Grundlagen der Differentialrechnung

W. Kippels

2. März 2015

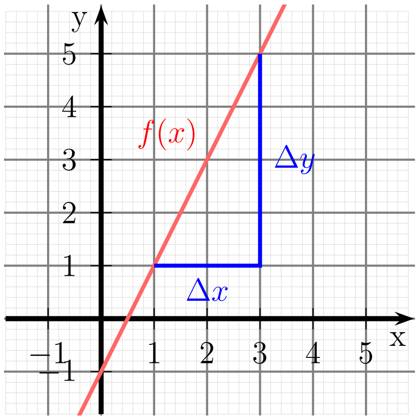
Bekanntlich hat eine Gerade, die durch eine **Lineare Funktion** beschrieben wird, eine **Steigung**. Üblicherweise wird die Steigung mit m bezeichnet. Sie wird bestimmt mithilfe der Formel:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

In nebenstehendem Bild des Funktionsgraphen gilt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

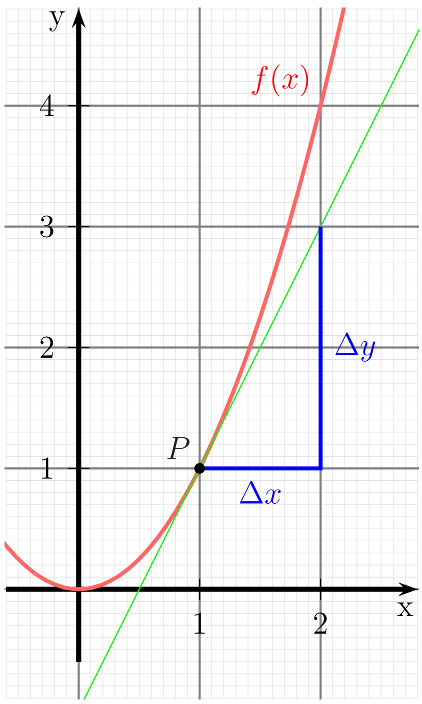
Dabei spielt es keine Rolle, an welcher Stelle und in welcher Größe das Steigungsdreieck angelegt wird. Immer ergibt sich $m = 2$.



Funktionsgraph $f(x) = 2x - 1$

Anders sieht es aus, wenn man den Funktionsgraph einer **Nichtlinearen Funktion**, also beispielsweise den Funktionsgraphen einer Parabel betrachtet.

Nebenstehend ist die Funktion $f(x) = x^2$ dargestellt. Offensichtlich verläuft der Funktionsgraph an jeder Stelle unterschiedlich steil. Daher kann man der Funktion keine sinnvolle **globale** Steigung zuordnen. Man kann jedoch **für jeden einzelnen Punkt** des Funktionsgraphen eine Steigung angeben. Dazu legt man in dem Punkt, für den man die Steigung sucht, eine **Tangente** an die Kurve an, wie nebenstehend für den Punkt $P(1|1)$ dargestellt ist. Man ordnet dann dem Punkt P der Kurve die Steigung der Tangenten im Punkt P zu. Diese Tangentensteigung kann nach bekanntem Muster aus dem eingezeichneten Steigungsdreieck bestimmt werden.

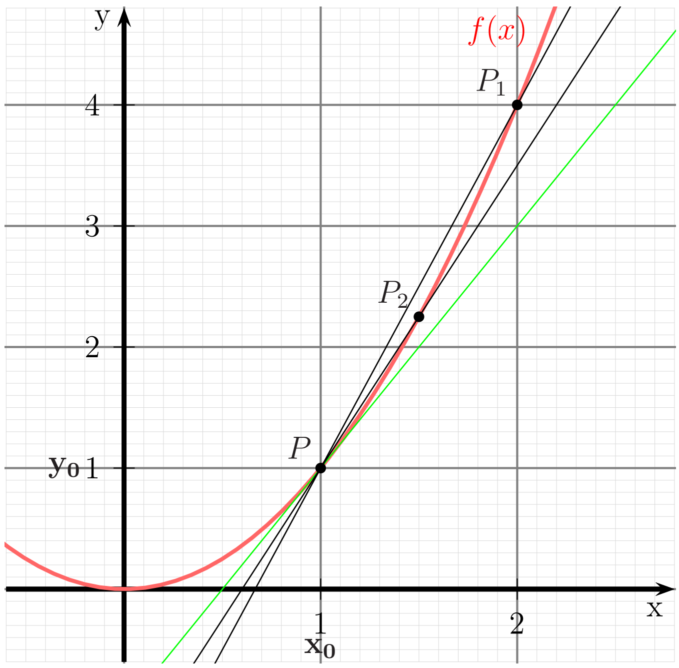


Funktionsgraph $f(x) = x^2$

Nun stellt sich natürlich die Frage:„***Wie kann die Tangentensteiung rechnerisch aus der Funktionsgleichung ermittelt werden?***“

Diese Frage ist nicht ganz einfach zu lösen. Man benötigt dazu die Kenntnisse über Folgen und deren Grenzwerte. Die Idee ist nämlich folgende:

Man legt zunächst neben dem Punkt P, der an der Stelle $\mathbf{x_0}$ liegt und in dem die Tangentensteigung ermittelt werden soll, einen weiteren Hilfspunkt auf dem Funktionsgraphen fest, der zunächst P_1 heißt, so dass man eine **Sekante**[1] durch P und P_1 legen kann.



Folge von Sekanten

Dann bewegt man den Hilfspunkt langsam in Richtung P. Eingezeichnet ist der Hilfspunkt mit dem Namen P_2, dessen horizontaler Abstand zu P nur noch halb so groß ist, wie beim ersten Hilfspunkt P_1. Je näher dieser Hilfspunkt an P herankommt, desto mehr nähern sich die schwarz eingezeichneten Sekanten der grün eingezeichneten Tangenten an. (Weitere Sekanten und Hilfspunkte können schlecht eingezeichnet werden, weil man sonst nichts mehr erkennen kann.)

Mathematisch gesehen erzeugt man nun eine geeignete **Folge von Hilfspunkten $\mathbf{P_n}$**, die den Punkt P als Grenzwert hat. Zu jedem Hilfspunkt P_n gibt es dann eine zugehörige Sekantensteigung. Wir erhalten also eine **Folge von Sekantensteigungen $\mathbf{m_n}$**. Deren Grenzwert stellt dann die **Tangentensteigung $\mathbf{m_T}$** dar.

Nach diesen Vorüberlegungen gehen wir jetzt vor. Zunächst führe ich die Hilfsgröße h ein. Sie stellt den Abstand zwischen den x-Werten von P und P_n dar. Im Anfang haben wir den Abstand noch Δx genannt, an dieser Stelle ist in der Mathematik jedoch ein h üblich.

Als nächstes benötigen wir eine Folge von h-Werten, die den Grenzwert Null hat, jedoch ohne dass irgendein h_n jemals genau gleich Null ist. (Anderenfalls müsste man sonst irgendwann durch Null dividieren, was ja bekanntlich nicht möglich ist.) Ich wähle die Folge:

$$h_n = \frac{1}{n}$$

[1] Eine Sekante ist eine Gerade, die eine Kurve im Gegensatz zur Tangenten nicht berührt, sondern in zwei Punkten schneidet.

Nun bestimme ich allgemein die Steigung der Sekanten durch die Punkte P und P_n.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$$

Wir erinnern uns: wir haben den Abstand zwischen den x-Werten h genannt, also ist $x_n - x_0 = h$. Weiterhin ist y_0 der Funktionswert an der Stelle x_0, also $y_0 = f(x_0)$. Nach dem gleichen Prinzip ist y_n der Funktionswert an der Stelle x_n, also $y_n = f(x_n)$, oder $y_n = f(x_0 + h)$. Das setzen wir in die Gleichung ein:

$$m = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Da wir eine konkrete Beispielfunktion haben, nämlich $f(x) = x^2$, können wir diese Funktion nun einsetzen. Wir erhalten dann:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$$

Der Zähler kann ausmultipliziert und zusammengefasst werden (bitte auf die Binomische Formel achten!), danach kann man h ausklammern und kürzen. Das sieht dann so aus:

$$m = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = \frac{h \cdot (2x_0 + h)}{h} = 2x_0 + h$$

Jetzt können wir ausnutzen, dass wir für h die Folge $h_n = \frac{1}{n}$ definiert haben. Dann ist der Grenzwert für $n \to \infty$ die Tangentensteigung m_T.

$$m_T = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$$

Für unser Beispiel haben wir schon zusammengefasst und vereinfacht. Damit erhalten wir:

$$m_T = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \lim_{n \to \infty} (2x_0 + h_n) = \lim_{n \to \infty} \left(2x_0 + \frac{1}{n}\right)$$

Dieser Grenzwert kann mit Hilfe der **Grenzwertsätze** ausgerechnet werden:

$$m_T = \lim_{n \to \infty} \left(2x_0 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} 2x_0 + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 2x_0 + 0 = 2x_0$$

Als Ergebnis haben wir eine Funktion erhalten, die an jeder Stelle die Steigung der Funktion $f(x)$ angibt. Das könnte man so schreiben:

$$m_T(x) = 2x$$

Die Funktion, die als Funktionswert die Steigung der Funktion $f(x)$ angibt, nennt man „***Ableitung von*** $\mathbf{f(x)}$“, Schreibweise:

$$\frac{df}{dx} \text{ (gesprochen: } \textit{df nach dx}\text{) oder einfacher: } f'(x)$$

Man ersetzt nun noch den Grenzwert für n gegen ∞ durch den Grenzwert für h gegen 0. Damit ist gemeint, dass man für h eine beliebige Nullfolge einsetzen kann, wie wir das ja gemacht haben. Mit diesen Vereinbarungen kommt man zu folgender Definition für die Ableitung einer Funktion:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Man nennt diese Formel auch den ***Differenzenquotienten***. Mit dieser Definition kann im Prinzip jede beliebige Funktion *abgeleitet* werden.

Ein Beispiel: Wir wollen die Funktion $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ ableiten. Dazu setzen wir die Funktionsgleichung in die Definition mit dem Differenzenquotienten ein.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\Big(2(x+h)^2 - 3(x+h) + 5\Big) - (2x^2 - 3x + 5)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 3x - 3h + 5 - 2x^2 + 3x - 5}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h + 5 - 2x^2 + 3x - 5}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2 - 3h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (4x + 2h - 3)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (4x + 2h - 3) \\
&= \lim_{h \to 0} 4x + \lim_{h \to 0} 2h - \lim_{h \to 0} 3 \\
&= 4x + 0 - 3 \\
f'(x) &= 4x - 3
\end{aligned}$$

Auf diese Weise lässt sich im Prinzip jede Funktion ableiten. Allerdings ist das in der Praxis je nach Funktion nicht ganz so simpel, wie in diesem Beispiel. Zudem ist das Ableiten für jede Funktion relativ aufwendig. Aus diesem Grund hat man einige grundlegende Funktionen mit Hilfe des Differenzenquotienten bestimmt, die in nachfolgender Liste aufgeführt sind.

Ableitungen wichtiger Grundfunktionen:

(1)	$f(x) = x^n$	$\Rightarrow$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
(2)	$f(x) = e^x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = e^x$
(3)	$f(x) = \sin x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \cos x$
(4)	$f(x) = \cos x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = -\sin x$
(5)	$f(x) = \ln x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Als Sonderfall zu Funktion (1) können noch gelten:

(6)	$f(x) = x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 1$
(7)	$f(x) = k$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 0$

Mit diesen Grundfunktionen können fast alle anderen denkbaren Funktionen abgeleitet werden, wenn man die fünf **Ableitungsregeln** kennt. Auch diese Ableitungsregeln können mit Hilfe des Differenzenquotienten bewiesen werden; das ist allerdings zum Teil nicht ganz einfach, weshalb ich mir das an dieser Stelle ersparen möchte. Ich möchte im Folgenden die Ableitungsregeln nur vorstellen und anschließend anhand von Beispielen deren Anwendung erläutern.

Ableitungsregeln:

1. Konstantenregel:	$f(x) = k \cdot g(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = k \cdot g'(x)$
2. Summenregel:	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
3. Produktregel:	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
4. Quotientenregel:	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
5. Kettenregel:	$f(x) = f(g(x))$	$\Rightarrow$	$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x)$

Beispiele zur Konstantenregel:

$$f(x) = 2x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$$

Mit $k = 2$ und $g(x) = x^3$ können wir die **Konstantenregel** verwenden. Die Ableitung der Funktion $g(x) = x^3$ kann mit Hilfe der Grundfunktion (1) als $g'(x) = 3x^2$ bestimmt werden. Damit erhalten wir:

$$f(x) = 2x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot 2x^2 = 6x^2$$

Ein anderes Beispiel:

$$f(x) = 5e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$$

Mit $k = 5$ und $g(x) = e^x$ können wir die **Konstantenregel** verwenden. Die Ableitung der Funktion $g(x) = e^x$ kann mit Hilfe der Grundfunktion (2) als $g'(x) = e^x$ bestimmt werden. Damit erhalten wir:

$$f(x) = 5e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5e^x$$

Beispiele zur Summenregel:

$$f(x) = x^3 + x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$$

Mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = x^2$ können wir die **Summenregel** verwenden. Die Ableitungen der Funktionen $u(x) = x^3$ und $v(x) = x^2$ können mit Hilfe der Grundfunktion (1) (Potenzfunktion) bestimmt werden. Damit erhalten wir:

$$f(x) = x^3 + x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 2x$$

Natürlich können auch mehr als zwei Summanden vorkommen.

$$f(x) = x^5 - x^3 + \cos x - e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - \sin x - e^x$$

Sehr oft benötigt man gleichzeitig zur Summenregel auch die Konstantenregel.

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 7 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$$

Die Ableitungen der Teilfunktionen $u(x) = 3x^2$ und $v(x) = 5x$ können jeweils mit der Konstantenregel bestimmt werden. Damit ergibt sich:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 7 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot 2x - 5$$

Beispiele zur Produktregel: Die Produktregel ist leider etwas lästig in der Anwendung. Oft wird fälschlicherweise auch vermutet, dass $f'(x) = u'(x) \cdot v'(x)$ die Lösung sei. Daher noch einmal ganz deutlich: **Das ist völlig falsch!** Sehen wir uns ein erstes Beispiel an, in dem man die Ableitung auch ohne die Produktregel bestimmen kann:

$$f(x) = (x^2 + 3x + 1) \cdot (2x - 3) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$$

Die Teilfunktionen $u(x)$ und $v(x)$ liste ich auf und bilde die zugehörigen Ableitungen:

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & x^2 + 3x + 1 \\ v(x) & = & 2x - 3 \end{array} \begin{array}{rcl} \Rightarrow \; u'(x) & = & 2x + 3 \\ \Rightarrow \; v'(x) & = & 2 \end{array}$$

Damit kann die Ableitung bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= (2x + 3) \cdot (2x - 3) + (x^2 + 3x + 1) \cdot 2 \end{aligned}$$

Ein anderes Beispiel:

$$f(x) = x^2 \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$$

Die Teilfunktionen $u(x)$ und $v(x)$ liste ich auf und bilde die zugehörigen Ableitungen:

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & x^2 \\ v(x) & = & \sin x \end{array} \begin{array}{rcl} \Rightarrow \; u'(x) & = & 2x \\ \Rightarrow \; v'(x) & = & \cos x \end{array}$$

Damit kann die Ableitung bestimmt werden:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

Beispiele zur Quotientenregel: Die Quotientenregel ist noch sperriger in der Anwendung, als die Produktregel. Auch hier wird oft fälschlicherweise etwas falsches vermutet, nämlich: $f'(x) = \frac{u'(x)}{v'(x)}$ Das ist natürlich **völlig falsch**! Sehen wir uns das erste Beispiel an, das man auch ohne die Quotientenregel ableiten kann:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{2x - 2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$$

Die Teilfunktionen $u(x)$ und $v(x)$ liste ich auf und bilde die zugehörigen Ableitungen:

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & 2x^2 - 6x + 4 & \Rightarrow & u'(x) & = & 4x - 6 \\ v(x) & = & 2x - 2 & \Rightarrow & v'(x) & = & 2 \end{array}$$

Damit kann die Ableitung mit der Quotientenregel bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(4x-6) \cdot (2x-2) - (2x^2 - 6x + 4) \cdot 2}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{8x^2 - 8x - 12x + 12 - 4x^2 + 12x - 8}{4x^2 - 8x + 4} \\ &= \frac{4x^2 - 8x + 4}{4x^2 - 8x + 4} \\ f'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Wenn man den Zähler faktorisiert, kann die Ableitung auch einfacher bestimmt werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 - 6x + 4}{2x - 2} \\ &= \frac{(2x-2) \cdot (x-2)}{2x - 2} \\ &= x - 2 \end{aligned}$$

Mit der Summenregel ergibt sich daraus:

$$f'(x) = 1$$

Die Ableitungen für beide Lösungswege stimmen überein.

Hier eine andere Funktion, die ohne Quotientenregel nicht abgeleitet werden kann:

$$f(x) = \tan x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$$

Bekanntlich (oder auch nicht...) lässt sich $\tan x$ schreiben als Quotient aus $\sin x$ und $\cos x$.

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Die Teilfunktionen $u(x)$ und $v(x)$ liste ich auf und bilde die zugehörigen Ableitungen:

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \sin x & \Rightarrow & u'(x) & = & \cos x \\ v(x) & = & \cos x & \Rightarrow & v'(x) & = & -\sin x \end{array}$$

Damit kann die Ableitung mit der Quotientenregel bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(\cos x) \cdot (\cos x) - (\sin x) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ f'(x) &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Im Zähler kann man noch den **Trigonometrischen Pythagoras** anwenden, der besagt: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Damit erhält man:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Beispiele zur Kettenregel: Die Kettenregel ist eine sehr mächtige Regel, allgemein macht sie jedoch von allen Regeln die meisten Schwierigkeiten, bis sie verstanden ist. Sie kommt immer dann zur Anwendung, wenn sich eine Funktion als **Funktion einer (Unter-) Funktion** auffassen lässt. Das bedeutet, es gibt einen Teil in der Funktion, der – bekannte x-Werte vorausgesetzt – zunächst berechnet werden muss, bevor **auf das Ergebnis eine andere Funktion** angewendet wird. Hier das erste Beispiel:

$$f(x) = (2x+3)^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$$

Hier lässt sich der Klammerausdruck als innere Funktion auffassen. Bevor man quadriert (das ist die äußere Funktion) muss ja erst der Klammerinhalt ausgerechnet werden. Es liegt also nahe, den Klammerinhalt als Unterfunktion $g(x) = 2x + 3$ zu bezeichnen. Ersetzt man diesen Ausdruck in der Originalfunktion durch g, dann erhält man die äußere Funktion $f(g) = g^2$.

Um etwas Ordnung in das System zu bringen schreibe ich die Funktionen sowie deren Ableitungen auf. Dabei ist zu beachten, dass die Funktion $f(g)$ im Gegensatz zur Funktion $f(x)$ nach g und nicht nach x abgeleitet wird. Das ist im Anfang etwas gewöhnungsbedürftig.

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & 2x+3 & \Rightarrow & g'(x) & = & 2 \\ f(g) & = & g^2 & \Rightarrow & f'(g) & = & 2g \end{array}$$

Damit kann die Ableitung mit der Kettentenregel bestimmt werden:

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = 2g \cdot 2$$

Jetzt muss nur noch g wieder durch $(2x + 3)$ ersetzt werden. Danach fasst man noch zusammen.

$$f'(x) = 2g \cdot 2 = 2 \cdot (2x + 3) \cdot 2 = 4 \cdot (2x + 3) = 8x + 12$$

Dieses Beispiel kann auch ohne Kettenregel gelöst werden. Wir führen das einmal durch, um ein Gefühl dafür zu bekommen, dass die Kettenregel richtig ist. Dazu wird zunächst die Klammer in der Funktion mit der ersten Binomischen Formel aufgelöst. Dann lässt sich die Ableitung bequem mit Konstanten- und Summenregel bestimmen.

$$f(x) = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 8x + 12$$

Hier ein weiteres Beispiel:

$$f(x) = e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =?$$

Da keine Klammer um e^x steht, muss der Term x^2 zuerst ausgerechnet werden. Deshalb stellt er die **innere Funktion** dar. Damit ergibt sich:

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & x^2 & \Rightarrow & g'(x) & = & 2x \\ f(g) & = & e^g & \Rightarrow & f'(g) & = & e^g \end{array}$$

Damit kann die Ableitung mit der Kettentenregel bestimmt werden:

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = e^g \cdot 2x$$

Jetzt muss nur noch g wieder durch x^2 ersetzt werden.

$$f'(x) = e^g \cdot 2x = 2x \cdot e^{x^2}$$

Weil die Kettenregel vielen Verständnisschwierigkeiten macht, kommt hier noch ein Beispiel.

$$f(x) = \sin(3x + 5) \quad \Rightarrow \quad f'(x) =?$$

Wieder muss man überlegen, was zuerst ausgerechnet wird. Hier ist es der Klammerausdruck $(3x + 5)$. Erst von dessen Ergebnis wird ja der Sinus bestimmt. Daher stellt er die innere Funktion dar.

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & 3x + 5 & \Rightarrow & g'(x) & = & 3 \\ f(g) & = & \sin g & \Rightarrow & f'(g) & = & \cos g \end{array}$$

Damit kann die Ableitung mit der Kettentenregel bestimmt werden:

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = (\cos g) \cdot 3$$

Jetzt muss nur noch g wieder durch $3x+5$ ersetzt werden.

$$f'(x) = (\cos g) \cdot 3 = \Big(\cos(3x+5)\Big) \cdot 3 = 3 \cdot \cos(3x+5)$$

Als letztes Bespiel sehen wir uns an, wie die Kettenregel gleich mehrfach verwendet werden kann.

$$f(x) = e^{\sin^3 x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ?$$

Da der Exponent zuerst berechnet werden muss, stellt er die innere Funktion dar. Wir erhalten damit:

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & \sin^3 x & \Rightarrow & g'(x) & = & ? \\ f(g) & = & e^g & \Rightarrow & f'(g) & = & e^g \end{array}$$

Für $g(x) = \sin^3 x$ steht uns keine Grundfunktion zur Verfügung. Es lässt sich aber hierauf die Kettenregel anwerden, denn $\sin x$ muss ja zuerst bestimmt werden, bevor mit 3 potenziert wird. Die Ableitung der Unterfunktion $g(x) = \sin^3 x$ wird also vorweg bestimmt.

$$\begin{array}{rclcrcl} h(x) & = & \sin x & \Rightarrow & h'(x) & = & \cos x \\ g(h) & = & h^3 & \Rightarrow & g'(h) & = & 3h^2 \end{array}$$

Damit können wir die Kettenregel auf $g(x)$ anwenden.

$$g'(x) = g'(h) \cdot h'(x) = 3h^2 \cdot \cos x$$

Mit diesem Ergebnis der „Nebenrechnung“ können wir bei der Hauptrechnung weitermachen.

$$\begin{array}{rclcrcl} g(x) & = & \sin^3 x & \Rightarrow & g'(x) & = & 3h^2 \cdot \cos x \\ f(g) & = & e^g & \Rightarrow & f'(g) & = & e^g \end{array}$$

Damit kann die Ableitung bestimmt werden.

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = e^g \cdot 3h^2 \cdot \cos x$$

Nun werden g und h zurückeingesetzt.

$$f'(x) = e^g \cdot 3h^2 \cdot \cos x = e^{\sin^3 x} \cdot 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$$

Wir sehen uns das Ergebnis noch einmal an der Stelle an, bevor wir g und h zurückeingesetzt haben Es war $f'(g) = e^g$, $g'(h) = 3h^2$ und $h'(x) = \cos x$. Genau dieses Produkt stellt $f'(x)$ dar. Man kann also die Kettenregel wie folgt erweitern:

$$\boxed{f(x) = f\Big(g(h(x))\Big) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = f'(g) \cdot g'(h) \cdot h'(x)}$$