# Lösen von Exponentilgleichungen

Wolfgang Kippels

6. September 2022

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

## 2 Einleitung

Was ist eine Exponentialgleichung?

Allgemein ausgedrückt sind Exponentialgleichungen Gleichungen, in denen die gesuchte Variable in einem (oder mehreren) Exponenten auftaucht. Das könnte beispielsweise so aussehen:

$$3^{2x-5} \cdot 9^{3x-12} = 27$$

Leider gibt es kein allgemeingültiges Lösungsrezept, mit dem man **alle** Exponentialgleichungen lösen kann, wie wir das beispielsweise bei Linearen oder Quadratischen Gleichungen kennengelernt haben. Immerhin gibt es ein paar Ansätze, die auf die eine oder andere Gleichung angewendet werden können. Diese Lösungsmöglichkeiten möchte ich der Reihe nach vorstellen.

Im Folgenden gehe ich davon aus, dass die Potenzrechengesetze und die Logarithmengesetze bekannt sind. Diese kann man beispielsweise hier nachlesen:

Potenzrechengesetze: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/potenz.pdf
Logarithmengesetze: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/logarit.pdf

# 3 Lösung durch Basen- und Exponentenvergleich

## 3.1 Grundprinzip dieses Verfahrens

Schauen wir uns das Beispiel aus der Einleitung einmal genau an.

$$3^{2x-5} \cdot 9^{3x-12} = 27$$

Hier sollte auffallen, dass alle Basen eine Potenz von 3 darstellen.

$$\begin{aligned} 3 &= 3^1 \\ 9 &= 3^2 \\ 27 &= 3^3 \end{aligned}$$

Hiermit können wir die Basen durch Dreierpotenzen ersetzen.

$$\begin{aligned} 3^{2x-5} \cdot 9^{3x-12} &= 27 \\ (3^1)^{2x-5} \cdot (3^2)^{3x-12} &= 3^3 && \mid \text{5. Potenzrechengesetz} \\ 3^{1\cdot(2x-5)} \cdot 3^{2\cdot(3x-12)} &= 3^3 && \mid \text{3. Potenzrechengesetz} \\ 3^{1\cdot(2x-5)+2\cdot(3x-12)} &= 3^3 \end{aligned}$$

Nun sind die Basen auf beiden Seiten gleich, beide sind gleich 3. Wegen der Stetigkeit der Potenzfunktion müssen daher auch die Exponenten gleich sein. Wir können somit die Exponenten **gleichsetzen**. Die weitere Rechnung sieht dann so aus:

$$\begin{aligned} 3^{1\cdot(2x-5)+2\cdot(3x-12)} &= 3^3 && \mid \text{Exponenten gleichsetzen} \\ 1 \cdot (2x-5) + 2 \cdot (3x-12) &= 3 \\ 2x - 5 + 6x - 24 &= 3 \\ 8x - 29 &= 3 && \mid +29 \\ 8x &= 32 && \mid :8 \\ x &= 4 \\ L &= \{4\} \end{aligned}$$

Durch eine Probe können wir uns von der Richtigkeit des Ergebnisses überzeugen.

$$\begin{aligned} 3^{2x-5} \cdot 9^{3x-12} &= 27 \\ 3^{2\cdot4-5} \cdot 9^{3\cdot4-12} &\stackrel{?}{=} 27 \\ 3^{8-5} \cdot 9^{12-12} &\stackrel{?}{=} 27 \\ 3^3 \cdot 9^0 &\stackrel{?}{=} 27 \\ 27 \cdot 1 &= 27 \end{aligned}$$

Mit einem weiteren Beispiel wollen wir das Gelernte vertiefen.

$$\sqrt[3]{a^{x-2}} = a^{x-4}$$

Zunächst muss die Wurzel in eine Potenz umgewandelt werden. Danach können wir nach dem eben kennen gelernten Schema vorgehen.

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt[3]{a^{x-2}} & = & a^{x-4} & \\
a^{\frac{x-2}{3}} & = & a^{x-4} & \mid \text{Exponenten gleichsetzen} \\
\dfrac{x-2}{3} & = & x-4 & \mid \cdot 3 \\
x-2 & = & 3\cdot(x-4) & \\
x-2 & = & 3x-12 & \mid -3x+2 \\
-2x & = & -10 & \mid :(-2) \\
x & = & 5 & \\
L & = & \{5\} &
\end{array}$$

Auch hier möchte ich das Ergebnis durch eine Probe überprüfen:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt[3]{a^{x-2}} & = & a^{x-4} \\
\sqrt[3]{a^{5-2}} & \stackrel{?}{=} & a^{5-4} \\
\sqrt[3]{a^{3}} & \stackrel{?}{=} & a^{1} \\
a & = & a
\end{array}$$

## 3.2 Übungsaufgaben zum Lösungsverfahren „Basen- und Exponentenvergleich“

Damit die Lösung schnell geprüft werden kann, steht bei jeder Aufgabe die Lösungsmenge direkt mit dabei. Komplette Lösungen mit Lösungsweg befinden sich in einem eigenen nachfolgenden Kapitel.

### 3.2.1 Aufgabe 1

$$2^{x-3} = 1\,024$$

$$L = \{13\}$$

### 3.2.2 Aufgabe 2

$$b^{2x+3} = b^{8-3x}$$

$$L = \{1\}$$

### 3.2.3 Aufgabe 3

$$5^{x} = 25$$

$$L = \{2\}$$

### 3.2.4 Aufgabe 4

$$\sqrt[3]{a^{17-x}} = a^{x-5}$$

$$L = \{8\}$$

### 3.2.5 Aufgabe 5

$$\sqrt[x-2]{a^{x-3}} = \sqrt[x+3]{a^{x+1}}$$

$$L = \{7\}$$

### 3.2.6 Aufgabe 6

$$4^x = 0{,}25$$

$$L = \{-1\}$$

### 3.2.7 Aufgabe 7

$$\sqrt[3]{a^{5x+7}} \cdot \sqrt[4]{a^{3x+10}} = a^2 \cdot \sqrt{a^{5x}}$$

$$L = \{34\}$$

### 3.2.8 Aufgabe 8

$$0{,}05^{2x-1} = 20^{3x-8}$$

$$L = \{1{,}8\}$$

### 3.2.9 Aufgabe 9

$$32^{\frac{x+5}{x-7}} = (0{,}25 \cdot 128)^{\frac{x+17}{x-3}}$$

$$L = \{13\}$$

### 3.2.10 Aufgabe 10

$$a^2 \cdot \sqrt[4]{a^{5x-3}} = a^{\frac{7x}{6}} \cdot \sqrt[3]{a^{\frac{2x}{9}}}$$

$$L = \{-135\}$$

## 3.3 Komplette Lösungswege zu den Übungsaufgaben zum Lösungsverfahren „Basen- und Exponentenvergleich“

### 3.3.1 Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
2^{x-3} &= 1\,024 \\
2^{x-3} &= 2^{10} && \mid \text{Exponenten gleichsetzen} \\
x-3 &= 10 && \mid +3 \\
x &= 13 \\
L &= \{13\}
\end{aligned}$$

### 3.3.2 Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
b^{2x+3} &= b^{8-3x} && \mid \text{Exponenten gleichsetzen} \\
2x+3 &= 8-3x && \mid +3x-3 \\
5x &= 5 && \mid :5 \\
x &= 1 \\
L &= \{1\}
\end{aligned}$$

### 3.3.3 Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
5^{x} &= 25 \\
5^{x} &= 5^{2} && \mid \text{Exponenten gleichsetzen} \\
x &= 2 \\
L &= \{2\}
\end{aligned}$$

### 3.3.4 Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{a^{17-x}} &= a^{x-5} \\
a^{\frac{17-x}{3}} &= a^{x-5} && \mid \text{Exponenten gleichsetzen} \\
\frac{17-x}{3} &= x-5 && \mid \cdot 3 \\
17-x &= 3x-15 && \mid -3x-17 \\
-4x &= -32 && \mid :(-4) \\
x &= 8 \\
L &= \{8\}
\end{aligned}$$

### 3.3.5 Aufgabe 5

$$
\begin{aligned}
\sqrt[x-2]{a^{x-3}} &= \sqrt[x+3]{a^{x+1}} \\
a^{\frac{x-3}{x-2}} &= a^{\frac{x+1}{x+3}} && \mid \text{Exponenten gleichsetzen} \\
\frac{x-3}{x-2} &= \frac{x+1}{x+3} && \mid \cdot (x-2)\cdot(x+3) \\
(x-3)\cdot(x+3) &= (x+1)\cdot(x-2) \\
x^2-9 &= x^2-2x+x-2 && \mid -x^2 \\
-9 &= -x-2 && \mid +x+9 \\
x &= 7 \\
L &= \{7\}
\end{aligned}
$$

### 3.3.6 Aufgabe 6

$$
\begin{aligned}
4^x &= 0{,}25 \\
4^x &= \frac{1}{4} \\
4^x &= 4^{-1} && \mid \text{Exponenten gleichsetzen} \\
x &= -1 \\
L &= \{-1\}
\end{aligned}
$$

### 3.3.7 Aufgabe 7

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{a^{5x+7}}\cdot\sqrt[4]{a^{3x+10}} &= a^2\cdot\sqrt{a^{5x}} \\
a^{\frac{5x+7}{3}}\cdot a^{\frac{3x+10}{4}} &= a^2\cdot a^{\frac{5x}{2}} \\
a^{\frac{5x+7}{3}+\frac{3x+10}{4}} &= a^{2+\frac{5x}{2}} && \mid \text{Exponenten gleichsetzen} \\
\frac{5x+7}{3}+\frac{3x+10}{4} &= 2+\frac{5x}{2} && \mid \cdot 12 \\
4\cdot(5x+7)+3\cdot(3x+10) &= 12\cdot 2+6\cdot 5x \\
20x+28+9x+30 &= 24+30x \\
29x+58 &= 24+30x && \mid -30x-58 \\
-x &= -34 && \mid \cdot(-1) \\
x &= 34 \\
L &= \{34\}
\end{aligned}
$$

### 3.3.8 Aufgabe 8

$$\begin{aligned}
0{,}05^{2x-1} &= 20^{3x-8} \\
\left(\frac{1}{20}\right)^{2x-1} &= 20^{3x-8} \\
20^{-(2x-1)} &= 20^{3x-8} && |\ \text{Exponenten gleichsetzen} \\
-(2x-1) &= 3x-8 \\
-2x+1 &= 3x-8 && |-3x-1 \\
-5x &= -9 && |:(-5) \\
x &= 1{,}8 \\
L &= \{1{,}8\}
\end{aligned}$$

### 3.3.9 Aufgabe 9

$$\begin{aligned}
32^{\frac{x+5}{x-7}} &= (0{,}25\cdot 128)^{\frac{x+17}{x-3}} \\
32^{\frac{x+5}{x-7}} &= 32^{\frac{x+17}{x-3}} && |\ \text{Exponenten gleichsetzen} \\
\frac{x+5}{x-7} &= \frac{x+17}{x-3} && |\cdot(x-7)\cdot(x-3) \\
(x+5)\cdot(x-3) &= (x+17)\cdot(x-7) \\
x^2-3x+5x-15 &= x^2-7x+17x-119 && |-x^2 \\
2x-15 &= 10x-119 && |-10x+15 \\
-8x &= -104 && |:(-8) \\
x &= 13 \\
L &= \{13\}
\end{aligned}$$

### 3.3.10 Aufgabe 10

$$\begin{aligned}
a^2\cdot\sqrt[4]{a^{5x-3}} &= a^{\frac{7x}{6}}\cdot\sqrt[3]{a^{\frac{2x}{9}}} \\
a^2\cdot a^{\frac{5x-3}{4}} &= a^{\frac{7x}{6}}\cdot a^{\frac{2x}{3\cdot 9}} \\
a^{2+\frac{5x-3}{4}} &= a^{\frac{7x}{6}+\frac{2x}{27}} && |\ \text{Exponenten gleichsetzen} \\
2+\frac{5x-3}{4} &= \frac{7x}{6}+\frac{2x}{27} && |\cdot 108 \\
108\cdot 2+27\cdot(5x-3) &= 18\cdot 7x+4\cdot 2x \\
216+135x-81 &= 126x+8x \\
135+135x &= 134x && |-134x-135 \\
x &= -135 \\
L &= \{-135\}
\end{aligned}$$

# 4 Lösung durch logarithmische Berechnung

## 4.1 Grundprinzip dieses Verfahrens

Manchmal lässt sich die Lösung bestimmen, indem man die Gleichung logarithmiert. Wie das aussehen kann, zeigt nachfolgendes Beispiel.

$$3^x = 30$$

Hier kann direkt auf beiden Seiten der Logarithmus zur Basis 3 gebildet werden.

$$x = \log_3 30$$

Weil die meisten Taschenrechner nicht den Logarithmus zu einer beliebigen Basis berechnen können, hilft hier das fünfte Logarithmengesetz weiter:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Man kann sich also eine beliebge Basis $c$ aussuchen, die der Taschenrechner versteht, und damit den gesuchten Logarithmus bestimmen. Üblicherweise kennen unsere Taschenrechner den Zehnerlogarithmus (Basis 10) und den „natürlichen" Logarithmus (Basis Eulersche Zahl $e \approx 2{,}718\,281\,828\,459\,045$).

Wir können also wählen, ob wir als Basis $c$ die 10 oder die Eulersche Zahl $e$ verwenden wollen. Für beide Logarithmen gibt es eine Kurzbezeichnung:

$$\begin{aligned} \log_{10} x &= \lg x \\ \log_e x &= \ln x \end{aligned}$$

**Achtung!** Hier lauert allerdings eine Falle! Während die Bezeichnung $\ln x$ tatsächlich weltweit für den natürlichen Logarithmus verwendet wird, ist für den Zehnerlogarithmus im angloamerikanischen Raum im Gegensatz zur übrigen Welt nicht die Bezeichnung $\lg x$ üblich, sondern man verwendet dafür die Schreibweise $\log x$. Weil unsere üblichen Taschenrechner alle aus diesem Raum stammen, steht auf der Taste für den Zehnerlogarithmus nicht $\boxed{\lg}$, sondern $\boxed{\log}$. Das muss man wissen. Hinter dieser Taste verbirgt sich also nicht der allgemeine Logarithmus zu einer beliebigen Basis, sondern nur der Zehnerlogarithmus.

Anmerkung: Inzwischen gibt es auch Taschenrechner, die direkt den Logarithmus zu einer beliebigen Basis berechnen können. Hier hilft ein Blick in die Bedienungsanleitung.

Kommen wir nun zu unserem Beispiel zurück. Ich verwende zur Lösung den natürlichen Logarithmus, weil der weltweit einheitlich mit ln bezeichnet wird.

$$\begin{aligned} 3^x &= 30 \qquad\qquad |\log_3 \ldots \\ x &= \log_3 30 \\ &= \frac{\ln 30}{\ln 3} \\ x &\approx 3{,}095\,903\,274\,29 \end{aligned}$$

Wir können leicht die Probe machen. Mit dem Taschenrechner berechnen wir:

$$3^{3{,}095\,903\,274\,29} = 30$$

Ein weiteres (komplizierteres) Beispiel soll das Verfahren erläutern.

$$13^{3x-9} = 16^{5x-15}$$

Hier haben wir zwei verschiedene Basen. Wir können daher auf den ersten Blick nicht (sinnvoll) sofort logarithmieren. Das funktioniert aber trotzdem.

Als Basis, zu der wir logatithmieren wollen, kommen auf den ersten Blick die 13 oder die 16 in Frage. Es geht aber tatsächlich auch mit jeder beliebigen anderen Basis. Daher wähle ich eine, mit der mein Taschenrechner unmittelbar rechnen kann, also $e$ oder 10. Zur Abwechslung wähle ich in diesem Beispiel den Zehnerlogarithmus. In den nachfolgenden Schritten wird das dritte Logarithmengesetze angewendet und algebraische Umformungen durchgeführt.

$$\begin{array}{rcll}
13^{3x-9} &=& 16^{5x-15} & |\,\lg\ldots \\
\lg 13^{3x-9} &=& \lg 16^{5x-15} & |\text{ 3. Logarithmengesetz} \\
(3x-9)\cdot\lg 13 &=& (5x-15)\cdot\lg 16 & \\
3x\cdot\lg 13 - 9\cdot\lg 13 &=& 5x\cdot\lg 16 - 15\cdot\lg 16 & |+9\cdot\lg 13 - 5x\cdot\lg 16 \\
3x\cdot\lg 13 - 5x\cdot\lg 16 &=& -15\cdot\lg 16 + 9\cdot\lg 13 & \\
x\cdot(3\cdot\lg 13 - 5\cdot\lg 16) &=& -15\cdot\lg 16 + 9\cdot\lg 13 & |:(3\cdot\lg 13 - 5\cdot\lg 16) \\
x &=& \dfrac{-15\cdot\lg 16 + 9\cdot\lg 13}{3\cdot\lg 13 - 5\cdot\lg 16} &
\end{array}$$

Im Prinzip kann man diesen Bruch unmittelbar mit dem Taschenrechner ausrechnen. Es geht aber sogar noch etwas eleganter ganz ohne Taschenrechner:

$$\begin{array}{rcll}
x &=& \dfrac{-15\cdot\lg 16 + 9\cdot\lg 13}{3\cdot\lg 13 - 5\cdot\lg 16} & |\text{ Zähler umsortieren} \\
x &=& \dfrac{9\cdot\lg 13 - 15\cdot\lg 16}{3\cdot\lg 13 - 5\cdot\lg 16} & |\text{ 3 ausklammern} \\
x &=& \dfrac{3\cdot(3\cdot\lg 13 - 5\cdot\lg 16)}{3\cdot\lg 13 - 5\cdot\lg 16} & |\text{ kürzen} \\
x &=& 3 & \\
L &=& \{3\} &
\end{array}$$

Machen wir zum Schluss noch die Probe:

$$\begin{array}{rcl}
13^{3x-9} &=& 16^{5x-15} \\
13^{3\cdot 3-9} &\stackrel{?}{=}& 16^{5\cdot 3-15} \\
13^{0} &\stackrel{?}{=}& 16^{0} \\
1 &=& 1
\end{array}$$

## 4.2 Übungsaufgaben zum Lösungsverfahren „Logarithmische Rechnung“

Damit die Lösung schnell geprüft werden kann, steht bei jeder Aufgabe die Lösungsmenge direkt mit dabei. Komplette Lösungen mit Lösungsweg befinden sich in einem eigenen nachfolgenden Kapitel.

### 4.2.1 Aufgabe 1

$$100^x = 5$$
$$L \approx \{0{,}349\,485\}$$

### 4.2.2 Aufgabe 2

$$2^x = 25$$
$$L \approx \{4{,}643\,856\}$$

### 4.2.3 Aufgabe 3

$$\sqrt[x]{21} = 1{,}78$$
$$L = \{5{,}28\}$$

### 4.2.4 Aufgabe 4

$$\sqrt[x]{9\,977} = 2{,}5113$$
$$L \approx \{10\}$$

### 4.2.5 Aufgabe 5

$$25^{-x} = 11$$
$$L \approx \{0{,}744\,948\}$$

### 4.2.6 Aufgabe 6

$$3^{(6^x)} = 5^{(4^x)}$$
$$L \approx \{-0{,}941\,726\}$$

### 4.2.7 Aufgabe 7

$$45^{2x-4} = 50^{x-2}$$
$$L = \{2\}$$

### 4.2.8 Aufgabe 8

$$8^{x-1} = 7 \cdot 5^x$$
$$L \approx \{8{,}564\,512\}$$

### 4.2.9 Aufgabe 9

$$(3^x)^2 = 729$$
$$L = \{3\}$$

### 4.2.10 Aufgabe 10

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-5} = \left(\frac{4}{7}\right)^{3x-2}$$
$$L \approx \{-2{,}183\,361\}$$

## 4.3 Komplette Lösungswege zu den Übungsaufgaben zum Lösungsverfahren „Logarithmische Rechnung“

Vorweg: Bei allen Aufgaben kann nach Belieben mit dem Zehnerlogarithmus **lg** oder mit dem natürlichen Logarithmus **ln** gerechnet werden. In den folgenden Musterlösungen habe ich das willkürlich einfach abgewechselt.

### 4.3.1 Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
100^x &= 5 && \mid \log_{100}\ldots \\
x &= \log_{100} 5 \\
&= \frac{\lg 5}{\lg 100} \\
x &\approx \{0{,}349\,485\} \\
L &\approx \{0{,}349\,485\}
\end{aligned}$$

### 4.3.2 Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
2^x &= 25 && \mid \log_{2}\ldots \\
x &= \log_{2} 25 \\
&= \frac{\ln 25}{\ln 2} \\
x &\approx 4{,}643\,856 \\
L &\approx \{4{,}643\,856\}
\end{aligned}$$

### 4.3.3 Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
\sqrt[x]{21} &= 1{,}78 && \mid \log_{21}\ldots \\
\frac{1}{x} &= \log_{21} 1{,}78 \\
\frac{1}{x} &= \frac{\lg 1{,}78}{\lg 21} && \mid \text{Kehrwert} \\
x &= \frac{\lg 21}{\lg 1{,}78} \\
x &\approx 5{,}28 \\
L &\approx \{5{,}28\}
\end{aligned}$$

### 4.3.4 Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
\sqrt[x]{9\,977} &= 2{,}5113 && |\log_{9\,977}\ldots\\
\frac{1}{x} &= \log_{9\,977} 2{,}5113\\
\frac{1}{x} &= \frac{\lg 2{,}5113}{\lg 9\,977} && |\text{ Kehrwert}\\
x &= \frac{\lg 9\,977}{\lg 2{,}5113}\\
L &\approx \{10\}
\end{aligned}$$

### 4.3.5 Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
25^{-x} &= 11 && |\log_{25}\ldots\\
-x &= \log_{25} 11 && |\cdot(-1)\\
x &= -\log_{25} 11\\
x &= -\frac{\ln 11}{\ln 25}\\
x &\approx -0{,}744\,948\\
L &\approx \{-0{,}744\,948\}
\end{aligned}$$

### 4.3.6 Aufgabe 6

$$\begin{aligned}
3^{(6^x)} &= 5^{(4^x)} && |\lg\ldots\\
6^x\cdot\lg 3 &= 4^x\cdot\lg 5 && |:4^x:\lg 3\\
\frac{6^x}{4^x} &= \frac{\lg 5}{\lg 3}\\
1{,}5^x &= \frac{\lg 5}{\lg 3} && |\log_{1,5}\ldots\\
x &= \log_{1,5}\frac{\lg 5}{\lg 3}\\
&= \frac{\lg\frac{\lg 5}{\lg 3}}{\lg 1{,}5}\\
x &\approx -0{,}941\,726\\
L &\approx \{-0{,}941\,726\}
\end{aligned}$$

### 4.3.7 Aufgabe 7

$$\begin{aligned}
45^{2x-4} &= 50^{x-2} && |\ln\ldots\\
(2x-4)\cdot\ln 45 &= (x-2)\cdot\ln 50\\
2x\cdot\ln 45-4\cdot\ln 45 &= x\cdot\ln 50-2\cdot\ln 50 && |-x\cdot\ln 50+4\cdot\ln 45\\
2x\cdot\ln 45-x\cdot\ln 50 &= 4\cdot\ln 45-2\cdot\ln 50\\
x\cdot(2\cdot\ln 45-\ln 50) &= 4\cdot\ln 45-2\cdot\ln 50 && |:(2\cdot\ln 45-\ln 50)\\
x &= \frac{4\cdot\ln 45-2\cdot\ln 50}{2\cdot\ln 45-\ln 50}\\
x &= 2\\
L &= \{2\}
\end{aligned}$$

### 4.3.8 Aufgabe 8

$$\begin{aligned}
8^{x-1} &= 7 \cdot 5^x && |\lg \ldots \\
(x-1) \cdot \lg 8 &= \lg 7 + x \cdot \lg 5 \\
x \cdot \lg 8 - \lg 8 &= \lg 7 + x \cdot \lg 5 && |+\lg 8 - x \cdot \lg 5 \\
x \cdot \lg 8 - x \cdot \lg 5 &= \lg 7 + \lg 8 \\
x \cdot (\lg 8 - \lg 5) &= \lg 7 + \lg 8 && |:(\lg 8 - \lg 5) \\
x &= \frac{\lg 7 + \lg 8}{\lg 8 - \lg 5} \\
x &\approx 8{,}564\,512 \\
L &\approx \{8{,}564\,512\}
\end{aligned}$$

### 4.3.9 Aufgabe 9

$$\begin{aligned}
(3^x)^2 &= 729 \\
3^{2x} &= 729 && |\ln \ldots \\
2x \cdot \ln 3 &= \ln 729 && |:\ln 3 \\
2x &= \frac{\ln 729}{\ln 3} && |:2 \\
x &= \frac{\ln 729}{2 \cdot \ln 3} \\
x &= 3 \\
L &= \{3\}
\end{aligned}$$

### 4.3.10 Aufgabe 10

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-5} &= \left(\frac{4}{7}\right)^{3x-2} && |\lg \ldots \\
(2x-5) \cdot \lg \tfrac{3}{5} &= (3x-2) \cdot \lg \tfrac{4}{7} \\
2x \cdot \lg \tfrac{3}{5} - 5 \cdot \lg \tfrac{3}{5} &= 3x \cdot \lg \tfrac{4}{7} - 2 \cdot \lg \tfrac{4}{7} && |+5\lg \tfrac{3}{5} - 3x \cdot \lg \tfrac{4}{7} \\
2x \cdot \lg \tfrac{3}{5} - 3x \cdot \lg \tfrac{4}{7} &= 5 \cdot \lg \tfrac{3}{5} - 2 \cdot \lg \tfrac{4}{7} \\
x \cdot (2 \cdot \lg \tfrac{3}{5} - 3 \cdot \lg \tfrac{4}{7}) &= 5 \cdot \lg \tfrac{3}{5} - 2 \cdot \lg \tfrac{4}{7} && |:(2 \cdot \lg \tfrac{3}{5} - 3 \cdot \lg \tfrac{4}{7}) \\
x &= \frac{5 \cdot \lg \frac{3}{5} - 2 \cdot \lg \frac{4}{7}}{2 \cdot \lg \frac{3}{5} - 3 \cdot \lg \frac{4}{7}} \\
x &\approx -2{,}183\,361 \\
L &\approx \{-2{,}183\,361\}
\end{aligned}$$

# 5 Lösung mit Quadratischer Gleichung

## 5.1 Grundprinzip dieses Verfahrens

Manchmal kann man die Exponentialgleichung auch so umstellen, dass man darin die Normalform für eine Quadratische Gleichung wiederfindet. Diese lässt sich dann mit der bekannten $p$-$q$-Formel[1] lösen. Mit einem Beispiel möchte ich dies erläutern.

$$4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$$

Erinnern wir uns an die $p$-$q$-Formel:

$$\boxed{x^2 + px + q = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Damit wir nicht das $x$ in der zu lösenden Exponentialgleichung mit dem $x$ in der Lösungsformel verwechseln können, ersetze ich das $x$ in der $p$-$q$-Formel mit einem $y$.

$$y^2 + py + q = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Links steht die Bezugsformel, auf die sich die Lösungsformel rechts bezieht. Vergleichen wir nun die zu lösende Exponentialgleichung mit der Bezugsformel, erkennt man schon auf den ersten Blick gewisse Ähnlichkeiten. In beiden Gleichungen steht rechts vom Gleichheitszeichen eine 0 und links vom Gleichheitszeichen stehen genau drei Terme.

In je einem der drei Terme kommt ein *absolutes Glied* vor, also ein Term, der kein $x$ (bzw. kein $x$) enthält. In der Exponentialgleichung ist das die 8, in der Bezugsformel der Parameter $q$. Diese Terme entsprechen sich. Demnach müsste gelten:

$$q = 8$$

Dann müssten sich die ersten beiden Terme ebenfalls entsprechen.

$$y^2 = 4^x$$

Daraus kann man ausrechnen, welcher Term dann $y$ entsprechen müsste.

$$\begin{array}{rcll} y^2 & = & 4^x & |\sqrt{\cdots} \\ y & = & \sqrt{4^x} & \\ & = & \sqrt{(2^2)^x} & \\ & = & \sqrt{(2^x)^2} & \\ y & = & 2^x & \end{array}$$

Anmerkung: Eigentlich müsste man beim Wurzelziehen auch die **negative** Wurzel in Betracht ziehen, also $y = \pm\sqrt{4^x}$. Ich möchte an dieser Stelle aber auf eine Begründung

[1] Einzelheiten zur $p$-$q$-Formel siehe beispielsweise hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf

verzichten, warum man sich das sparen kann.

Wenn wir die Substitution $y = 2^x$ durchführen, dann müssen sich die beiden mittleren Terme in der Exponentialgleichung und in der Bezugsformel entsprechen. **Wenn das nicht der Fall sein sollte, dann wäre das angepeilte Lösungsverfahren nicht anwendbar!** Daher prüfen wir das nun.

$$\begin{aligned} py &= 9 \cdot 2^x && \mid \text{substituieren} \\ p \cdot 2^x &= 9 \cdot 2^x && \mid : 2^x \\ p &= 9 \end{aligned}$$

<u>Anmerkung:</u> Die Division durch $2^x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ zulässig, da $2^x$ niemals Null werden kann.

Wir sehen, dass sich die beiden Terme mit $p = 9$ entsprechen. Daher können wir die gegebene Exonentialgleichung mit der Substitution $2^x = y$ in eine Quadratische Gleichung umwandeln und dann nach $y$ auflösen.

$$\begin{aligned} 4^x - 9 \cdot 2^x + 8 &= 0 && \mid \text{Substitution } 2^x = y \\ y^2 - 9y + 8 &= 0 && \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\ y_{1/2} &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 8} \\ &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{32}{4}} \\ &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} \\ &= \frac{9}{2} \pm \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$y_1 = \frac{16}{2} = 8 \qquad y_2 = \frac{2}{2} = 1$$

Jetzt kann mit beiden Ergebnissen zurücksubstituiert werden.

$$\begin{aligned} 2^{x_1} &= y_1 \\ 2^{x_1} &= 8 && \mid \log_2 \ldots \\ x_1 &= \log_2 8 \\ x_1 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{x_2} &= y_2 \\ 2^{x_2} &= 1 && \mid \log_2 \ldots \\ x_2 &= \log_2 1 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Wir erhalten die Lösungsmenge:

$$L = \{0; 3\}$$

Es folgt ein weiteres, etwas komplizierteres Beispiel.

$$2^{2(x+1)} + 16 = 65 \cdot 2^x$$

Eine Ähnlichkeit zur Bezugsformel der $p$-$q$-Formel ist zunächst nicht erkennbar. Daher wird die Gleichung zunächst etwas umgeformt.

$$\begin{aligned}
2^{2(x+1)} + 16 &= 65 \cdot 2^x \qquad | - 65 \cdot 2^x \\
2^{2(x+1)} + 16 - 65 \cdot 2^x &= 0 \\
2^{2x+2} - 65 \cdot 2^x + 16 &= 0 \\
2^{2x} \cdot 2^2 - 65 \cdot 2^x + 16 &= 0 \qquad | : 4 \\
2^{2x} - \frac{65}{4} \cdot 2^x + 4 &= 0 \\
(2^x)^2 - \frac{65}{4} \cdot 2^x + 4 &= 0
\end{aligned}$$

Jetzt kann substituiert werden: $y = 2^x$

$$\begin{aligned}
(2^x)^2 - \frac{65}{4} \cdot 2^x + 4 &= 0 \\
y^2 - \frac{65}{4} \cdot y + 4 &= 0 \qquad | \ p\text{-}q\text{-Formel} \\
y_{1/2} &= \frac{65}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{65}{8}\right)^2 - 4} \\
&= \frac{65}{8} \pm \sqrt{\frac{4\,225}{64} - \frac{256}{64}} \\
&= \frac{65}{8} \pm \frac{63}{8}
\end{aligned}$$

$$y_1 = \frac{65}{8} + \frac{63}{8} = \frac{128}{8} = 16 \qquad y_2 = \frac{65}{8} - \frac{63}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Jetzt kann zurück substituiert werden.

$$\begin{aligned}
2^{x_1} &= y_1 \\
2^{x_1} &= 16 \qquad | \log_2 \ldots \\
x_1 &= \log_2 16 \\
x_1 &= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2^{x_2} &= y_2 \\
2^{x_2} &= \frac{1}{4} \qquad | \log_2 \ldots \\
x_2 &= \log_2 \frac{1}{4} \\
x_2 &= -2
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge lautet:

$$L = \{-2; 4\}$$

## 5.2 Übungsaufgaben zum Lösungsverfahren „Quadratische Gleichung“

Damit die Lösung schnell geprüft werden kann, steht bei jeder Aufgabe die Lösungsmenge direkt mit dabei. Komplette Lösungen mit Lösungsweg befinden sich in einem eigenen nachfolgenden Kapitel.

### 5.2.1 Aufgabe 1

$$2^x + 8 \cdot 2^{-x} = 6$$
$$L = \{1; 2\}$$

### 5.2.2 Aufgabe 2

$$18 \cdot 2^x = 48 - 3 \cdot 4^x$$
$$L = \{1\}$$

### 5.2.3 Aufgabe 3

$$6^{x+1} + 6^{1-x} = 37$$
$$L = \{-1; 1\}$$

### 5.2.4 Aufgabe 4

$$2 \cdot 16^x = 7\,552 + 10 \cdot 4^x$$
$$L = \{3\}$$

### 5.2.5 Aufgabe 5

$$7x^{\lg x} = 15{,}75$$
$$L \approx \{0{,}255\,005\,956; 3{,}921\,477\,036\}$$

## 5.3 Komplette Lösungswege zu den Übungsaufgaben zum Lösungsverfahren „Quadratische Gleichung“

### 5.3.1 Aufgabe 1

$$
\begin{array}{rcll}
2^x + 8 \cdot 2^{-x} & = & 6 & | \cdot 2^x \\
(2^x)^2 + 8 & = & 6 \cdot 2^x & | - 6 \cdot 2^x \\
(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 & = & 0 & | \text{ Subst. } 2^x = y \\
y^2 - 6y + 8 & = & 0 & | \; p\text{-}q\text{-Formel} \\
y_{1/2} & = & 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} & \\
y_{1/2} & = & 3 \pm 1 & \\
y_1 = 3 + 1 = 4 & & y_2 = 3 - 1 = 2 & | \text{ zurück subst.} \\
2^{x_1} & = & y_1 & \\
2^{x_1} & = & 4 & | \log_2 \ldots \\
x_1 & = & \log_2 4 & \\
x_1 & = & 2 & \\
2^{x_2} & = & y_2 & \\
2^{x_2} & = & 2 & | \log_2 \ldots \\
x_2 & = & \log_2 2 & \\
x_2 & = & 1 & \\
L & = & \{1; 2\} &
\end{array}
$$

### 5.3.2 Aufgabe 2

$$
\begin{array}{rcll}
18 \cdot 2^x & = & 48 - 3 \cdot 4^x & \\
18 \cdot 2^x & = & 48 - 3 \cdot (2^2)^x & \\
18 \cdot 2^x & = & 48 - 3 \cdot (2^x)^2 & | + 3 \cdot (2^x)^2 - 48 \\
3 \cdot (2^x)^2 + 18 \cdot 2^x - 48 & = & 0 & | : 3 \\
(2^x)^2 + 6 \cdot 2^x - 16 & = & 0 & | \text{ Subst. } 2^x = y \\
y^2 + 6y - 16 & = & 0 & | \; p\text{-}q\text{-Formel} \\
y_{1/2} & = & -3 \pm \sqrt{3^2 + 16} & \\
y_{1/2} & = & -3 \pm 5 & \\
y_1 = -3 + 5 = 2 & & y_2 = -3 - 5 = -8 & | \text{ zurück subst.} \\
2^{x_1} & = & y_1 & \\
2^{x_1} & = & 2 & | \log_2 \ldots \\
x_1 & = & \log_2 2 & \\
x_1 & = & 1 & \\
2^{x_2} & = & y_2 & \\
2^{x_2} & = & -8 & | \log_2 \ldots \\
x_2 & = & \log_2(-8) & \text{(keine Lös.)} \\
L & = & \{1\} &
\end{array}
$$

### 5.3.3 Aufgabe 3

$$
\begin{array}{rcll}
6^{x+1}+6^{1-x} &=& 37 & \\
6^x\cdot 6+6\cdot 6^{-x} &=& 37 & |\cdot 6^x \\
6\cdot(6^x)^2+6 &=& 37\cdot 6^x & |-37\cdot 6^x \\
6\cdot(6^x)^2-37\cdot 6^x+6 &=& 0 & |\text{ Subst. } 6^x=y \\
6y^2-37y+6 &=& 0 & |:6 \\
y^2-\frac{37}{6}+1 &=& 0 & |\ p\text{-}q\text{-Formel} \\
y_{1/2} &=& \frac{37}{12}\pm\sqrt{\frac{1\,369}{144}-\frac{144}{144}} & \\
&=& \frac{37}{12}\pm\sqrt{\frac{1\,225}{144}} & \\
&=& \frac{37}{12}\pm\frac{35}{12} & \\
y_1=\frac{37}{12}+\frac{35}{12}=6 && y_2=\frac{37}{12}-\frac{35}{12}=\frac{1}{6} & |\text{ zurück subst.} \\
6^{x_1} &=& y_1 & \\
6^{x_1} &=& 6 & |\log_6\ldots \\
x_1 &=& \log_6 6 & \\
x_1 &=& 1 & \\
6^{x_2} &=& y_2 & \\
6^{x_2} &=& \frac{1}{6} & |\log_6\ldots \\
x_2 &=& \log_6\frac{1}{6} & \\
x_2 &=& -1 & \\
L &=& \{-1;1\} &
\end{array}
$$

### 5.3.4 Aufgabe 4

$$\begin{array}{rcll}
2\cdot 16^x &=& 7\,552+10\cdot 4^x & \\
2\cdot (4^2)^x &=& 7\,552+10\cdot 4^x & |-7\,552-10\cdot 4^x \\
2\cdot (4^x)^2-10\cdot 4^x-7\,552 &=& 0 & |:2 \\
(4^x)^2-5\cdot 4^x-3\,776 &=& 0 & |\text{ Subst. } 4^x=y \\
y^2-5y-3\,776 &=& 0 & |\ p\text{-}q\text{-Formel} \\
y_{1/2} &=& \frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{15\,104}{4}} & \\
 &=& \frac{5}{2}\pm\frac{123}{2} & \\
y_1=\frac{5+123}{2}=64 & & y_2=\frac{5-123}{2}=-59 & |\text{ zurück subst.} \\
4^{x_1} &=& y_1 & \\
4^{x_1} &=& 64 & |\log_4\ldots \\
x_1 &=& \log_4 64 & \\
x_1 &=& 3 & \\
4^{x_2} &=& y_2 & \\
4^{x_2} &=& -59 & |\log_4\ldots \\
x_2 &=& \log_4 -59 & |\text{ keine Lösung} \\
L &=& \{3\} &
\end{array}$$

### 5.3.5 Aufgabe 5

$$\begin{array}{rcll}
7x^{\lg x} &=& 15{,}75 & |:7 \\
x^{\lg x} &=& 2{,}25|\log_x\ldots & \\
\lg x &=& \log_x 2{,}25 & \\
\lg x &=& \frac{\lg 2{,}25}{\lg x} & |\cdot\lg x \\
(\lg x)^2 &=& \lg 2{,}25 & |\text{ Subst.: } \lg x=y \\
y^2 &=& \lg 2{,}25 & |\sqrt{\ldots} \\
y_{1/2} &=& \pm\sqrt{\lg 2{,}25} & \\
y_{1/2} &\approx& \pm 0{,}593\,449\,676 & |\text{zurück subst.} \\
\lg x_{1/2} &\approx& \pm 0{,}593\,449\,676 & |10^{\cdots} \\
x_1\approx 10^{0{,}593\,449\,676}\approx 3{,}921\,477\,036 & & x_2\approx 10^{-0{,}593\,449\,676}\approx 0{,}255\,005\,956 &
\end{array}$$

# 6 Gemischte Übungsaufgaben

Hier folgen noch einige Übungsaufgaben ohne Hinweis, welche Lösungsmethode angebracht ist. Manchmal sind mehrere Lösungswege möglich, manchmal auch nicht.

## 6.1 Aufgabenstellungen der gemischten Aufgaben mit Ergebnis

### 6.1.1 Aufgabe 1

$$\left(\frac{13}{17}\right)^{2x-5} = \left(\frac{17}{13}\right)^{5x-9}$$
$$L = \{2\}$$

### 6.1.2 Aufgabe 2

$$\sqrt[x+12]{81^{x+2}} = \frac{1}{3}$$
$$L = \{-4\}$$

### 6.1.3 Aufgabe 3

$$7 \cdot \sqrt{5^{x-2}} = \sqrt[3]{35^{x+1}}$$
$$L \approx \{-2{,}230\,942\}$$

### 6.1.4 Aufgabe 4

$$20 \cdot 2^{2x} - 64 = 4^{2x}$$
$$L = \{1; 2\}$$

### 6.1.5 Aufgabe 5

$$4^{x+3} + 5^{x+2} = 5^{x+3} - 4^{x+2}$$
$$L = \{-1\}$$

### 6.1.6 Aufgabe 6

$$7x^{\lg x} = 15{,}75$$
$$L \approx \{0{,}255\,006; 3{,}921\,477\}$$

### 6.1.7 Aufgabe 7

$$\sqrt[x]{25^{x+3}} = 5$$
$$L = \{-6\}$$

### 6.1.8 Aufgabe 8

$$\left(2 \cdot 3^{2x-3}\right)^2 = 4 \cdot 9^{x-1}$$
$$L = \{2\}$$

### 6.1.9 Aufgabe 9

$$\sqrt[3]{243} \cdot \sqrt{27^{x-3}} = 81 \cdot \sqrt[5]{729^{4-11x}}$$
$$L = \{\frac{349}{441}\}$$

### 6.1.10 Aufgabe 10

$$29{,}791^{\frac{1}{x-2}} = 3{,}1^x$$
$$L = \{-1; 3\}$$

### 6.1.11 Aufgabe 11

$$2^{3x-1} - 3^{x+1} = 3^{x-1} - 2^{3x-1}$$
$$L \approx \{1{,}227\,505\}$$

### 6.1.12 Aufgabe 12

$$33 \cdot 2^x = 8 + 4 \cdot 2^{2x}$$
$$L = \{-2; 3\}$$

### 6.1.13 Aufgabe 13

$$8 \cdot 6^{4x-3} = 12 + 36^{4x-3}$$
$$L = \{0{,}846\,713; 1\}$$

### 6.1.14 Aufgabe 14

$$\left(24^{x+4}\right)^{x+7} = \left(24^{x+1}\right)^{2x+4}$$
$$L = \{-3; 8\}$$

### 6.1.15 Aufgabe 15

$$3 \cdot 2^{x+2} = 1 + 4 \cdot 2^{2x+3}$$
$$L = \{-3; -2\}$$

## 6.2 Komplette Lösungswege zu den Aufgabenstellungen der gemischten Aufgaben

### 6.2.1 Aufgabe 1

$$\left(\frac{13}{17}\right)^{2x-5} = \left(\frac{17}{13}\right)^{5x-9}$$

Hier ist sowohl die Lösung durch Koeffizientenvergleich als auch durch logarithmische Berechnung möglich.

**Lösungsvariante 1:**

$$\begin{array}{rcll}
\left(\frac{13}{17}\right)^{2x-5} & = & \left(\frac{17}{13}\right)^{5x-9} & \\
\left(\frac{13}{17}\right)^{2x-5} & = & \left(\left(\frac{13}{17}\right)^{-1}\right)^{5x-9} & \\
\left(\frac{13}{17}\right)^{2x-5} & = & \left(\frac{13}{17}\right)^{-(5x-9)} & \mid \text{Koeffizientenvergleich} \\
2x-5 & = & -(5x-9) & \\
2x-5 & = & -5x+9 & \mid +5+5x \\
7x & = & 14 & \mid :7 \\
x & = & 2 & \\
L & = & \{2\} &
\end{array}$$

**Lösungsvariante 2:**

$$\begin{array}{rcll}
\left(\frac{13}{17}\right)^{2x-5} & = & \left(\frac{17}{13}\right)^{5x-9} & \mid \lg \ldots \\
(2x-5)\cdot\lg\frac{13}{17} & = & (5x-9)\cdot\lg\frac{17}{13} & \\
2x\cdot\lg\frac{13}{17}-5\cdot\lg\frac{13}{17} & = & 5x\cdot\lg\frac{17}{13}-9\cdot\lg\frac{17}{13} & \mid +5\cdot\lg\frac{13}{17}-5x\cdot\lg\frac{17}{13} \\
2x\cdot\lg\frac{13}{17}-5x\cdot\lg\frac{17}{13} & = & 5\cdot\lg\frac{13}{17}-9\cdot\lg\frac{17}{13} & \\
x\cdot\left(2\cdot\lg\frac{13}{17}-5\cdot\lg\frac{17}{13}\right) & = & 5\cdot\lg\frac{13}{17}-9\cdot\lg\frac{17}{13} & \mid :\left(2\cdot\lg\frac{13}{17}-5\cdot\lg\frac{17}{13}\right) \\
x & = & \dfrac{5\cdot\lg\frac{13}{17}-9\cdot\lg\frac{17}{13}}{2\cdot\lg\frac{13}{17}-5\cdot\lg\frac{17}{13}} & \\
x & = & 2 & \\
L & = & \{2\} &
\end{array}$$

### 6.2.2 Aufgabe 2

$$\sqrt[x+12]{81^{x+2}} = \frac{1}{3}$$

Auch hier ist sowohl die Lösung durch Koeffizientenvergleich als auch durch logarithmische Berechnung möglich.

**Lösungsvariante 1:**

$$\begin{aligned}
\sqrt[x+12]{81^{x+2}} &= \frac{1}{3} \\
81^{\frac{x+2}{x+12}} &= \frac{1}{3} \\
(3^4)^{\frac{x+2}{x+12}} &= 3^{-1} \\
3^{4\cdot\frac{x+2}{x+12}} &= 3^{-1} && \mid \text{Koeffizientenvergleich} \\
4 \cdot \frac{x+2}{x+12} &= -1 && \mid \cdot (x+12) \\
4 \cdot (x+2) &= -(x+12) \\
4x+8 &= -x-12 && \mid +x-8 \\
5x &= -20 && \mid :5 \\
x &= -4 \\
L &= \{-4\}
\end{aligned}$$

**Lösungsvariante 2:**

$$\begin{aligned}
\sqrt[x+12]{81^{x+2}} &= \frac{1}{3} \\
81^{\frac{x+2}{x+12}} &= \frac{1}{3} && \mid \ln\ldots \\
\frac{x+2}{x+12} \cdot \ln 81 &= \ln\frac{1}{3} && \mid \cdot (x+12) \\
(x+2) \cdot \ln 81 &= (x+12) \cdot \ln\frac{1}{3} \\
x \cdot \ln 81 + 2 \cdot \ln 81 &= x \cdot \ln\frac{1}{3} + 12 \cdot \ln\frac{1}{3} && \mid -2 \cdot \ln 81 - x \cdot \ln\frac{1}{3} \\
x \cdot \ln 81 - x \cdot \ln\frac{1}{3} &= 12 \cdot \ln\frac{1}{3} - 2 \cdot \ln 81 \\
x \cdot \left(\ln 81 - \ln\frac{1}{3}\right) &= 12 \cdot \ln\frac{1}{3} - 2 \cdot \ln 81 && \mid : \left(\ln 81 - \ln\frac{1}{3}\right) \\
x &= \frac{12 \cdot \ln\frac{1}{3} - 2 \cdot \ln 81}{\ln 81 - \ln\frac{1}{3}} \\
x &= -4 \\
L &= \{-4\}
\end{aligned}$$

### 6.2.3 Aufgabe 3

$$7 \cdot \sqrt{5^{x-2}} = \sqrt[3]{35^{x+1}}$$

Hier hilft nur die logarithmische Berechnung weiter.

$$\begin{aligned}
7 \cdot \sqrt{5^{x-2}} &= \sqrt[3]{35^{x+1}} \\
7 \cdot 5^{\frac{x-2}{2}} &= 35^{\frac{x+1}{3}} && |\lg\ldots \\
\lg 7 + \frac{x-2}{2} \cdot \lg 5 &= \frac{x+1}{3} \cdot \lg 35 && |\cdot 6 \\
6 \cdot \lg 7 + 3 \cdot (x-2) \cdot \lg 5 &= 2 \cdot (x+1) \cdot \lg 35 \\
6 \cdot \lg 7 + (3x-6) \cdot \lg 5 &= (2x+2) \cdot \lg 35 \\
6 \cdot \lg 7 + 3x \cdot \lg 5 - 6 \cdot \lg 5 &= 2x \cdot \lg 35 + 2 \cdot \lg 35 && |-6 \cdot \lg 7 + 6 \cdot \lg 5 - 2x \cdot \lg 35 \\
3x \cdot \lg 5 - 2x \cdot \lg 35 &= 2 \cdot \lg 35 - 6 \cdot \lg 7 + 6 \cdot \lg 5 \\
x \cdot (3 \cdot \lg 5 - 2 \cdot \lg 35) &= 2 \cdot \lg 35 - 6 \cdot \lg 7 + 6 \cdot \lg 5 && |:(3 \cdot \lg 5 - 2 \cdot \lg 35) \\
x &= \frac{2 \cdot \lg 35 - 6 \cdot \lg 7 + 6 \cdot \lg 5}{3 \cdot \lg 5 - 2 \cdot \lg 35} \\
x &= -2{,}230\,942 \\
L &\approx \{-2{,}230\,942\}
\end{aligned}$$

### 6.2.4 Aufgabe 4

$$20 \cdot 2^{2x} - 64 = 4^{2x}$$

Diese Gleichung lässt sich auf eine Quadratische Gleichung zurückführen.

$$\begin{aligned}
20 \cdot 2^{2x} - 64 &= 4^{2x} \\
20 \cdot 2^{2x} - 64 &= (2^2)^{2x} \\
20 \cdot 2^{2x} - 64 &= (2^{2x})^2 && |\text{ Substitution } 2^{2x} = y \\
20 \cdot y - 64 &= y^2 && |-y^2 \\
-y^2 + 20y - 64 &= 0 && |\cdot(-1) \\
y^2 - 20y + 64 &= 0 && |\ p\text{-}q\text{-Formel} \\
y_{1/2} &= 10 \pm \sqrt{10^2 - 64} \\
y_{1/2} &= 10 \pm 6 \\
y_1 = 10 + 6 = 16 & \quad\ \ y_2 = 10 - 6 = 4 && |\text{ Zurücksubstituieren} \\
2^{2x_1} &= y_1 \\
2^{2x_1} &= 16 \\
2^{2x_1} &= 2^4 && |\text{ Koeffizientenvergleich} \\
2x_1 &= 4 && |:2 \\
x_1 &= 2 \\
2^{2x_2} &= y_2 \\
2^{2x_2} &= 4 \\
2^{2x_2} &= 2^2 && |\text{ Koeffizientenvergleich} \\
2x_2 &= 2 && |:2 \\
x_2 &= 1 \\
L &= \{1; 2\}
\end{aligned}$$

### 6.2.5 Aufgabe 5

$$4^{x+3} + 5^{x+2} = 5^{x+3} - 4^{x+2}$$

Hier hilft die logarithmische Rechnung.

$$\begin{aligned}
4^{x+3} + 5^{x+2} &= 5^{x+3} - 4^{x+2} && | - 5^{x+2} + 4^{x+2} \\
4^{x+3} + 4^{x+2} &= 5^{x+3} - 5^{x+2} \\
4^x \cdot 4^3 + 4^x \cdot 4^2 &= 5^x \cdot 5^3 - 5^x \cdot 5^2 \\
64 \cdot 4^x + 16 \cdot 4^x &= 125 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x \\
80 \cdot 4^x &= 100 \cdot 5^x && | \ln \ldots \\
\ln 80 + x \cdot \ln 4 &= \ln 100 + x \cdot \ln 5 && | - \ln 80 - x \cdot \ln 5 \\
x \cdot \ln 4 - x \cdot \ln 5 &= \ln 100 - \ln 80 \\
x \cdot (\ln 4 - \ln 5) &= \ln 100 - \ln 80 && | : (\ln 4 - \ln 5) \\
x &= \frac{\ln 100 - \ln 80}{\ln 4 - \ln 5} \\
x &= -1 \\
L &= \{-1\}
\end{aligned}$$

### 6.2.6 Aufgabe 6

$$7x^{\lg x} = 15{,}75$$

Hier ist nicht sofort klar, welches Verfahren passen könnte. Deshalb wird hier erst einmal umgeformt.

$$\begin{aligned}
7x^{\lg x} &= 15{,}75 && | : 7 \\
x^{\lg x} &= 2{,}25 && | \lg \ldots \\
(\lg x) \cdot (\lg x) &= \lg 2{,}25 \\
(\lg x)^2 &= \lg 2{,}25
\end{aligned}$$

Spätestens an dieser Stelle wird klar, dass es auf eine Quadratische Gleichung hinausläuft. Wir substituieren: $\lg x = y$.

$$\begin{aligned}
y^2 &= \lg 2{,}25 \\
y_{1/2} &= \pm\sqrt{\lg 2{,}25} \\
y_1 = \sqrt{\lg 2{,}25} & \qquad y_2 = -\sqrt{\lg 2{,}25} && | \text{ zurück substituieren} \\
\lg x_1 &= y_1 \\
\lg x_1 &= \sqrt{\lg 2{,}25} && |10^{\cdots} \\
x_1 &= 10^{\sqrt{\lg 2{,}25}} \\
x_1 &\approx 3{,}921\,477 \\
\lg x_2 &= y_2 \\
\lg x_2 &= -\sqrt{\lg 2{,}25} && |10^{\cdots} \\
x_2 &= 10^{-\sqrt{\lg 2{,}25}} \\
x_2 &\approx 0{,}255\,006 \\
L &\approx \{0{,}255\,006; 3{,}921\,477\}
\end{aligned}$$

### 6.2.7 Aufgabe 7

$$\sqrt[x]{25^{x+3}} = 5$$

Hier sind wieder die ersten beiden Verfahren möglich.

#### Lösungsvariante 1:

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt[x]{25^{x+3}} & = & 5 & \\
25^{\frac{x+3}{x}} & = & 5 & \\
(5^2)^{\frac{x+3}{x}} & = & 5 & \\
5^{2\cdot\frac{x+3}{x}} & = & 5^1 & \mid \text{Koeffizientenvergleich} \\
2\cdot\frac{x+3}{x} & = & 1 & \mid \cdot x \\
2\cdot(x+3) & = & x & \\
2x+6 & = & x & \mid -6-x \\
x & = & -6 & \\
L & = & \{-6\} &
\end{array}$$

#### Lösungsvariante 2:

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt[x]{25^{x+3}} & = & 5 & \\
25^{\frac{x+3}{x}} & = & 5 & \mid \ln\ldots \\
\dfrac{x+3}{x}\cdot\ln 25 & = & \ln 5 & \mid \cdot x \\
x\cdot\ln 25 + 3\cdot\ln 25 & = & x\cdot\ln 5 & \mid -3\cdot\ln 25 - x\cdot\ln 5 \\
x\cdot\ln 25 - x\cdot\ln 5 & = & -3\cdot\ln 25 & \\
x\cdot(\ln 25-\ln 5) & = & -3\cdot\ln 25 & \mid : (\ln 25 - \ln 5) \\
x & = & \dfrac{-3\cdot\ln 25}{\ln 25-\ln 5} & \\
x & = & -6 & \\
L & = & \{-6\} &
\end{array}$$

### 6.2.8 Aufgabe 8

$$\left(2\cdot 3^{2x-3}\right)^2 = 4\cdot 9^{x-1}$$

Das Verfahren mit Koeffizientenvergleich bietet sich sehr an.

$$\begin{array}{rcll}
\left(2\cdot 3^{2x-3}\right)^2 & = & 4\cdot 9^{x-1} & \\
4\cdot 3^{2\cdot(2x-3)} & = & 4\cdot 9^{x-1} & \mid : 4 \\
9^{2x-3} & = & 9^{x-1} & \mid \text{Koeffizientenvergleich} \\
2x-3 & = & x-1 & \mid +3-x \\
x & = & 2 & \\
L & = & \{2\} &
\end{array}$$

### 6.2.9 Aufgabe 9

$$\sqrt[3]{243}\cdot\sqrt{27^{x-3}} = 81\cdot\sqrt[5]{729^{4-11x}}$$

Hier sind wieder die beiden ersten Verfahren möglich. Der Koeffizientenvergleich ist meines Erachtens jedoch etwas einfacher, wenn man erkennt, dass alle als Basen vorkommenden Zahlen Dreierpotenzen sind.

**Lösungsvariante 1:**

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt[3]{243}\cdot\sqrt{27^{x-3}} &=& 81\cdot\sqrt[5]{729^{4-11x}} & \\
\sqrt[3]{3^5}\cdot\sqrt{\left(3^3\right)^{x-3}} &=& 3^4\cdot\sqrt[5]{\left(3^6\right)^{4-11x}} & \\
3^{\frac{5}{3}}\cdot 3^{\frac{3\cdot(x-3)}{2}} &=& 3^4\cdot 3^{\frac{6\cdot(4-11x)}{5}} & \\
3^{\frac{5}{3}+\frac{3\cdot(x-3)}{2}} &=& 3^{4+\frac{6\cdot(4-11x)}{5}} & \mid \text{Koeffizientenvergleich} \\
\frac{5}{3}+\frac{3\cdot(x-3)}{2} &=& 4+\frac{6\cdot(4-11x)}{5} & \mid \cdot 30 \\
10\cdot 5+15\cdot 3\cdot(x-3) &=& 30\cdot 4+6\cdot 6\cdot(4-11x) & \\
50+45x-135 &=& 120+144-396x & \\
45x-85 &=& 264-396x & \mid +85+396x \\
411x &=& 349 & \mid :411 \\
x &=& \frac{349}{441} & \\
L &=& \left\{\frac{349}{441}\right\} &
\end{array}$$

**Lösungsvariante 2:**

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt[3]{243}\cdot\sqrt{27^{x-3}} &=& 81\cdot\sqrt[5]{729^{4-11x}} & \\
243^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{\frac{x-3}{2}} &=& 81\cdot 729^{\frac{4-11x}{5}} & \mid \lg\ldots \\
\frac{1}{3}\cdot\lg 243+\frac{x-3}{2}\cdot\lg 27 &=& \lg 81+\frac{4-11x}{5}\cdot\lg 729 & \mid\cdot 30 \\
10\cdot\lg 243+15\cdot(x-3)\cdot\lg 27 &=& 30\cdot\lg 81+6\cdot(4-11x)\cdot\lg 729 & \\
10\cdot\lg 243+15x\cdot\lg 27-45\cdot\lg 27 &=& 30\cdot\lg 81+24\cdot\lg 729-66x\cdot\lg 729 & \mid -10\cdot\lg 243+45\cdot\lg 27+66x\cdot\lg 729 \\
15x\cdot\lg 27+66x\cdot\lg 729 &=& 30\cdot\lg 81+24\cdot\lg 729-10\cdot\lg 243+45\cdot\lg 27 & \\
x\cdot(15\cdot\lg 27+66\cdot\lg 729) &=& 30\cdot\lg 81+24\cdot\lg 729-10\cdot\lg 243+45\cdot\lg 27 & \mid :(15\cdot\lg 27+66\cdot\lg 729) \\
x &=& \frac{30\cdot\lg 81+24\cdot\lg 729-10\cdot\lg 243+45\cdot\lg 27}{15\cdot\lg 27+66\cdot\lg 729} & \\
x &\approx& 0{,}791\,383 & \\
L &\approx& \{0{,}791\,383\} &
\end{array}$$

Anmerkung: Bei der Methode des Koeffizientenvergleiches kommt man zu einer exakten Lösung (der Bruch $\frac{349}{441}$), während man bei der Methode des Logarithmierens nur zu einer Näherungslösung ($\frac{349}{441}\approx 0{,}791\,383$) kommt.

### 6.2.10 Aufgabe 10

$$29{,}791^{\frac{1}{x-2}} = 3{,}1^x$$

Auch hier ist nicht sofort klar, welche Methode wohl weiter hilft. Also wird erst einmal logarithmiert.

$$\begin{array}{rcll}
29{,}791^{\frac{1}{x-2}} &=& 3{,}1^x & |\ln\ldots \\
\frac{1}{x-2}\cdot\ln 29{,}791 &=& x\cdot\ln 3{,}1 & |\cdot(x-2) \\
\ln 29{,}791 &=& (x^2-2x)\cdot\ln 3{,}1 & \\
\ln 29{,}791 &=& x^2\cdot\ln 3{,}1 - 2x\cdot\ln 3{,}1 & |-x^2\cdot\ln 3{,}1+2x\cdot\ln 3{,}1 \\
-x^2\cdot\ln 3{,}1+2x\cdot\ln 3{,}1+\ln 29{,}791 &=& 0 & |:(-\ln 3{,}1) \\
x^2-2x-\frac{\ln 29{,}791}{\ln 3{,}1} &=& 0 & \\
x^2-2x-3 &=& 0 & |\ p\text{-}q\text{-Formel} \\
x_{1/2} &=& 1\pm\sqrt{1^2+3} & \\
&=& 1\pm 2 & \\
x_1=1+2=3 && x_2=1-2=-1 & \\
L &=& \{-1;3\} &
\end{array}$$

<u>Anmerkung:</u> Die Quadratische Gleichung ergab sich hier ganz von allein, ohne Sustitution.

### 6.2.11 Aufgabe 11

$$2^{3x-1}-3^{x+1} = 3^{x-1}-2^{3x-1}$$

Da auch hier nicht sofort ersichtlich ist, welche Methode weiter hilft, werden zunächst die Potenzen aufgelöst und zusammengefasst.

$$\begin{array}{rcll}
2^{3x-1}-3^{x+1} &=& 3^{x-1}-2^{3x-1} & \\
2^{3x}\cdot 2^{-1}-3^x\cdot 3 &=& 3^x\cdot 3^{-1}-2^{3x}\cdot 2^{-1} & \\
\frac{1}{2}\cdot 2^{3x}-3\cdot 3^x &=& \frac{1}{3}\cdot 3^x-\frac{1}{2}\cdot 2^{3x} & |+3\cdot 3^x+\frac{1}{2}\cdot 2^{3x} \\
\frac{1}{2}\cdot 2^{3x}+\frac{1}{2}\cdot 2^{3x} &=& \frac{1}{3}\cdot 3^x+3\cdot 3^x & \\
2^{3x} &=& \frac{10}{3}\cdot 3^x & |\lg\ldots \\
3x\cdot\lg 2 &=& \lg\frac{10}{3}+x\cdot\lg 3 & |-x\cdot\lg 3 \\
3x\cdot\lg 2-x\cdot\lg 3 &=& \lg\frac{10}{3} & \\
x\cdot(3\cdot\lg 2-\lg 3) &=& \lg\frac{10}{3} & |:(3\cdot\lg 2-\lg 3) \\
x &=& \frac{\lg\frac{10}{3}}{3\cdot\lg 2-\lg 3} & \\
x &\approx& 1{,}227\,505 & \\
L &\approx& \{1{,}227\,505\} &
\end{array}$$

### 6.2.12 Aufgabe 12

$$33 \cdot 2^x = 8 + 4 \cdot 2^{2x}$$

Weil wir hier drei Terme haben und außerdem in einer Zweierpotenz die Variable gegenüber der anderen Zweierpotenz verdoppelt ist, liegt die Methode mit Quadratischer Gleichung sehr nahe.

$$\begin{array}{rcll}
33 \cdot 2^x &=& 8 + 4 \cdot 2^{2x} & \\
33 \cdot 2^x &=& 8 + 4 \cdot (2^x)^2 & \mid -8 - 4 \cdot (2^x)^2 \\
33 \cdot 2^x - 8 - 4 \cdot (2^x)^2 &=& 0 & \mid : (-4) \\
-\dfrac{33}{4} \cdot 2^x + 2 + (2^x)^2 &=& 0 & \\
(2^x)^2 - \dfrac{33}{4} \cdot 2^x + 2 &=& 0 & \mid \text{Substitution: } 2^x = y \\
y^2 - \dfrac{33}{4} y + 2 &=& 0 & \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\
y_{1/2} &=& \dfrac{33}{8} \pm \sqrt{\dfrac{1\,089}{64} - \dfrac{128}{64}} & \\
&=& \dfrac{33}{8} \pm \dfrac{31}{8} & \\
y_1 = \dfrac{33}{8} + \dfrac{31}{8} = 8 && y_2 = \dfrac{33}{8} - \dfrac{31}{8} = \dfrac{1}{4} & \mid \text{zurück substituieren} \\
2^{x_1} &=& y_1 & \\
2^{x_1} &=& 8 & \\
2^{x_1} &=& 2^3 & \mid \log_2 \ldots \\
x_1 &=& 3 & \\
2^{x_2} &=& y_2 & \\
2^{x_2} &=& \dfrac{1}{4} & \\
2^{x_2} &=& 2^{-2} & \mid \log_2 \ldots \\
x_2 &=& -2 & \\
L &=& \{-2; 3\} &
\end{array}$$

### 6.2.13 Aufgabe 13

$$8 \cdot 6^{4x-3} = 12 + 36^{4x-3}$$

Auch hier kann man eine Quadratische Gleichung vermuten.

$$\begin{array}{rcll}
8 \cdot 6^{4x-3} &=& 12 + 36^{4x-3} & |-12-36^{4x-3} \\
8 \cdot 6^{4x-3} - 12 - 36^{4x-3} &=& 0 & |\cdot(-1) \\
-8 \cdot 6^{4x-3} + 12 + 36^{4x-3} &=& 0 & \\
36^{4x-3} - 8 \cdot 6^{4x-3} + 12 &=& 0 & \\
\left(6^{4x-3}\right)^2 - 8 \cdot 6^{4x-3} + 12 &=& 0 & |\text{ Substitution: } 6^{4x-3} = y \\
y^2 - 8y + 12 &=& 0 & |\ p\text{-}q\text{-Formel} \\
y_{1/2} &=& 4 \pm \sqrt{4^2 - 12} & \\
y_{1/2} &=& 4 \pm 2 & \\
y_1 = 4 + 2 = 6 && y_2 = 4 - 2 = 2 & |\text{ zurück substituieren} \\
6^{4x_1-3} &=& y_1 & \\
6^{4x_1-3} &=& 6 = 6^1 & \\
4x_1 - 3 &=& 1 & |+3 \\
4x_1 &=& 4 & |:4 \\
x_1 &=& 1 & \\
6^{4x_2-3} &=& y_2 & \\
6^{4x_2-3} &=& 2 & |\ln\ldots \\
(4x_2 - 3) \cdot \ln 6 &=& \ln 2 & |:\ln 6 \\
4x_2 - 3 &=& \dfrac{\ln 2}{\ln 6} & |+3 \\
4x_2 &=& \dfrac{\ln 2}{\ln 6} + 3 & |:4 \\
x_2 &=& \dfrac{\frac{\ln 2}{\ln 6} + 3}{4} & \\
x_2 &\approx& 0{,}846\,713 & \\
L &=& \{0{,}846\,713; 1\} &
\end{array}$$

### 6.2.14 Aufgabe 14

$$\left(24^{x+4}\right)^{x+7} = \left(24^{x+1}\right)^{2x+4}$$

Da die vorkommenden Basen gleich sind (24), liegt die Methode des Koeffizientenvergleiches auf der Hand.

$$\begin{aligned}
\left(24^{x+4}\right)^{x+7} &= \left(24^{x+1}\right)^{2x+4} \\
24^{(x+4)\cdot(x+7)} &= 24^{(x+1)\cdot(2x+4)} \\
(x+4)\cdot(x+7) &= (x+1)\cdot(2x+4) \\
x^2+7x+4x+28 &= 2x^2+4x+2x+4 \\
x^2+11x+28 &= 2x^2+6x+4 && \mid -2x^2-6x-4 \\
-x^2+5x+24 &= 0 && \mid \cdot(-1) \\
x^2-5x-24 &= 0 && \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\
x_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{96}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \frac{11}{2} \\
x_1 = \frac{5}{2}+\frac{11}{2} = 8 & \qquad x_2 = \frac{5}{2}-\frac{11}{2} = -3 \\
L &= \{-3; 8\}
\end{aligned}$$

### 6.2.15 Aufgabe 15

$$3 \cdot 2^{x+2} = 1 + 4 \cdot 2^{2x+3}$$

Das sieht ganz nach Quadratischer Gleichung aus.

$$\begin{aligned}
3 \cdot 2^{x+2} &= 1 + 4 \cdot 2^{2x+3} \\
3 \cdot 2^{x} \cdot 2^{2} &= 1 + 4 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{3} \\
3 \cdot 4 \cdot 2^{x} &= 1 + 4 \cdot 8 \cdot 2^{2x} \\
12 \cdot 2^{x} &= 1 + 32 \cdot (2^{x})^{2} && | \text{ Substitution: } 2^{x} = y \\
12y &= 1 + 32y^{2} && | -1 - 32y^{2} \\
-32y^{2} + 12y - 1 &= 0 && | : (-32) \\
y^{2} - \frac{3}{8}y + \frac{1}{32} &= 0 && | \; p\text{-}q\text{-Formel} \\
y_{1/2} &= \frac{3}{16} \pm \sqrt{\frac{9}{256} - \frac{8}{256}} \\
y_{1/2} &= \frac{3}{16} \pm \frac{1}{64} \\
y_{1} = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} & \qquad y_{2} = \frac{3}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{8} && | \text{ zurück substituieren} \\
2^{x}_{1} &= y_{1} \\
2^{x}_{1} &= \frac{1}{4} \\
2^{x}_{1} &= 2^{-2} \\
x_{1} &= -2 \\
2^{x}_{2} &= y_{2} \\
2^{x}_{2} &= \frac{1}{8} \\
2^{x}_{2} &= 2^{-3} \\
x_{1} &= -3 \\
L &= \{-3; -2\}
\end{aligned}$$