D$ ,  $d$  und  $h$  die Nebenbedingung:



$$D^2 = d^2 + h^2$$

Ob man nun diese Nebenbedingung nach  $d$  oder  $h$  umstellt, ist im Prinzip gleichgültig. Da aber in der Hauptbedingung nur  $d^2$  (nicht  $d$ ) vorkommt, ist es sehr pfiffig, die Nebenbedingung nur nach  $d^2$  umzustellen.

$$d^2 = D^2 - h^2$$

Das setzen wir in die Hauptbedingung ein, vereinfachen sie, leiten sie ab, setzen die Ableitung gleich Null und bestimmen die Lösung.

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \\
 V(h) &= \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - h^2) \cdot h \\
 V(h) &= \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot h - \frac{\pi}{4} \cdot h^3 \\
 V'(h) &= \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{3\pi}{4} \cdot h^2 \\
 0 &= \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{3\pi}{4} \cdot h_E^2 && | : \frac{\pi}{4} \\
 0 &= D^2 - 3 \cdot h_E^2 && | + 3 \cdot h_E^2 \\
 3 \cdot h_E^2 &= D^2 && | : 3 \\
 h_E^2 &= \frac{1}{3} D^2 && | \sqrt{\phantom{x}} \\
 h_E &= \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot D \\
 h_{E1} &= \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot D \\
 h_{E2} &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot D && \text{(entfällt)}
 \end{aligned}$$

Da die Ableitungen recht einfach zu bestimmen sind, verwende ich die zweite Ableitung zur Überprüfung, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt.

$$\begin{aligned}
 V'(h) &= \frac{\pi}{4} \cdot D^2 - \frac{3\pi}{4} \cdot h^2 \\
 V''(h) &= -\frac{6\pi}{4} \cdot h \\
 V''(h) &= -\frac{3\pi}{2} \cdot h \\
 V''(h_E) &= -\frac{3\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot D < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}
 \end{aligned}$$

Wir berechnen noch schnell den fehlenden Zylinderdurchmesser  $d$  mit Hilfe der umgestellten Nebenbedingung:

$$\begin{aligned}d^2 &= D^2 - h^2 \\d &= \sqrt{D^2 - h^2} \\d_E &= \sqrt{D^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot D\right)^2} \\&= \sqrt{D^2 - \frac{1}{3} \cdot D^2} \\&= \sqrt{\frac{2}{3} \cdot D^2} \\d_E &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot D\end{aligned}$$

Hier wieder die Zusammenfassungen der Lösungen:

$$d_E = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot D \quad h_E = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot D$$

## 5.5 Aufgabe 5

Eine Schublade mit quadratischem Grundriss besteht aus 4 dicken Seitenteilen aus Holz sowie aus einem dünnen Boden. Die Seitenteile sind doppelt so dick wie der Boden. Welche Abmessungen soll die Schublade haben, damit sie bei einem Fassungsvermögen von 16 Litern möglichst wenig wiegt?

**Lösung:** Ich benenne die Seiten des quadratischen Bodens mit  $a$  und die Höhe mit  $h$ . Wie lautet nun die Hauptbedingung? Nicht das Volumen, wie manch einer annehmen mag, sondern das Gewicht (genauer: die Masse) der Schublade ergibt die Hauptbedingung. Da wir jedoch weder die Wandstärke noch die Dichte von Holz angegeben haben, nehmen wir die **gewichtete Oberfläche** als **Hauptbedingung**. Was ist damit gemeint? Ganz einfach, ich zähle die dicken Seiten doppelt und den dünnen Boden nur einfach.

$$\begin{aligned}G &= 4 \cdot 2 \cdot a \cdot h + 1 \cdot a^2 \\G &= 8 \cdot a \cdot h + a^2\end{aligned}$$

Die **Nebenbedingung** finden wir über das Volumen  $V$ . Ich stelle sie sofort nach  $h$  um.

$$\begin{aligned}V &= a^2 \cdot h \quad | : a^2 \\h &= \frac{V}{a^2}\end{aligned}$$

Die umgestellte Nebenbedingung wird in die Hauptbedingung eingesetzt und wir erhalten die Funktion  $G(a)$ . Wir leiten sie ab, setzen sie gleich Null und lösen nach  $a$  auf.

$$\begin{aligned}G &= 8 \cdot a \cdot h + a^2 \\G(a) &= 8 \cdot a \cdot \frac{V}{a^2} + a^2 \\G(a) &= \frac{8V}{a} + a^2 \\G(a) &= 8V \cdot a^{-1} + a^2 \\G'(a) &= -8V \cdot a^{-2} + 2a \\0 &= -8V \cdot a_E^{-2} + 2a_E \\0 &= -\frac{8V}{a_E^2} + 2a_E \quad | + \frac{8V}{a_E^2} \\ \frac{8V}{a_E^2} &= 2a_E \quad | \cdot a_E^2 \\8V &= 2a_E^3 \quad | : 2 \\4V &= a_E^3 \quad | \sqrt[3]{\phantom{x}} \\a_E &= \sqrt[3]{4V}\end{aligned}$$

Mit der zweiten Ableitung prüfen wir, ob tatsächlich das gesuchte Minimum vorliegt.

$$\begin{aligned}G'(a) &= -8V \cdot a^{-2} + 2a \\G''(a) &= 16V \cdot a^{-3} + 2 \\G''(a) &= \frac{16V}{a^3} + 2 \\G''(a_E) &= \frac{16V}{\left(\sqrt[3]{4V}\right)^3} + 2 \\&= \frac{16V}{4V} + 2 \\&= 4 + 2 \\G''(a_E) &= 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}\end{aligned}$$

Nun können wir die noch fehlende Höhe  $h$  der Schublade aus der umgestellten Nebenbedingung berechnen.

$$\begin{aligned}h_E &= \frac{V}{\left(\sqrt[3]{4V}\right)^2} \\&= \sqrt[3]{\frac{V^3}{(4V)^2}} \\&= \sqrt[3]{\frac{V^3}{16V^2}} \\h_E &= \sqrt[3]{\frac{V}{16}}\end{aligned}$$

Mit dem gegebenen Wert von  $V = 161 = 16 \text{ dm}^3$  können wir die konkreten Werte für  $a$  und  $h$  berechnen.

$$\begin{aligned}a_E &= \sqrt[3]{4 \cdot 16 \text{ dm}^3} = 4 \text{ dm} \\h_E &= \sqrt[3]{\frac{16 \text{ dm}^3}{16}} = 1 \text{ dm}\end{aligned}$$

Wir fassen die Lösungen zusammen und geben sie in der etwas gebräuchlicheren Einheit Zentimeter an.

$$a_E = 40 \text{ cm} \quad h_E = 10 \text{ cm}$$

## 5.6 Aufgabe 6

In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge  $l$  soll ein möglichst großes Rechteck einbeschrieben werden. Wie lang sind die Rechteckseiten  $a$  und  $b$ ?

**Lösung:** Zur Lösung betrachten wir die nebenstehende Skizze. Optimiert werden soll die Rechteckfläche. Damit erhalten wir die Hauptbedingung.

$$A = a \cdot b$$

Die Hauptbedingung enthält zwei Variablen, also benötigen wir noch genau eine Nebenbedingung. Diese können wir über Strahlensätze, Winkelfunktionen (Tangens) oder Ähnlichkeit von Dreiecken erhalten. Alle Ansätze führen auf ähnliche Formeln wie diese:

$$\frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{b}{\frac{l-a}{2}}$$

In dieser Nebenbedingung ist noch eine weitere Größe aufgetaucht, nämlich  $h$ . Da das Dreieck als gleichseitig bekannt ist, können wir  $h$  mit Hilfe des Satzes des Pythagoras bestimmen.

$$\begin{aligned} l^2 &= h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ l^2 &= h^2 + \frac{l^2}{4} && | - \frac{l^2}{4} \\ l^2 - \frac{l^2}{4} &= h^2 \\ \frac{3}{4} \cdot l^2 &= h^2 && | \sqrt{\phantom{x}} \\ h &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \end{aligned}$$

Diesen Wert setzen wir in die Nebenbedingung ein und stellen diese nach  $b$  um.

$$\begin{aligned} \frac{h}{\frac{l}{2}} &= \frac{b}{\frac{l-a}{2}} \\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l}{\frac{l}{2}} &= \frac{b}{\frac{l-a}{2}} \\ \frac{\sqrt{3} \cdot l \cdot 2}{2 \cdot l} &= \frac{b \cdot 2}{l-a} \\ \sqrt{3} &= \frac{b \cdot 2}{l-a} && | \cdot (l-a) \\ \sqrt{3} \cdot (l-a) &= b \cdot 2 && | : 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (l-a) &= b \end{aligned}$$

Die umgestellte Nebenbedingung kann nun in die Hauptbedingung eingesetzt werden. Wir erhalten dann die Funktion  $A(a)$ , die wir ableiten und gleich Null setzen.

$$\begin{aligned}
 A &= a \cdot b \\
 A(a) &= a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (l - a) \\
 A(a) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \cdot a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \\
 A'(a) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l - \sqrt{3} \cdot a \\
 0 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l - \sqrt{3} \cdot a && | + \sqrt{3} \cdot a \\
 \sqrt{3} \cdot a &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l && | : \sqrt{3} \\
 a_E &= \frac{1}{2} \cdot l
 \end{aligned}$$

Die Prüfung, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt, machen wir mit der zweiten Ableitung, denn die ist recht einfach zu bilden.

$$\begin{aligned}
 A'(a) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l - \sqrt{3} \cdot a \\
 A''(a) &= -\sqrt{3} \\
 A''(a_E) &= -\sqrt{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}
 \end{aligned}$$

Zum guten Schluss bestimmen wir die noch fehlende Rechteckbreite  $b$ .

$$b_E = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (l - a_E) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left( l - \frac{1}{2} \cdot l \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l$$

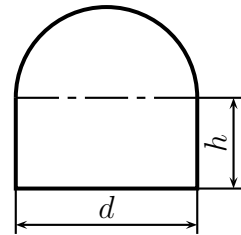
Hier noch einmal die Ergebnisse zusammengefasst:

$$a_E = \frac{1}{2} \cdot l \quad b_E = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l$$



## 5.7 Aufgabe 7

Ein Wasserstollen soll im Querschnitt die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis haben. Wie groß sind die Stollenwandhöhe  $h$  und der Durchmesser  $d$  zu wählen, damit der Stollen bei einer Querschnittsfläche von  $5 \text{ m}^2$  einen möglichst kleinen Umfang hat?



**Lösung:** Optimiert werden soll der Umfang, das sind drei Seiten des Rechtecks und ein Halbkreis. Das ist demnach die **Hauptbedingung:**

$$U = 2 \cdot h + d + \frac{1}{2} \pi \cdot d$$

Die **Nebenbedingung** bekommen wir über die Querschnittsfläche, also Rechteck plus Halbkreis:

$$A = h \cdot d + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} d^2$$

$$A = h \cdot d + \frac{\pi}{8} d^2$$

Am einfachsten kann man diese Gleichung nach  $h$  umstellen.

$$A = h \cdot d + \frac{\pi}{8} d^2 \quad | - \frac{\pi}{8} d^2$$
$$A - \frac{\pi}{8} d^2 = h \cdot d \quad | : d$$
$$\frac{A - \frac{\pi}{8} d^2}{d} = h$$
$$\frac{A}{d} - \frac{\pi}{8} d = h$$

Das setzen wir in die Hauptbedingung ein, vereinfachen sie, leiten sie ab, setzen die Ableitung gleich Null und bestimmen die Lösung.

$$\begin{aligned}
 U(d) &= 2 \cdot \left( \frac{A}{d} - \frac{\pi}{8}d \right) + d + \frac{1}{2}\pi \cdot d \\
 U(d) &= \frac{2A}{d} - \frac{\pi}{4}d + d + \frac{1}{2}\pi \cdot d \\
 U(d) &= 2A \cdot d^{-1} + \left( -\frac{\pi}{4} + 1 + \frac{\pi}{2} \right) \cdot d \\
 U(d) &= 2A \cdot d^{-1} + \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right) \cdot d \\
 U'(d) &= -2A \cdot d^{-2} + \frac{\pi}{4} + 1 \\
 0 &= -2A \cdot d_E^{-2} + \frac{\pi}{4} + 1 && | + 2A \cdot d_E^{-2} \\
 2A \cdot d_E^{-2} &= \frac{\pi}{4} + 1 && | \cdot d_E^2 \\
 2A &= \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right) \cdot d_E^2 && | : \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right) \\
 \frac{2A}{\frac{\pi}{4} + 1} &= d_E^2 && | \sqrt{\phantom{x}} \\
 d_E &= \sqrt{\frac{2A}{\frac{\pi}{4} + 1}} \\
 d_E &= \sqrt{\frac{2A}{\frac{\pi+4}{4}}} \\
 d_E &= \sqrt{\frac{8A}{\pi + 4}}
 \end{aligned}$$

Die Prüfung, ob damit ein Maximum oder – wie gewünscht – ein Minimum vorliegt, machen wir mit Hilfe der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned}
 U'(d) &= -2A \cdot d^{-2} + \frac{\pi}{4} + 1 \\
 U''(d) &= 4A \cdot d^{-3} \\
 U''(d) &= \frac{4A}{d^3} \\
 U''(d_E) &= \frac{4A}{\left( \sqrt{\frac{8A}{\pi+4}} \right)^3}
 \end{aligned}$$

Ohne diesen Term weiter umformen zu müssen, kann man sagen, dass gilt:  $U''(d_E) > 0$   
 Warum?  $A$  ist positiv. Damit ist auch der Bruch unter der Wurzel positiv, denn damit ist sowohl der Zähler als auch der Nenner positiv. Die Wurzel ist demnach lösbar

und auch positiv, und auch, wenn ich sie mit 3 potenziere, ist das Ergebnis positiv. Im Hauptbruch ist damit der Zähler und der Nenner positiv, also ist  $d_E > 0$ . Wir haben damit nachgewiesen, dass ein Minimum vorliegt.

Berechnen wir nun die Höhe  $h$ . Dafür verwenden wir die umgestellte Formel aus der Nebenbedingung.

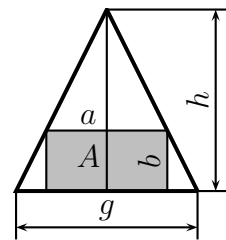
$$\begin{aligned}
 h &= \frac{A}{d} - \frac{\pi}{8}d \\
 h_E &= \frac{A}{d_E} - \frac{\pi}{8} \cdot d_E \\
 h_E &= \frac{A}{\sqrt{\frac{8A}{\pi+4}}} - \frac{\pi}{8} \cdot \sqrt{\frac{8A}{\pi+4}} \\
 &= \sqrt{\frac{A^2}{\frac{8A}{\pi+4}}} - \pi \cdot \sqrt{\frac{8A}{8^2 \cdot (\pi+4)}} \\
 &= \sqrt{\frac{A^2 \cdot (\pi+4)}{8A}} - \pi \cdot \sqrt{\frac{A}{8 \cdot (\pi+4)}} \\
 &= \sqrt{\frac{A \cdot (\pi+4)}{8}} - \pi \cdot \sqrt{\frac{A}{8 \cdot (\pi+4)}}
 \end{aligned}$$

Setzt man für  $A$  den angegebenen Wert  $A = 5 \text{ m}^2$  ein, erhält man die Lösungen:

$$h_E \approx 1,183 \text{ m} \quad d_E \approx 2,367 \text{ m}$$

## 5.8 Aufgabe 8

Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe  $h$  und der Grundseite  $g$ . In dieses Dreieck wird ein Rechteck einbeschrieben, wie nebenstehend dargestellt. Die Rechteckseiten  $a$  und  $b$  sollen so gewählt werden, dass der Flächeninhalt  $A$  des Rechtecks möglichst groß wird. Bestimmen Sie die Rechteckseiten  $a$  und  $b$  sowie die sich ergebende Fläche  $A$  für diesen Fall.



**Lösung:** Die Rechteckfläche soll möglichst groß werden. Das ergibt unsere Hauptbedingung:

$$A = a \cdot b$$

Wir haben zwei Variablen, benötigen also genau eine Nebenbedingung. Diese können wir auf vielfältige Arten gewinnen. Damit man das besser sieht, sollte man die Dreieckshöhe in der Mitte des Dreiecks einzeichnen. Man kann dann über Strahlensätze, ähnliche Dreiecke oder auch mit der Definition des Tangens (z. B. der Winkel unten rechts) die Gleichung der Nebenbedingung aufstellen:

$$\frac{h}{\frac{g}{2}} = \frac{b}{\frac{g-a}{2}}$$

Wir können diese Gleichung nach  $a$  oder  $b$  auflösen und in die Hauptbedingung einsetzen. Ich löse nach  $b$  auf, weil mir das etwas einfacher erscheint.

$$\begin{aligned} \frac{h}{\frac{g}{2}} &= \frac{b}{\frac{g-a}{2}} \\ \frac{2h}{g} &= \frac{2b}{g-a} && | \cdot (g-a) \\ \frac{2h \cdot (g-a)}{g} &= 2b && | : 2 \\ b &= \frac{h \cdot (g-a)}{g} \end{aligned}$$

Diesen Term setzen wir nun in die Hauptbedingung ein und erhalten die Funktion  $A(a)$ . Wir setzen sie gleich Null und lösen nach  $a$  auf.

$$\begin{aligned}
A &= a \cdot b \\
A(a) &= a \cdot \frac{h \cdot (g - a)}{g} \\
A(a) &= \frac{a \cdot h \cdot (g - a)}{g} \\
A(a) &= \frac{a \cdot h \cdot g - a^2 \cdot h}{g} \\
A(a) &= \frac{a \cdot h \cdot g}{g} - \frac{a^2 \cdot h}{g} \\
A(a) &= a \cdot h - \frac{a^2 \cdot h}{g} \\
A'(a) &= h - \frac{2a \cdot h}{g} \\
0 &= h - \frac{2a_E \cdot h}{g} \quad | + \frac{2a_E \cdot h}{g} \\
\frac{2a_E \cdot h}{g} &= h \quad | \cdot g \\
2a_E \cdot h &= h \cdot g \quad | : 2h \\
a_E &= \frac{g}{2}
\end{aligned}$$

Wir bilden die zweite Ableitung und prüfen damit, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt.

$$\begin{aligned}
A'(a) &= h - \frac{2a \cdot h}{g} \\
A''(a) &= -\frac{2h}{g} \\
A''(a_E) &= -\frac{2h}{g} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}
\end{aligned}$$

Die Folgerung war zuässig, da  $h$  und  $g$  stets als positiv bekannt sind. Bestimmen wir zum Schluss noch die fehlende Rechteckseite  $b$ .

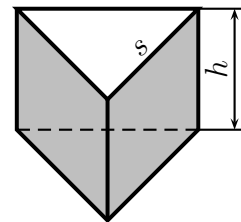
$$\begin{aligned}
b &= \frac{h \cdot (g - a)}{g} \\
b_E &= \frac{h \cdot (g - \frac{g}{2})}{g} \\
b_E &= \frac{h \cdot \frac{g}{2}}{g} \\
b_E &= \frac{h}{2}
\end{aligned}$$

Fassen wir die Ergebnisse abschließend noch einmal zusammen:

$$a_E = \frac{g}{2} \quad b_E = \frac{h}{2}$$

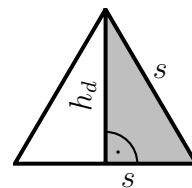
## 5.9 Aufgabe 9

Ein oben offener prismatischer Behälter mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche soll hergestellt werden. Das Volumen des Behälters soll  $8 \text{ dm}^3$  betragen. Der Behälter soll so gebaut werden, dass dabei der Blechverbrauch minimal wird.



Bestimmen Sie die Höhe  $h$  des Behälters und die Seitenlänge  $s$  des Grundflächendreiecks für diese Bedingungen.

**Lösung:** Optimiert werden soll die Fläche, bestehend aus Mantel- und Bodenfläche des Prismas. Die Bodenfläche hat dabei die Form eines gleichseitigen Dreiecks. Zur Berechnung dieser Bodenfläche benötigt man neben der bekannten Seite  $s$  auch die Höhe dieses Dreiecks – nennen wir sie  $h_d$ . Dazu betrachten wir die nebenstehend dargestellte Bodenfläche. In rechten grau unterlegten rechtwinkligen Teildreieck können wir den Satz des Pythagoras anwenden, um daraus  $h_d$  zu bestimmen.



$$\begin{aligned}
 h_d^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 &= s^2 \\
 h_d^2 &= s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2 \\
 h_d^2 &= s^2 - \frac{1}{4}s^2 \\
 h_d^2 &= \frac{3}{4}s^2 \\
 h_d &= \sqrt{\frac{3}{4}s^2} \\
 h_d &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s
 \end{aligned}$$

Damit kann die Bodenfläche bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 A_B &= \frac{s \cdot h_b}{2} \\
 &= \frac{s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s}{2} \\
 A_B &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2
 \end{aligned}$$

Mit dieser Fläche und den drei rechteckigen Seitenflächen kann nun die **Hauptbedingung** aufgestellt werden:

$$A = 3 \cdot \overbrace{s \cdot h}^{\text{Seiten}} + \frac{\overbrace{\sqrt{3}}^{\text{Boden}}}{4} \cdot s^2$$

Das Volumen des Behälters ist bekannt. Damit erhalten wir die **Nebenbedingung**:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 \cdot h$$

Die Nebenbedingung muss nun nach einer der beiden Variablen  $s$  oder  $h$  umgestellt werden, damit der sich ergebende Term in die Hauptbedingung eingesetzt werden kann. Es ist offensichtlich einfacher die Nebenbedingung nach  $h$  statt nach  $s$  umzustellen. Daher wählen wir diesen Weg.

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 \cdot h \quad | : \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 \right) \\ \frac{V}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2} &= h \\ \frac{4 \cdot V}{\sqrt{3} \cdot s^2} &= h \end{aligned}$$

Diesen Term können wir nun in die Hauptbedingung einsetzen. Wir erhalten dann die Funktion  $A(s)$ , die wir ableiten und gleich Null setzen können. Durch Umstellen bekommen wir dann  $s$ .

$$\begin{aligned}
A &= 3 \cdot s \cdot h + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 \\
A(s) &= 3 \cdot s \cdot \frac{4 \cdot V}{\sqrt{3} \cdot s^2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 \\
A(s) &= \frac{\sqrt{3} \cdot 4 \cdot V}{s} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 \\
A(s) &= \sqrt{3} \cdot 4 \cdot V \cdot s^{-1} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 \\
A'(s) &= -\sqrt{3} \cdot 4 \cdot V \cdot s^{-2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s \\
A'(s) &= -\frac{\sqrt{3} \cdot 4 \cdot V}{s^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s \\
0 &= -\frac{\sqrt{3} \cdot 4 \cdot V}{s^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s && | \cdot 2s^2 \\
0 &= -\sqrt{3} \cdot 8 \cdot V + \sqrt{3} \cdot s^3 && | : \sqrt{3} \\
0 &= -8 \cdot V + s^3 && | - s^3 \\
-s^3 &= -8 \cdot V && | \cdot (-1) \\
s^3 &= 8 \cdot V && | \sqrt[3]{\phantom{x}} \\
s_E &= 2 \cdot \sqrt[3]{V}
\end{aligned}$$

Als nächstes muss geprüft werden, ob tatsächlich ein Minimum vorliegt. Das geht am besten mit der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned}
A'(s) &= -\sqrt{3} \cdot 4 \cdot V \cdot s^{-2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s \\
A''(s) &= \sqrt{3} \cdot 8 \cdot V \cdot s^{-3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \sqrt{3} \cdot 8 \cdot V \cdot s^{-3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3} \cdot 8 \cdot V}{s^3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
A''(s_E) &= \frac{\sqrt{3} \cdot 8 \cdot V}{(2 \cdot \sqrt[3]{V})^3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3} \cdot 8 \cdot V}{8 \cdot V} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}
\end{aligned}$$



Wir berechnen jetzt noch die Höhe  $h_E$ .

$$\begin{aligned}h_E &= \frac{4 \cdot V}{\sqrt{3} \cdot s_E^2} \\&= \frac{4 \cdot V}{4 \cdot V} \\&= \frac{\sqrt{3} \cdot \left(2 \cdot \sqrt[3]{V}\right)^2}{4 \cdot \left(\sqrt[3]{V}\right)^3} \\&= \frac{\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \left(\sqrt[3]{V}\right)^2}{\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \left(\sqrt[3]{V}\right)^2} \\&= \frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Setzen wir nun noch den vorgegebenen Wert für das Volumen von  $V = 8 \text{ dm}^3$  in die gefundenen Lösungen für  $s_E$  und  $h_E$  ein.

$$\begin{aligned}s_E &= 2 \cdot \sqrt[3]{V} \\&= 2 \cdot \sqrt[3]{8 \text{ dm}^3} \\&= 2 \cdot 2 \text{ dm} \\s_E &= 4 \text{ dm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_E &= \frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt{3}} \\&= \frac{\sqrt[3]{8 \text{ dm}^3}}{\sqrt{3}} \\&= \frac{2 \text{ dm}}{\sqrt{3}} \\h_E &\approx 1,1547 \text{ dm}\end{aligned}$$

Hier noch einmal die Zusammenfassung der Lösung:

$$s_E = 4 \text{ dm} \quad h_E \approx 1,1547 \text{ dm}$$

## 5.10 Aufgabe 10

Die Zahl 60 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass Produkt möglichst groß wird.

**Lösung:** Zunächst werden die Variablen definiert.

1. Summand:  $x$
2. Summand:  $y$

Laut Aufgabenstellung soll das **Produkt** optimiert werden. Deshalb stellt das Produkt die **Hauptbedingung** dar.

$$\underline{\text{HB:}} \quad P = x \cdot y$$

Die **Summe** ist mit 60 bekannt. Sie stellt die **Nebenbedingung** dar.

$$\underline{\text{NB:}} \quad \begin{array}{l} x + y = 60 \quad | -x \\ y = 60 - x \end{array}$$

Die umgestellte **NB** wird in die **HB** eingesetzt.

$$\begin{aligned} P &= x \cdot y \\ P(x) &= x \cdot (60 - x) \\ P(x) &= 60x - x^2 \end{aligned}$$

Extrema können nur dort liegen, wo die erste Ableitung der Funktion eine Nullstelle hat.

$$\begin{aligned} P(x) &= 60x - x^2 \\ P'(x) &= 60 - 2x \\ P'(x_E) &= 0 \\ 60 - 2x_E &= 0 \quad | -60 \\ -2x_E &= -60 \quad | :(-2) \\ x_E &= 30 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der zweiten Ableitung kann geprüft werden, ob – wie gewünscht – ein **Maximum** vorliegt.

$$\begin{aligned} P'(x) &= 60 - 2x \\ P''(x) &= -2 \end{aligned}$$

$$P''(30) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } x_E = 30$$

Es liegt also tatsächlich ein Maximum vor.

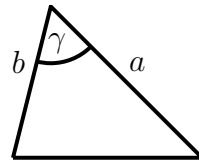
Nun muss noch der zugehörige Summand  $y_E$  bestimmt werden. Das geschieht am einfachsten mit der umgestellten Nebenbedingung.

$$y_E = 60 - x_E = 60 - 30 = 30$$

Die beiden Summanden bei der Zerlegung sind jeweils mit 30 zu wählen.

## 5.11 Aufgabe 11

Wie groß muss man den Winkel  $\gamma$  eines Dreieckes machen, der die Seiten  $a = 10$  cm und  $b = 6$  cm hat, damit der Flächeninhalt des Dreieckes möglichst groß wird?

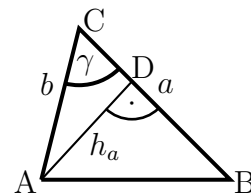


**Lösung:** Zur Bestimmung der Dreiecksfläche, die die Hauptbedingung darstellt, gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Ansätze:

1. Man kennt die Formel zur Flächenberechnung mit zwei gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.
2. Man kennt die Formel zur Flächenberechnung mit zwei gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel **nicht**.

Gehen wir hier davon aus, dass eine solche Formel **nicht** bekannt ist, denn im anderen Fall ist der Ansatz trivial.

Zur Flächenberechnung eines beliebigen Dreieckes benötigt man eine beliebige Seite als **Grundseite** und die **zugehörige Höhe**. Ich wähle hier die Seite  $a$  als Grundseite. Die zugehörige Höhe heißt dann  $h_a$ , die hier nebenstehend eingezeichnet ist. Außerdem wurden in der Skizze auch einige Punkte mit geeigneten Punktenamen bezeichnet.



Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ADC$  kann die Höhe  $h_a$  aus  $\gamma$  und  $b$  berechnet werden.

$$\begin{aligned}\frac{h_a}{b} &= \sin \gamma \quad | \cdot b \\ h_a &= b \cdot \sin \gamma\end{aligned}$$

Die Flächenformel für ein Dreieck mit der Grundseite  $g$  und der zugehörigen Höhe  $h$  lautet:<sup>3</sup>

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

Mit der Grundseite  $a$  und der Höhe  $h_a$  lautet die Formel dann:

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Setzt man nun für  $h_a$  den eben gefundenen Term ein, erhält man die Formel, die man im oben angenommenen ersten Fall schon gekannt hätte:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$$

<sup>3</sup>Einzelheiten zur Dreiecksfläche siehe hier: <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/flaechenberechnung.pdf>

Das ist nun unsere **Hauptbedingung**. Wir können die bekannten Werte für  $a$  und  $b$  einsetzen. Ich verwende für die Rechnung als Längeneinheit **Zentimeter**, dann kann ich sie in der Rechnung weglassen. Wir erhalten die Fläche  $A$  als Funktion des Winkels  $\gamma$ . **Achtung!** In einer Funktion wird ein Winkel immer im **Bogenmaß** angegeben. Er kann natürlich jederzeit ins Gradmaß umgerechnet werden.

$$A(\gamma) = \frac{10 \cdot 6 \cdot \sin \gamma}{2}$$

Hier taucht ausschließlich die Variable  $\gamma$  auf, wir benötigen also keine Nebenbedingungen. Die Funktionsgleichung kann zusammengefasst und abgeleitet werden. Die Nullstellen der Ableitung werden gesucht.

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= \frac{10 \cdot 6 \cdot \sin \gamma}{2} \\ A(\gamma) &= 30 \cdot \sin \gamma \\ A'(\gamma) &= 30 \cdot \cos \gamma \\ A'(\gamma_E) &= 0 \\ 30 \cdot \cos \gamma_E &= 0 && | : 30 \\ \cos \gamma_E &= 0 && | \arccos(\dots) \\ \gamma_E &= \arccos 0 \\ \gamma_E &= \frac{\pi}{2} = 90^\circ \end{aligned}$$

Anmerkung: Rein rechnerisch kämen als Lösungen auch  $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ ;  $\frac{5\pi}{2} = 450^\circ$ ; ... oder auch  $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$ ;  $-\frac{3\pi}{2} = -270^\circ$ ;  $-\frac{5\pi}{2} = -450^\circ$ ; ... in Frage. Wegen der Winkelsumme in einem Dreieck mit  $180^\circ$  muss jedoch gelten:  $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ . Daher entfallen hier alle anderen Lösungen.

Mit Hilfe der zweiten Ableitung kann geprüft werden, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt.

$$\begin{aligned} A'(\gamma) &= 30 \cdot \cos \gamma \\ A''(\gamma) &= 30 \cdot (-\sin \gamma) \end{aligned}$$

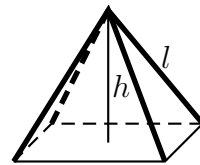
$$A''(\gamma_E) = 30 \cdot \left( -\sin \frac{\pi}{2} \right) = -30 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } \gamma_E = 90^\circ$$

In der Aufgabenstellung ist nicht gefragt, wie groß die Fläche dann wird. Deshalb muss sie hier nicht berechnet werden.

Wenn der Winkel  $\gamma$  ein Rechter Winkel ist, wird die Fläche maximal.

## 5.12 Aufgabe 12

Aus vier Stangen mit einer Länge von  $l = 2\text{ m}$  soll ein Zelt in der Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche und möglichst großem Volumen aufgestellt werden. Welche Höhe  $h$  erhält das Zelt und wie groß ist damit das Volumen des Zeltes?

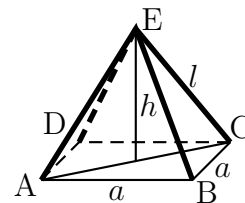


**Lösung:** Die Hauptbedingung stellt bekanntlich die zu optimierende Größe dar, hier also das Volumen  $V$ . Die Formel für das Volumen einer Pyramide lautet:

$$V = \frac{A \cdot h}{3} \quad \text{oder bei quadratischer Grundfläche:} \quad V = \frac{a^2 \cdot h}{3}$$

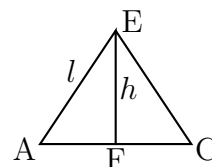
In dieser Formel tauchen noch zwei Variablen auf: die Grundfläche  $A$  bzw. die Kantenlänge  $a$  der Grundfläche und die Höhe  $h$ .

Wir benötigen also noch eine Nebenbedingung. Noch nicht verwendet wurde die bekannte Länge  $l$  der Zeltstangen. Die muss also in einer Nebenbedingung verwendet werden.



Die Grundfläche  $A$  der Pyramide ist ein Quadrat. Ich benenne die Seitenlänge dieses Quadrates mit  $a$ , wie nebenstehend eingezeichnet. Legt man nun einen Schnitt durch die Punkte  $A$ ,  $C$  und  $E$  der Pyramide, dann erhält man ein Dreieck  $\triangle ACE$  mit der Höhe  $h$  und der Grundseite  $d$ , die die Diagonale des Quadrates der Grundfläche darstellt.

Dieses Dreieck habe ich nebenstehend noch einmal herausgezeichnet. Die Höhe  $h$  trifft unten im Punkt  $F$  auf die Diagonale  $d$ , die zwischen  $A$  und  $C$  verläuft. Sie teilt die Diagonale in zwei gleiche Hälften mit der Länge  $\frac{d}{2}$ .



Betrachten wir nun das Teildreieck  $\triangle AFE$ . Dieses Dreieck ist rechtwinklig mit einem Rechten Winkel bei  $F$ . Seine Katheten sind  $h$  und  $\frac{d}{2}$ , die Hypotenuse ist  $l$ . Hier gilt der Satz des Pythagoras:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 = l^2$$

Die Formel kann nach  $d$  umgestellt werden.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 &= l^2 && | - h^2 \\ \left(\frac{d}{2}\right)^2 &= l^2 - h^2 && | \sqrt{\phantom{x}} \\ \frac{d}{2} &= \sqrt{l^2 - h^2} && | \cdot 2 \\ d &= 2 \cdot \sqrt{l^2 - h^2} \end{aligned}$$

Aus der Diagonalen  $d$  der Grundfläche kann die Seitenlänge  $a$  des Quadrates berechnet werden. Das Dreieck  $\triangle ABC$  ist rechtwinklig mit den Katheten  $a$  und der Hypotenuse  $d$ . Auch hier gilt der Satz des Pythagoras.

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 &= d^2 \\ 2a^2 &= d^2 && | : 2 \\ a^2 &= \frac{d^2}{2} && | \sqrt{\phantom{x}} \\ a &= \frac{d}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{l^2 - h^2}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{l^2 - h^2} \\ a &= \sqrt{2 \cdot (l^2 - h^2)} \end{aligned}$$

Diese umgestellte Nebenbedingung kann nun in die Hauptbedingung eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} V &= \frac{a^2 \cdot h}{3} \\ V &= \frac{\left(\sqrt{2 \cdot (l^2 - h^2)}\right)^2 \cdot h}{3} \\ V &= \frac{2 \cdot (l^2 - h^2) \cdot h}{3} \end{aligned}$$

Setzt man nun noch für  $l$  die gegebene Stangenlänge  $l = 2 \text{ m}$  ein, dann erhält man  $V$  als eine Funktion von  $h$ . Ich setze aus Vereinfachungsgründen nur den Zahlenwert ein, alle Längenangaben haben damit die Einheit *Meter*. Anschließend wird die Ableitung gebildet.

$$\begin{aligned}
V &= \frac{2 \cdot (l^2 - h^2) \cdot h}{3} \\
V(h) &= \frac{2 \cdot (2^2 - h^2) \cdot h}{3} \\
V(h) &= \frac{8}{3} \cdot h - \frac{2}{3} \cdot h^3 \\
V'(h) &= \frac{8}{3} - 2h^2
\end{aligned}$$

Die Ableitung dieser Funktion wird gleich Null gesetzt, um Kandidaten für Extrema zu erhalten.

$$\begin{aligned}
V'(h_E) &= 0 \\
\frac{8}{3} - 2h_E^2 &= 0 && | -\frac{8}{3} \\
-2h_E^2 &= -\frac{8}{3} && | : (-2) \\
h_E^2 &= \frac{4}{3} && | \sqrt{\phantom{x}} \\
h_E &= \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \\
h_{E1} = \frac{2}{\sqrt{3}} && h_{E2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Der negative Wert  $h_{E2}$  entfällt, denn negative Längen gibt es nicht. Es bleibt nur die Lösung  $h_E = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,155$ .

Mit der zweiten Ableitung kann nun geprüft werden, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt.

$$\begin{aligned}
V'(h) &= \frac{8}{3} - 2h^2 \\
V''(h) &= -4h
\end{aligned}$$

$$V''(h_E) = -4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \approx -4,619 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } h_E = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Zum Schluss wird noch das Volumen des maximalen Zeltes berechnet.

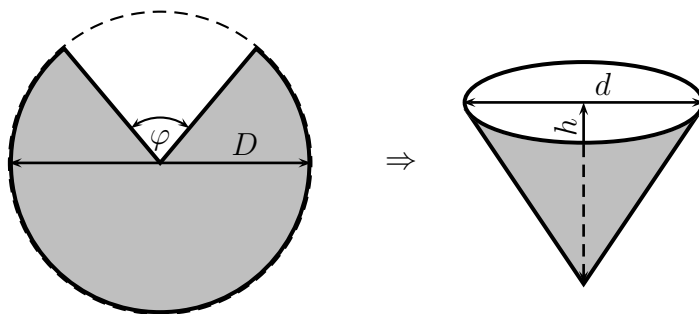
$$\begin{aligned}
V_{max} &= V(h_E) \\
&= \frac{8}{3} \cdot h_E + \frac{2}{3} \cdot h_E^3 \\
&= \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \\
V_{max} &\approx 4,106
\end{aligned}$$

Die Zelthöhe muss etwa 1,155 Meter betragen.

Das Zeltvolumen beträgt dann etwa 4,106 m<sup>3</sup>.

### 5.13 Aufgabe 13

Aus einem kreisförmigen Blechstück mit dem Durchmesser  $D$  wird ein Sektor herausgeschnitten. Die Schnittkanten des verbleibenden Blechstückes werden zusammengefügt, so dass ein oben offener Kegel entsteht.



a) Welche Höhe  $h$  und welchen Durchmesser  $d$  muss dieser Kegel erhalten, damit das Volumen des Kegels möglichst groß wird?

b) Wie groß ist der Winkel  $\varphi$  des ausgeschnittenen Kreissektors?

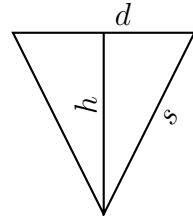


**Lösung:**

**Teil a)** Für die Berechnung des Kegelvolumens  $V$  steht folgende Formel zur Verfügung:

$$V = \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h$$

Benennt man die Länge der Seitenlinie des Kegels von der Spitze bis zum kreisförmigen Rand mit  $s$ , dann gibt der Satz des Pythagoras einen Zusammenhang zwischen  $d$ ,  $h$  und  $s$  an:



$$s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$

Aus der Konstruktionsbeschreibung ergibt sich, dass die Seitenlänge  $s$  der Radius der ursprünglichen runden Blechplatte ist, also sein halber Durchmesser  $\frac{D}{2}$ :

$$s = \frac{D}{2}$$

Hiermit können nun Haupt- und Nebenbedingungen angegeben werden:

$$\text{HB: } V = \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h$$

$$\text{NB: } \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$

Die Nebenbedingung wird nach  $d^2$  umgestellt, damit das Ergebnis in die Hauptbedingung eingesetzt werden kann.

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{2}\right)^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 \\ \frac{D^2}{4} &= \frac{d^2}{4} + h^2 && | \cdot 4 \\ D^2 &= d^2 + 4h^2 && | - 4h^2 \\ D^2 - 4h^2 &= d^2 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Hauptbedingung und nach  $h$  ableiten:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h \\ V(h) &= \frac{\pi}{12} \cdot (D^2 - 4h^2) \cdot h \\ V(h) &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 \cdot h - \frac{\pi}{3} \cdot h^3 \\ V'(h) &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 - \pi \cdot h^2 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist Nullwerden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 - \pi \cdot h_E^2 & | + \pi \cdot h_E^2 \\
 \pi \cdot h_E^2 &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 & | : \pi \\
 h_E^2 &= \frac{D^2}{12} & | \sqrt{\phantom{x}} \\
 h_{E1/2} &= \pm \sqrt{\frac{D^2}{12}} \\
 h_{E1/2} &= \pm \frac{D}{\sqrt{12}}
 \end{aligned}$$

Aus praktischen Gründen entfällt die negative Lösung. Übrig bleibt:

$$h_E = \frac{D}{\sqrt{12}} \approx 0,288675D$$

Nun muss geprüft werden, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt. Dies geschieht am einfachsten mit Hilfe der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned}
 V'(h) &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 - \pi \cdot h^2 \\
 V''(h) &= -2\pi \cdot h \\
 V''(h_E) &= -2\pi \cdot \frac{D}{\sqrt{12}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } h_E = \frac{D}{\sqrt{12}}
 \end{aligned}$$

Jetzt fehlt noch der Durchmesser  $d$  des Kegels. Zur Berechnung setzt man das Ergebnis in die umgestellte Nebenbedingung ein.

$$\begin{aligned}
 d^2 &= D^2 - 4h^2 \\
 d_E^2 &= D^2 - 4 \left( \frac{D}{\sqrt{12}} \right)^2 \\
 &= D^2 - 4 \cdot \frac{D^2}{12} \\
 &= D^2 - \frac{1}{3}D^2 \\
 d_E^2 &= \frac{2}{3}D^2 & | \sqrt{\phantom{x}} \\
 d_{E1/2} &= \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot D
 \end{aligned}$$

Da Längen stets positiv sind, entfällt die negative Lösung. Es bleibt:

$$d_E = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot D \approx 0,816497D$$

**Teil b)** Der Umfang des Kreises mit dem Durchmesser  $d$  am Kegel ist aus konstruktiven Gründen identisch mit dem Bogenstück des Kreissektors der ursprünglichen Blechplatte mit dem Durchmesser  $D$ . Da der gesuchte Winkel  $\varphi$  der Winkel am **weggeschnittenen** Sektor, nicht aber am **übriggebliebenen** Sektor ist, gehört zu diesem der Winkel  $(360^\circ - \varphi)$ .

An der ursprünglichen Blechplatte mit dem Kreissektor verhalten sich die Bogenstücke wie die zugehörigen Winkel. Nennt man das Bogenstück des übriggebliebenen Sektors  $b$  und den Umfang des Vollkreises  $U$ , dann ergibt sich damit eine Gleichung zur Bestimmung von  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{b}{U} &= \frac{360^\circ - \varphi}{360^\circ} \\
 \frac{\pi \cdot d}{\pi \cdot D} &= \frac{360^\circ - \varphi}{360^\circ} \\
 \frac{d}{D} &= \frac{360^\circ - \varphi}{360^\circ} && | \cdot D \cdot 360^\circ \\
 360^\circ \cdot d &= (360^\circ - \varphi) \cdot D \\
 360^\circ \cdot d &= 360^\circ \cdot D - \varphi \cdot D && | + \varphi \cdot D - 360^\circ \cdot d \\
 \varphi \cdot D &= 360^\circ \cdot D - 360^\circ \cdot d \\
 \varphi \cdot D &= 360^\circ \cdot (D - d) && | : D \\
 \varphi &= \frac{360^\circ \cdot (D - d)}{D}
 \end{aligned}$$

Nun kann der gefundene Wert  $d_E$  eingesetzt werden, um den Winkel für das optimale Volumen auszurechnen.

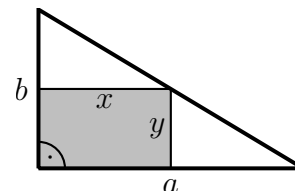
$$\varphi_E = \frac{360^\circ \cdot \left(D - \sqrt{\frac{2}{3}}D\right)}{D} = \frac{360^\circ \cdot D \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{D} = 360^\circ \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 66,06^\circ$$

Zusammengefasst:

$$\varphi_E \approx 66,06^\circ$$

## 5.14 Aufgabe 14

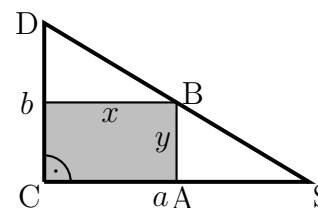
Aus einem Reststück Blech, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten  $a = 5 \text{ dm}$  und  $b = 3 \text{ dm}$  hat, soll ein möglichst großes Rechteck geschnitten werden. Dabei liegt eine Ecke des Rechtecks im Scheitel des rechten Winkels des Dreiecks, die gegenüberliegende Ecke auf der Hypotenuse. Wie lang sind die beiden Seiten  $x$  und  $y$  des Rechtecks?



**Lösung:** Die Rechteckfläche soll optimiert werden. Damit erhalten wir die Hauptbedingung.

$$A = x \cdot y$$

Da in der Hauptbedingung noch **zwei** Variablen vorkommen, ist eine Nebenbedingung erforderlich. Hier kann beispielsweise der zweite Strahlensatz<sup>4</sup> weiter helfen. Die Strahlen sind die Kathete  $a$  und die Hypotenuse des Dreiecks. Der Strahlenschnittpunkt ist mit  $S$  bezeichnet. Die Parallelen sind die Rechteckseite  $y$  sowie die Kathete  $b$  des Dreiecks. Der zweite Strahlensatz kann angewendet werden. Wir erhalten die Nebenbedingung:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} &= y \\ \frac{\overline{CD}}{\overline{CD}} &= b \\ \frac{\overline{SC}}{\overline{SC}} &= a \\ \frac{\overline{SA}}{\overline{SA}} &= a - x \end{aligned}$$

Diese Werte werden in die Nebenbedingung eingesetzt, die Gleichung wird nach  $y$  umgestellt.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} &= \frac{\overline{SA}}{\overline{SC}} \\ \frac{y}{b} &= \frac{a-x}{a} \quad | \cdot b \\ y &= \frac{a-x}{a} \cdot b \end{aligned}$$

Die umgestellte Nebenbedingung wird in die Hauptbedingung eingesetzt. Wir erhalten die Funktion  $A(x)$ , die die Rechteckfläche als Funktion der Länge  $x$  angibt.

<sup>4</sup>Einzelheiten zu den Strahlensätzen siehe hier: <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/strahlen.pdf>

$$\begin{aligned}
A &= x \cdot y \\
A(x) &= x \cdot \frac{a-x}{a} \cdot b \\
&= \frac{x \cdot (a-x) \cdot b}{a} \\
&= \frac{abx - bx^2}{a} \\
&= \frac{abx}{a} - \frac{bx^2}{a} \\
A(x) &= bx - \frac{b}{a} \cdot x^2
\end{aligned}$$

Ein Maximum kann nur dort liegen, wo die erste Ableitung eine Nullstelle hat.

$$\begin{aligned}
A(x) &= bx - \frac{b}{a} \cdot x^2 \\
A'(x) &= b - \frac{2b}{a} \cdot x \\
A'(x_E) &= 0 \\
b - \frac{2b}{a} \cdot x_E &= 0 && | \cdot a \\
ab - 2bx_E &= 0 && | - ab \\
-2bx_E &= -ab && | : (-2b) \\
x_E &= \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

Mit der zweiten Ableitung kann geprüft werden, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt.

$$\begin{aligned}
A'(x) &= b - \frac{2b}{a} \cdot x \\
A''(x) &= -\frac{2b}{a}
\end{aligned}$$

$$A''(x_E) = -\frac{2b}{a} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } x_E = \frac{a}{2}$$

Der zugehörige Wert der anderen Rechteckseite  $y_E$  wird bestimmt:

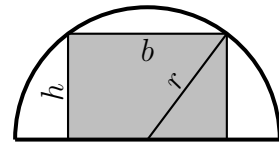
$$y_E = \frac{a - x_E}{a} \cdot b = \frac{a - \frac{a}{2}}{a} \cdot b = \frac{\frac{a}{2}}{a} \cdot b = \frac{1}{2} \cdot b = \frac{b}{2}$$

Mit den in der Aufgabenstellung angegebenen konkreten Werten für  $a = 5 \text{ dm}$  und  $b = 3 \text{ dm}$  können die konkreten Werte  $x_E = 2,5 \text{ dm}$  und  $y_E = 1,5 \text{ dm}$  berechnet werden.

Die Rechteckseiten müssen 2,5 dm und 1,5 dm lang sein.

## 5.15 Aufgabe 15

In einen halbkreisförmigen Wanddurchbruch soll gemäß nebenstehender Skizze ein rechteckiges Fenster mit möglichst großer Fläche  $A$  eingebaut werden. Bestimmen Sie die Höhe  $h$  und die Breite  $b$  des optimalen Fensters, wenn der Bogenradius  $r$  bekannt ist.



**Lösung:** Die Fensterfläche  $A$  soll möglichst groß werden. Damit erhalten wir die Hauptbedingung:

$$A = b \cdot h$$

Wir haben zwei Variablen, benötigen also genau eine Nebenbedingung. Um diese zu erhalten, betrachten wir in der Skizze das kleine rechtwinklige Dreieck unten rechts. Der Satz des Pythagoras ergibt unsere Nebenbedingung:

$$r^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Man kann die Gleichung nach  $h$  oder nach  $b$  umstellen. Ich stelle sie nach  $b$  um, denn dann erhalte ich keine Brüche.

$$\begin{aligned} r^2 &= h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 && | - h^2 \\ r^2 - h^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 && | \sqrt{\phantom{x}} \\ \sqrt{r^2 - h^2} &= \frac{b}{2} && | \cdot 2 \\ b &= 2 \cdot \sqrt{r^2 - h^2} \end{aligned}$$

Diesen Term setzen wir nun in die Hauptbedingung ein und erhalten die Funktion  $A(h)$ . Wir setzen sie gleich Null und lösen nach  $a$  auf.

$$\begin{aligned}
A &= b \cdot h \\
A(h) &= h \cdot 2 \cdot \sqrt{r^2 - h^2} \\
A(h) &= \sqrt{4h^2(r^2 - h^2)} \\
A(h) &= \sqrt{4r^2h^2 - 4h^4} \\
A(h) &= (4r^2h^2 - 4h^4)^{\frac{1}{2}} \\
A'(h) &= (8r^2h - 16h^3) \cdot \frac{1}{2}(4r^2h^2 - 4h^4)^{-\frac{1}{2}} \\
A'(h) &= \frac{8r^2h - 16h^3}{2 \cdot \sqrt{(4r^2h^2 - 4h^4)}} \\
A'(h) &= \frac{8r^2h - 16h^3}{4 \cdot \sqrt{(r^2h^2 - h^4)}} \\
A'(h) &= \frac{\sqrt{(r^2h^2 - h^4)}}{2r^2h - 4h^3} \\
0 &= \frac{\sqrt{(r^2h_E^2 - h_E^4)}}{2r^2h_E - 4h_E^3} && | \cdot \sqrt{(r^2h_E^2 - h_E^4)} \\
0 &= \frac{\sqrt{(r^2h_E^2 - h_E^4)}}{2r^2h_E - 4h_E^3} \\
0 &= h_E \cdot (2r^2 - 4h_E^2) && \Rightarrow h_{E1} = 0 \text{ (entfällt)} \\
0 &= 2r^2 - 4h_E^2 && | + 4h_E^2 \\
4h_E^2 &= 2r^2 && | : 4 \\
h_E^2 &= \frac{r^2}{2} && | \sqrt{\phantom{x}} \\
h_{E2/3} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r
\end{aligned}$$

Die negative Lösung  $h_{E3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$  entfällt natürlich ebenso, wie die Lösung  $h_{E1} = 0$ . Es bleibt also nur  $h_{E2} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$ . Man könnte nun mit der zweiten Ableitung prüfen, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt, diese Ableitung ist jedoch nicht ganz einfach zu bestimmen. Daher wähle ich die alternative Methode, die nur mit der ersten Ableitung auskommt<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>Einzelheiten dazu siehe hier in Kapitel 3.5: <http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/kudisk.pdf>

$$\begin{aligned}
A'(h) &= \frac{2r^2h - 4h^3}{\sqrt{(r^2h^2 - h^4)}} \\
A'(0,5r) &= \frac{r^3 - 0,5r^3}{\sqrt{(0,25r^4 - 0,0625r^4)}} \\
&= \frac{0,5r^3}{\sqrt{(0,3125r^4)}} > 0 \\
A'(0,8r) &= \frac{1,6r^3 - 2,084r^3}{\sqrt{(0,64r^4 - 0,4096r^4)}} \\
&= \frac{-0,484r^3}{\sqrt{(0,2304r^4)}} < 0
\end{aligned}$$

Wir haben einen Vorzeichenwechsel von + nach -, demnach handelt es sich um ein Maximum.

Die noch fehlende Breite  $b$  erhalten wir über die umgestellte Nebenbedingung:

$$\begin{aligned}
b &= 2 \cdot \sqrt{r^2 - h^2} \\
b_E &= 2 \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r\right)^2} \\
&= \sqrt{4 \cdot \left(r^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2\right)} \\
&= \sqrt{4r^2 - 2r^2} \\
&= \sqrt{2r^2} \\
b_E &= \sqrt{2} \cdot r
\end{aligned}$$

Fassen wir noch einmal die Lösungen zusammen:

$$b_E = \sqrt{2} \cdot r \quad h_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot r$$



## 5.16 Aufgabe 16

Eine zylinderförmige oben offene Regenwassersammeltonne mit einem Volumen von  $V = 200$  Liter soll so hergestellt werden, dass möglichst wenig Material verbraucht wird. Welchen Durchmesser  $d$  und welche Höhe  $h$  muss die Tonne haben?

**Lösung:** Der „Materialverbrauch“ soll optimiert werden. Das ist die Oberfläche der Tonne, also Mantel + Boden. Damit erhalten wir die **Hauptbedingung**:

$$A = \pi \cdot d \cdot h + \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

Die Hauptbedingung enthält 2 Variablen ( $d$  und  $h$ ). Deshalb benötigen wir noch genau eine **Nebenbedingung**. Diese erhalten wir mit Hilfe des bekannten Volumens  $V$ :

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$$

Wir müssen die **Nebenbedingung** nach  $d$  oder  $h$  umstellen und in die **Hauptbedingung** einsetzen. Da sie sich einfacher nach  $h$  als nach  $d$  umstellen lässt, tun wir das.

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \quad | \cdot 4 \\ 4V &= \pi \cdot d^2 \cdot h \quad | : (\pi \cdot d^2) \\ \frac{4V}{\pi \cdot d^2} &= h \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Hauptbedingung erhalten wir  $A$  als eine Funktion von  $d$ .

$$\begin{aligned} A(d) &= \pi \cdot d \cdot \frac{4V}{\pi \cdot d^2} + \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \\ A(d) &= \frac{4V}{d} + \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \\ A(d) &= 4V \cdot d^{-1} + \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \\ A'(d) &= -4V \cdot d^{-2} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d \\ A'(d) &= -4V \cdot d^{-2} + \frac{\pi}{2} \cdot d \\ A'(d) &= -\frac{4V}{d^2} + \frac{\pi}{2} \cdot d \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremwertes ist, dass die erste Ableitung gleich 0 ist.

$$\begin{aligned}
 -\frac{4V}{d_E^2} + \frac{\pi}{2} \cdot d_E &= 0 && | + \frac{4V}{d_E^2} \\
 \frac{\pi}{2} \cdot d_E &= \frac{4V}{d_E^2} && | \cdot d_E^2 \\
 \frac{\pi}{2} \cdot d_E^3 &= 4V && | : \frac{\pi}{2} \\
 d_E^3 &= \frac{8V}{\pi} && | \sqrt[3]{\phantom{x}} \\
 d_E &= \sqrt[3]{\frac{8V}{\pi}} \\
 d_E &= 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}
 \end{aligned}$$

Als nächstes muss geprüft werden, ob der gefundene Wert für  $d$  tatsächlich ein Minimum ergibt. Das geht am einfachsten mit der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned}
 A'(d) &= -4V \cdot d^{-2} + \frac{\pi}{2} \cdot d \\
 A''(d) &= 8V \cdot d^{-3} + \frac{\pi}{2} \\
 A''(d_E) &= 8V \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{8V}{\pi}} \right)^{-3} + \frac{\pi}{2} \\
 A''(d_E) &= 8V \cdot \left( \frac{8V}{\pi} \right)^{-1} + \frac{\pi}{2} \\
 A''(d_E) &= 8V \cdot \frac{\pi}{8V} + \frac{\pi}{2} \\
 A''(d_E) &= \pi + \frac{\pi}{2} \\
 A''(d_E) &= \frac{3 \cdot \pi}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tiefpunkt}
 \end{aligned}$$

Zuletzt muss noch  $h_E$  bestimmt werden. Das geschieht am einfachsten durch Einsetzen von  $d_E$  in die umgestellte Nebenbedingung am Anfang.

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{4V}{\pi \cdot d^2} \\
 h_E &= \frac{4V}{\pi \cdot d_E^2} \\
 h_E &= \frac{4V}{\pi \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{8V}{\pi}} \right)^2} \\
 h_E &= \frac{4V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{8^2 V^2}{\pi^2}}} \\
 h_E &= \frac{4V}{\sqrt[3]{\frac{\pi^3 \cdot 8^2 V^2}{\pi^2}}} \\
 h_E &= \frac{4V}{\sqrt[3]{\pi \cdot 8^2 V^2}} \\
 h_E &= \sqrt[3]{\frac{4^3 V^3}{\pi \cdot 8^2 V^2}} \\
 h_E &= \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}
 \end{aligned}$$

Bei der optimalen Tonne ist also die Höhe halb so groß wie der Durchmesser.

$$d_E = 2 \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \quad h_E = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

Zum Schluss können wir noch das gegebene Volumen von 200 Litern in die Formeln einsetzen und erhalten die Zahlenwerte für Durchmesser und Höhe in Dezimetern.

$$d_E \approx 7,9859 \text{ dm} \quad h_E \approx 3,9929 \text{ dm}$$

## 5.17 Aufgabe 17

Ein Hochregallager mit einem Gesamtvolumen von  $500 \text{ m}^3$  soll möglichst kostengünstig hergestellt werden. Dabei schlagen die Wände mit  $1000 \text{ €}$  je  $\text{m}^2$ , die Decke mit  $600 \text{ €}$  je  $\text{m}^2$  sowie der Boden mit  $400 \text{ €}$  je  $\text{m}^2$  zu Buche. Welche Maße sollten verwendet werden, wenn ein quadratischer Grundriss gewählt wird?

**Lösung:** Zunächst müssen Variablennamen festgelegt werden, da sie nicht vorgegeben sind. Wir benennen die Seitenlänge des quadratischen Grundrisses mit  $a$  und die Höhe des Lagers mit  $h$ .

Optimiert werden sollen die Kosten, die wir mit  $K$  bezeichnen. Sie liefern also unsere **Hauptbedingung**:

$$K = \underbrace{4 \cdot a \cdot h \cdot 1000 \text{ €}}_{\text{Wände}} + \underbrace{a^2 \cdot 600 \text{ €}}_{\text{Decke}} + \underbrace{a^2 \cdot 400 \text{ €}}_{\text{Boden}}$$

Da in der Hauptbedingung zwei Variablen vorkommen ( $a$  und  $h$ ), benötigen wir noch eine **Nebenbedingung**. Diese bekommen wir mit Hilfe des bekannten Gesamtvolumens von  $V = 500 \text{ m}^3$ :

$$V = a^2 \cdot h$$

Da sich die Nebenbedingung einfacher nach  $h$  als nach  $a$  umstellen lässt, wählen wir diesen Weg.

$$\begin{aligned} V &= a^2 \cdot h & | : a^2 \\ \frac{V}{a^2} &= h \\ h &= \frac{500 \text{ m}^3}{a^2} \end{aligned}$$

Wir setzen die umgeformte Nebenbedingung in die Hauptbedingung ein und erhalten die Funktion  $K(a)$ . Diese Funktion wird zunächst vereinfacht und dann abgeleitet. Die

Ableitung setzen wir gleich Null und lösen die Gleichung nach  $a$  auf.

$$\begin{aligned}
 K &= 4 \cdot a \cdot h \cdot 1000 \text{ €} + a^2 \cdot 600 \text{ €} + a^2 \cdot 400 \text{ €} \\
 K(a) &= 4 \cdot a \cdot \frac{500 \text{ m}^3}{a^2} \cdot 1000 \text{ €} + a^2 \cdot 600 \text{ €} + a^2 \cdot 400 \text{ €} \\
 &= \frac{2000000 \text{ €m}^3}{a} + a^2 \cdot 1000 \text{ €} \\
 K(a) &= \frac{2000000 \text{ €m}^3}{a} \cdot a^{-1} + a^2 \cdot 1000 \text{ €} \\
 K'(a) &= -2000000 \text{ €m}^3 \cdot a^{-2} + a \cdot 2000 \text{ €} \\
 &= -\frac{2000000 \text{ €m}^3}{a^2} + a \cdot 2000 \text{ €} \\
 0 &= -\frac{2000000 \text{ €m}^3}{a_E^2} + a_E \cdot 2000 \text{ €} && | : 2000 \text{ €} \\
 0 &= -\frac{1000 \text{ m}^3}{a_E^2} + a_E && | + \frac{1000 \text{ m}^3}{a_E^2} \\
 \frac{1000 \text{ m}^3}{a_E^2} &= a_E && | \cdot a_E^2 \\
 1000 \text{ m}^3 &= a_E^3 && | \sqrt[3]{\phantom{x}} \\
 a_E &= 10 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Als nächstes muss geprüft werden, ob tatsächlich ein Minimum vorliegt. Diese Prüfung führen wir mit Hilfe der zweiten Ableitung durch.

$$\begin{aligned}
 K'(a) &= -2000000 \text{ €m}^3 \cdot a^{-2} + a \cdot 2000 \text{ €} \\
 K''(a) &= 2 \cdot 2000000 \text{ €m}^3 \cdot a^{-3} + 2000 \text{ €} \\
 &= \frac{4000000 \text{ €m}^3}{a^3} + 2000 \text{ €} \\
 K''(a_E) &= \frac{4000000 \text{ €m}^3}{1000 \text{ m}^3} + 2000 \text{ €} \\
 &= 4000 \text{ €} + 2000 \text{ €} \\
 K''(a_E) &= 6000 \text{ €} > 0 \Rightarrow \text{Minimum}
 \end{aligned}$$

Zum Schluss bestimmen wir noch die Höhe  $h_E$  mit Hilfe der umgestellten Nebenbedingung.

$$h_E = \frac{500 \text{ m}^3}{a^2} = \frac{500 \text{ m}^3}{(10 \text{ m})^2} = 5 \text{ m}$$

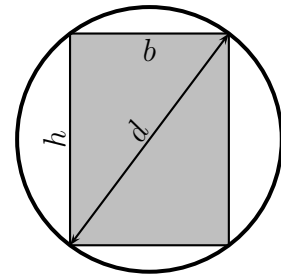
Zusammengefasst:  $a_E = 10 \text{ m} \quad h_E = 5 \text{ m}$

## 5.18 Aufgabe 18

Aus einem runden Baumstamm mit einem Durchmesser von  $d = 60$  cm soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt und einem möglichst großen Widerstandsmoment geschnitten werden. Das Widerstandsmoment kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Bestimmen Sie die Höhe  $h$  und die Breite  $b$  des günstigsten rechteckigen Querschnitts!



**Lösung:** Das *Widerstandsmoment*  $W$  soll optimiert werden. Die zugehörige Formel stellt somit die Hauptbedingung dar:

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Wir haben zwei Variablen, benötigen also genau eine Nebenbedingung. Zeichnet man in der Skizze des Stammes den Durchmesser  $d$  als Diagonale im Rechteck ein, dann erkennt man sofort ein rechtwinkliges Dreieck mit  $d$  als Hypotenuse und  $b$  und  $h$  als Katheten. Der Satz des Pythagoras stellt einen Zusammenhang zwischen diesen drei Größen dar. Er kann somit die gesuchte Nebenbedingung liefern:

$$d^2 = b^2 + h^2$$

Wir können diese Nebenbedingung nach  $b$  oder  $h$  auflösen; in beiden Fällen erhalten wir eine Wurzel. Da in der Hauptbedingung jedoch  $h$  nur im Quadrat auftaucht, bietet es sich an, die Nebenbedingung nach  $h^2$  umzustellen und das Ergebnis direkt für  $h^2$  in die Hauptbedingung einzusetzen.

$$\begin{aligned} d^2 &= b^2 + h^2 & | - b^2 \\ d^2 - b^2 &= h^2 \end{aligned}$$

Diesen Term setzen wir in die Hauptbedingung ein und erhalten die Funktion  $W(b)$ . Diese wird dann nach  $b$  abgeleitet und gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{b \cdot h^2}{6} \\
 W(b) &= \frac{b \cdot (d^2 - b^2)}{6} \\
 W(b) &= \frac{d^2 \cdot b - b^3}{6} \\
 W'(b) &= \frac{d^2 - 3b^2}{6} \\
 0 &= \frac{d^2 - 3b^2}{6} && | \cdot 6 \\
 0 &= d^2 - 3b^2 && | + 3b^2 \\
 3b^2 &= d^2 && | : 3 \\
 b^2 &= \frac{1}{3} \cdot d^2 && | \sqrt{\phantom{x}} \\
 b_{1/2} &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d
 \end{aligned}$$

Der negative Wert  $b_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d$  entfällt. Für  $b_E = b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d$  muss nun geprüft werden, ob – wie gewünscht – ein Maximum vorliegt. Das geht am einfachsten mit der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned}
 W'(b) &= \frac{d^2 - 3b^2}{6} \\
 W''(b) &= \frac{-6b}{6} \\
 W''(b) &= -b \\
 W''(b_E) &= -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d\right)
 \end{aligned}$$

Weil  $d > 0$  ist, folgt:

$$W''(b_E) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

Bestimmen wir nun noch die Höhe  $h$  mit Hilfe der umgestellten Nebenbedingung.

$$\begin{aligned}h^2 &= d^2 - b^2 && \left| \sqrt{\phantom{x}} \right. \\h &= \sqrt{d^2 - b^2} && \left| b_E \text{ einsetzen} \right. \\h_E &= \sqrt{d^2 - \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d \right)^2} \\&= \sqrt{d^2 - \frac{1}{3} \cdot d^2} \\&= \sqrt{\frac{2}{3} \cdot d^2} \\h_E &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot d\end{aligned}$$

Setzt man nun noch den gegebenen Wert von  $d = 60 \text{ cm}$  in die Lösungen für  $b_E$  und  $h_E$  ein, erhalten wir:

$$b_E \approx 34,64 \text{ cm} \quad h_E \approx 48,99 \text{ cm}$$