Integrationsübungen mit Lösungen

W. Kippels

21. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

An dieser Stelle sollen übungshalber diverse unbestimmte Integrale berechnet werden. Die notwendigen Grundlagen zur Integralrechnung finden Sie hier:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/integral.pdf

Für die Lösung einiger Aufgaben sind auch Kenntnisse zu weitergehenden Integrationsmethoden erforderlich. Informationen dazu finden Sie hier:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/int-meth.pdf

2 Aufgaben

2.1 Aufgabe 1

$$\int 5x - 7 \; dx = \dots$$

2.2 Aufgabe 2

$$\int e^x - \sin x \; dx = \dots$$

2.3 Aufgabe 3

$$\int 4x^7 + e^2 \; dx = \dots$$

2.4 Aufgabe 4

$$\int \cos 3x \; dx = \dots$$

2.5 Aufgabe 5

$$\int e^{5x} \; dx = \dots$$

2.6 Aufgabe 6

$$\int x \cdot e^{x^2} \; dx = \dots$$

2.7 Aufgabe 7

$$\int 3x \cdot \cos x \; dx = \dots$$

2.8 Aufgabe 8

$$\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2} \, dx = \dots$$

3 Lösungen der Aufgaben

3.1 Aufgabe 1

Für diese Aufgabe benötigt man nur die Summen- und die Konstantenregel.

$$\int 5x - 7\ dx = \frac{5}{2}x^2 - 7x + c$$

3.2 Aufgabe 2

Für diese Aufgabe benötigt man nur die Summen- und die Konstantenregel.

$$\int e^x - \sin x\ dx = e^x + \cos x + c$$

3.3 Aufgabe 3

Für diese Aufgabe benötigt man nur die Summen- und die Konstantenregel.

$$\int 4x^7 + e^2\ dx = \frac{1}{2}x^8 + e^2 \cdot x + c$$

Eine „Falle" ist das e^2. Manch einer verwechselt das mit e^x oder auch mit x^2. Tatsächlich aber ist e^2 eine Konstante.

3.4 Aufgabe 4

$$\int \cos 3x\ dx = \ldots$$

Hier kommt man nur mit der Summen- oder der Konstantenregel nicht weiter. Die Aufleitung zu $\cos x$ wäre $\sin x$. Hier „stört" jedoch die 3. Bildet man testweise die Ableitung zu $g(x) = \sin 3x$, dann erhält man mit Hilfe der Kettenrgel: $g'(x) = 3 \cdot \cos 3x$. Das ist genau das 3-fache der zu integrierenden Funktion. Die Stammfunktion ist demnach $\frac{1}{3}$ von $g(x)$.

$$\int \cos 3x\ dx = \frac{1}{3} \cdot \sin 3x + c$$

3.5 Aufgabe 5

$$\int e^{5x}\ dx = \ldots$$

Auch hier kommt man nur mit der Summen- oder der Konstantenregel nicht weiter. Die Aufleitung zu e^x wäre e^x. Hier „stört" nur die 5. Bildet man testweise die Ableitung zu

$g(x) = e^{5x}$, dann erhält man mit Hilfe der Kettenrgel: $g'(x) = 5 \cdot e^{5x}$. Das ist genau das 5-fache der zu integrierenden Funktion. Die Stammfunktion ist demnach $\frac{1}{5}$ von $g(x)$.

$$\int e^{5x}\ dx = \frac{1}{5} \cdot e^{5x} + c$$

3.6 Aufgabe 6

$$\int x \cdot e^{x^2}\ dx = \ldots$$

Hier kommt man mit der *Integration durch Substitution* weiter. Es gibt eine „innere" Funktion, die wir mir $g(x)$ bezeichnen können. Es ist der Exponent.

$$g(x) = x^2$$

Hiervon benötigen wir auch die Ableitung.

$$g'(x) = 2x$$

Wir müssen nun prüfen, ob das zum Ansatz für die Integration durch Substitution passt.

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\ dx = \int e^{\underbrace{x^2}_{g(x)}} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}\ dx$$

Vergleicht man das Ergebnis mit der zu integrierenden Funktion, dann stimmt das bis auf den Faktor 2 überein. Die kann man aber einbauen, indem man den Faktor $\frac{1}{2}$ zum Ausgleich vor das Integral schreibt. Wir können damit substituieren mit:

$$u = g(x) = x^2$$

Setzen wir das ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{x^2}\ dx &= \frac{1}{2} \cdot \int e^u\ du \\ \int x \cdot e^{x^2}\ dx &= \frac{1}{2} \cdot e^u + c \end{aligned}$$

Jetzt kann zurücksubstituiert werden.

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{x^2}\ dx &= \frac{1}{2} \cdot \int 2x \cdot e^{x^2}\ dx \\ \int x \cdot e^{x^2}\ dx &= \frac{1}{2} \cdot e^u + c \\ \int x \cdot e^{x^2}\ dx &= \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + c \end{aligned}$$

3.7 Aufgabe 7

$$\int 3x \cdot \cos x \; dx = \dots$$

Hier kann man erfolgreich mit der Methode der *Partiellen Integration* arbeiten. Wir wählen folgende Hilfsfunktionen:

$$u(x) = 3x \qquad \text{und} \qquad v'(x) = \cos x$$

Wir erhalten dann durch Ab- bzw. Aufleiten der Hilfsfunktionen:

$$u'(x) = 3 \qquad \text{und} \qquad v(x) = \sin x$$

Die Formel für die Partielle Integration kann angewendet werden.

$$\begin{aligned}
\int u(x) \cdot v'(x) \; dx &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \; dx \\
\int 3x \cdot \cos x \; dx &= 3x \cdot \sin x - \int 3 \cdot \sin x \; dx \\
\int 3x \cdot \cos x \; dx &= 3x \cdot \sin x - 3 \cdot (-\cos x) + c \\
\int 3x \cdot \cos x \; dx &= 3x \cdot \sin x + 3 \cdot \cos x + c
\end{aligned}$$

3.8 Aufgabe 8

$$\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2} \; dx = \dots$$

Bei dieser Funktion empfiehlt sich die Methode der *Integration durch Substitution.* Als innere Funktion $g(x)$ wählen wir den Klammerinhalt im Nenner.

$$g(x) = 2 + x^3$$

Wir bestimmen die zugehörige Ableitung.

$$g'(x) = 3x^2$$

Nun muss geprüft werden, inwieweit das zum Ansatz der Integration durch Substitution passt.

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \; dx = \int \frac{1}{(\underbrace{2+x^3}_{g(x)})^2} \cdot \underbrace{3x^2}_{g'(x)} \; dx$$

Bis auf die 3, die zu viel da ist, passt alles. Die kann durch $\frac{1}{3}$ vor dem Integral kompensiert werden. Wir können substituieren.

$$u = g(x) = 2 + x^3$$

Damit erhalten wir beim Einsetzen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,dx &= \frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{u^2}\,du \\
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,dx &= \frac{1}{3}\cdot\int u^{-2}\,du \\
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,dx &= \frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot u^{-1}+c \\
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,dx &= -\frac{1}{3u}+c
\end{aligned}$$

Jetzt kann zurücksubstituiert werden.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,dx &= -\frac{1}{3u}+c \\
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,dx &= -\frac{1}{3\cdot(2+x^3)}+c \\
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,dx &= -\frac{1}{6+3x^3}+c
\end{aligned}$$