Das Logarithmische Maß Dezibel

W. Kippels

9. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

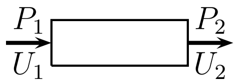
Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Definitionen

2.1 Leistungs- und Spannungsverhältnisse

Die Einheit *Dezibel*[1] ist ein logarithisches Maß für Leistungs- oder Spannungsverhältnisse an einem Vierpol, wie einem Verstärker oder einer dämpfungsbehafteten Leitung, wie nebenstehend dargestellt. Dabei wird die abgegebene Leistung (bzw. Spannung) ins Verhältnis zur zugeführten gesetzt. Die Einheit Dezibel eigent sich besonders gut für Probleme, die ein sehr großes oder sehr kleines Verhältnis beinhalten, sowie die Verkettung verschiedener Verstärkungen und/oder Dämpfungen.



Hier eine kurze Auflistung der Definitionen:

Leistungsverstärkung: $\boxed{V_P = \dfrac{P_2}{P_1}}$

Spannungsverstärkung: $\boxed{V_U = \dfrac{U_2}{U_1}}$

Logarithmisches Maß: $\boxed{a = 10\,\mathrm{dB} \cdot \lg V_P = 20\,\mathrm{dB} \cdot \lg V_U}$
$\boldsymbol{a}$ positiv $\Leftrightarrow$ Verstärkung
$\boldsymbol{a}$ negativ $\Leftrightarrow$ Dämpfung

Aus der Definition ist erkennbar, dass $\boldsymbol{a}$ durch V_U ausgedrückt doppelt so groß ist, wie wenn $\boldsymbol{a}$ durch V_P bestimmt wird. Warum ist das so? Ist das eine willkürliche Festlegung?

Wir gehen davon aus, dass der Eingangswiderstand des Vierpols genau so groß ist, wie sein Ausgangswiderstand. Wenn wir am gleichen Widerstand die **Spannung verdoppeln**, dann entspricht das einer **Vervierfachung** der **Leistung**, weil sich ja auch der Strom verdoppelt. Allgemein durch eine Formel ausgedrückt bedeutet das:

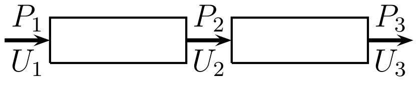
$$V_P = V_U^2$$

Ersetzt man in der Formel zur Bestimmung von $\boldsymbol{a}$ das V_P durch V_U^2, dann ergibt sich daraus nach dem Logarithmengesetz für Potenzen:

$$\lg V_P = \lg V_U^2 = 2 \cdot \lg V_U$$

Aus dieser Formel ergibt sich sofort einsichtig der oben angegebene Zusammenhang.

Schaltet man zwei (oder mehr) Vierpole hintereinander, dann müssen die jeweiligen Werte für V_P bzw. V_U miteinander **multipliziert** werden:



$$V_{Pges} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_3}{P_2} = V_{P1} \cdot V_{P2}$$

[1]Eigentlich ist die Grundeinheit das „Bel“. Ein Dezibel ist demnach ein Zehntel Bel. Man verwendet üblicherweise aber nicht das Bel, sondern praktisch immer das Dezibel.

$$V_{Uges} = \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_3}{U_2} = V_{U1} \cdot V_{U2}$$

Rechnet man dagegen mit dem logarithmischen Maß $\boldsymbol{a}$, dann **addiert** man die Werte einfach. Das Logarithmengesetz für die Multiplikation sorgt dafür:

$$a_{ges} = a_1 + a_2$$

Stellen wir nun einmal ein paar gängige Werte für V_P, V_U, und a in einer Tabelle gegenüber.

V_P	V_U	a
0,000 1	0,01	−40 dB
0,01	0,1	−20 dB
0,25	0,5	−6 dB
0,5	0,707	−3 dB
1	1	0 dB
2	1,41	3 dB
4	2	6 dB
10	3,16	10 dB
100	10	20 dB
1 000	31,6	30 dB
10 000	100	40 dB
1 000 000	1 000	60 dB

Da es ganz praktisch sein kann, wenn man bestimmte Umrechnungen auch schnell im Kopf durchführen kann, schauen wir uns die Werte einmal genau an. Wenn man sich **genau zwei** Dezibelwerte merkt, dann kann man in der Praxis daraus alles zusammensetzen. Es ist $\lg 10 = 1$ und $\lg 2 \approx 0,3$. Für Leistungsverhältnisse ist also eine **Verdopplung** eine Erhöhung um 3 dB und eine **Verzehnfachung** eine Erhöhung um 10 dB. Wie man hieraus Werte zusammensetzen kann, möchte ich an ein paar Beispielen zeigen.

$$\begin{aligned}
V_P &= 20 = 2 \cdot 10 & \Leftrightarrow \quad a &= 3\,\mathrm{dB} + 10\,\mathrm{dB} = 13\,\mathrm{dB}\\
V_P &= 800 = 2^3 \cdot 10^2 & \Leftrightarrow \quad a &= 3 \cdot 3\,\mathrm{dB} + 2 \cdot 10\,\mathrm{dB} = 29\,\mathrm{dB}\\
V_P &= 5\,000 = \frac{10^4}{2} & \Leftrightarrow \quad a &= 4 \cdot 10\,\mathrm{dB} - 3\,\mathrm{dB} = 37\,\mathrm{dB}\\
V_P &= 0,4 = \frac{2^2}{10} & \Leftrightarrow \quad a &= 2 \cdot 3\,\mathrm{dB} - 10\,\mathrm{dB} = -4\,\mathrm{dB}
\end{aligned}$$

Für Spannungsverhältnisse geht das sinngemaß genauso, wobei die Dezibelwerte doppelt so groß sind, wie bei Leistungsverhältnissen.

2.2 Pegelwerte mit bezogenen Dezibel

Es ist praktisch, wenn man auch für sogenannte ***Pegelwerte*** das Maß Dezibel verwendet. Dazu wird einfach in der oben angegebenen Formel für V_P oder V_U der Wert für P_1 bzw. für U_1 ein **Bezugswert** eingesetzt. Gebräuchlich sind folgende Bezeichnungsweisen:

dBm: Bezug $P_1 = 1\,\mathrm{mW}$

dBμV: Bezug $U_1 = 1\,\mu\mathrm{V}$

Bei der Verwendung ist zu beachten, dass die Einheit dBm eine **Leistung** angibt und die Einheit dBμV eine **Spannung**. Entsprechend wird hier nicht das Formelzeichen a, sondern P bzw. U verwendet!

Zwei Beispiele dazu:
Ein Pegelwert von $P = 20\,\mathrm{dBm}$ bedeutet 20 dB über einem Milliwatt, also $P = 100\,\mathrm{mW}$, $U = 26\,\mathrm{dB}\mu\mathrm{V}$ bedeutet 26 dB über einem Mikrovolt, also $U = 20\,\mu\mathrm{V}$.

3 Übungsaufgaben

3.1 Aufgabe 1:

Ein Verstärker mit einer Ausgangsleistung von 200 W benötigt eine Steuerleistung von 50 mW. Wie groß ist seine Verstärkung

1. als Verstärkungsfaktor V_P?
2. in Dezibel?

3.2 Aufgabe 2:

Am Anfang einer Übertragungsleitung liegt eine Spannung von 80 mV an, am Ende sind es noch 500 μV. Wie groß ist die Dämpfung der Leitung (in dB)?

3.3 Aufgabe 3:

In eine lange Übertragungsleitung sind insgesamt 5 Verstärker mit jeweils 23 dB Verstärkung eingebaut. Trotzdem kommen von den eingespeisten 5 W nur 250 mW am anderen Ende an.

1. Wie groß ist die Dämpfung der kompletten Übertragungsstrecke?
2. Wie groß wäre die Dämpfung der Strecke **ohne** die eingebauten Verstärker?
3. Wie groß wäre ohne die eingebauten Verstärker die Leistung, die zum Empfänger gelangte?

3.4 Aufgabe 4:

Die Dämpfung einer Leitung beträgt $-56\,\mathrm{dB}$. Welche Leistung muss eingespeist werden, damit am anderen Leitungsende eine Spannung von $1\,\mathrm{mV}$ den Empfänger mit $50\,\Omega$ Eingangswiderstand erreicht?

3.5 Aufgabe 5:

Am Anschlusspunkt einer Antenne wird ein Empfangssignal von $62\,\mathrm{dB}\mu\mathrm{V}$ gemessen. Auf dem Weg zum Empfänger werden durchlaufen:

- ein Stammleitungsverteiler mit $-9\,\mathrm{dB}$ Dämpfung
- $15\,\mathrm{m}$ Koaxkabel mit $-6\,\mathrm{dB}$ Dämpfung
- eine Antennensteckdose mit $-14\,\mathrm{dB}$ Dämpfung

Wieviel Dezibel muss ein vorgeschalteter Verstärker an Verstärkung haben, damit ein Mindestpegel von $57\,\mathrm{dB}\mu\mathrm{V}$ am Empfänger anliegt?

3.6 Aufgabe 6:

Welche Sendeleistung (in Watt) ist nötig, um bei einer Streckendämpfung von $-127\,\mathrm{dB}$ beim Empfänger eine eine Empfangsleistung von $-60\,\mathrm{dBm}$ zu erzeugen?

4 Lösungen der Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1:

Ein Verstärker mit einer Ausgangsleistung von 200 W benötigt eine Steuerleistung von 50 mW. Wie groß ist seine Verstärkung

1. als Verstärkungsfaktor V_P?
2. in Dezibel?

Lösung:

$$\begin{aligned} P_1 &= 50\,\mathrm{mW} \\ P_2 &= 200\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

$$V_P = \frac{P_2}{P_1} = \frac{200\,\mathrm{W}}{50\,\mathrm{mW}} = 4\,000$$

$$a = 10\,\mathrm{dB} \cdot \lg V_P = 10\,\mathrm{dB} \cdot \lg 4\,000 = 10\,\mathrm{dB} \cdot 3,6 = 36\,\mathrm{dB}$$

4.2 Aufgabe 2:

Am Anfang einer Übertragungsleitung liegt eine Spannung vo 80 mV an, am Ende sind es noch 500 μV. Wie groß ist die Dämpfung der Leitung (in dB)?

Lösung:

$$\begin{aligned} U_1 &= 80\,\mathrm{mV} \\ U_2 &= 500\,\mu\mathrm{V} \end{aligned}$$

$$a = 20\,\mathrm{dB} \cdot \lg V_U = 20\,\mathrm{dB} \cdot \frac{U_2}{U_1} = 20\,\mathrm{dB} \cdot \lg \frac{500\,\mu\mathrm{W}}{80\,\mathrm{mW}} = 20\,\mathrm{dB} \cdot \lg 0,006\,25 = -44\,\mathrm{dB}$$

4.3 Aufgabe 3:

In eine lange Übertragungsleitung sind insgesamt 5 Verstärker mit jeweils 23 dB Verstärkung eingebaut. Trotzdem kommen von den eingespeisten 5 W nur 250 mW am anderen Ende an.

1. Wie groß ist die Dämpfung der kompletten Übertragungsstrecke?
2. Wie groß wäre die Dämpfung der Strecke **ohne** die eingebauten Verstärker?
3. Wie groß wäre ohne die eingebauten Verstärker die Leistung, die zum Empfänger gelangte?

Lösung:

$$\begin{aligned} P_1 &= 5\,\mathrm{W} \\ P_2 &= 250\,\mathrm{mW} \end{aligned}$$

$$a_{ges} = 10\,\mathrm{dB} \cdot \lg V_P = 10\,\mathrm{dB} \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} = 10\,\mathrm{dB} \cdot \lg \frac{250\,\mathrm{mW}}{5\,\mathrm{W}} = 10\,\mathrm{dB} \cdot \lg 0,05 = -13\,\mathrm{dB}$$

$$a_{ohne} = a_{ges} - 5 \cdot 23\,\mathrm{dB} = -13\,\mathrm{dB} - 5 \cdot 23\,\mathrm{dB} = -128\,\mathrm{dB}$$

$$\begin{aligned} a_{ohne} &= 10\,\mathrm{dB} \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} && |:10\,\mathrm{dB} \\ \frac{a_{ohne}}{10\,\mathrm{dB}} &= \lg \frac{P_2}{P_1} && |10^{\cdots} \\ 10^{\frac{a_{ohne}}{10\,\mathrm{dB}}} &= \frac{P_2}{P_1} && |\cdot P_1 \\ P_1 \cdot 10^{\frac{a_{ohne}}{10\,\mathrm{dB}}} &= P_2 \\ P_2 &= 5\,\mathrm{W} \cdot 10^{\frac{-128\,\mathrm{dB}}{10\,\mathrm{dB}}} \\ &= 5\,\mathrm{W} \cdot 10^{-12,8} \\ P_2 &= 0,8\,\mathrm{pW} \end{aligned}$$

4.4 Aufgabe 4:

Die Dämpfung einer Leitung beträgt $-56\,\mathrm{dB}$. Welche Leistung muss eingespeist werden, damit am anderen Leitungsende eine Spannung von $1\,\mathrm{mV}$ den Empfänger mit $50\,\Omega$ Eingangswiderstand erreicht?

Lösung:

$$\begin{aligned} a &= -56\,\mathrm{dB} \\ U_2 &= 1\,\mathrm{mV} \end{aligned}$$

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R} = \frac{(1\,\mathrm{mV})^2}{50\,\Omega} = 20\,\mathrm{nW}$$

$$\begin{aligned} a &= 10\,\mathrm{dB} \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} && |:10\,\mathrm{dB} \\ \frac{a}{10\,\mathrm{dB}} &= \lg \frac{P_2}{P_1} && |10^{\cdots} \\ 10^{\frac{a}{10\,\mathrm{dB}}} &= \frac{P_2}{P_1} && |\cdot \frac{P_1}{10^{\frac{a}{10\,\mathrm{dB}}}} \\ P_1 &= \frac{P_2}{10^{\frac{a}{10\,\mathrm{dB}}}} \\ &= \frac{20\,\mathrm{nW}}{10^{\frac{-56\,\mathrm{dB}}{10\,\mathrm{dB}}}} \\ P_1 &= 8\,\mathrm{mW} \end{aligned}$$

4.5 Aufgabe 5:

Am Anschlusspunkt einer Antenne wird ein Empfangssignal von 62 dBμV gemessen. Auf dem Weg zum Empfänger werden durchlaufen:

- ein Stammleitungsverteiler mit -9 dB Dämpfung
- 15 m Koaxkabel mit -6 dB Dämpfung
- eine Antennensteckdose mit -14 dB Dämpfung

Wieviel Dezibel muss ein vorgeschalteter Verstärker an Verstärkung haben, damit ein Mindestpegel von 57 dBμV am Empfänger anliegt?

Lösung:

$$a_{ges} = -9\,\mathrm{dB} - 6\,\mathrm{dB} - 14\,\mathrm{dB} = -29\,\mathrm{dB}$$

Ohne Verstärker ergäbe sich dieser Pegel:

$$U_2 = 62\,\mathrm{dB\mu V} - 29\,\mathrm{dB} = 33\,\mathrm{dB\mu V}$$

Die nötige Verstärkung beträgt dann:

$$a = 57\,\mathrm{dB\mu V} - 33\,\mathrm{dB\mu V} = 24\,\mathrm{dB}$$

4.6 Aufgabe 6:

Welche Sendeleistung ist nötig, um bei einer Streckendämpfung von -127 dB beim Empfänger eine eine Empfangsleistung von -60 dBm zu erzeugen?

Lösung:

$$\begin{aligned} a &= -127\,\mathrm{dB} \\ P_2 &= -60\,\mathrm{dBm} \end{aligned}$$

$$P_1 = P_2 - a = -60\,\mathrm{dBm} + 127\,\mathrm{dB} = 67\,\mathrm{dBm}$$

Diese Leistung kann nun in Watt umgerechnet werden:

$$P_1 = 67\,\mathrm{dBm} = 10^{6,7}\,\mathrm{mW} = 5\,\mathrm{kW}$$