

# Integrationsübungen mit Lösungen

W. Kippels

24. Mai 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Aufgaben</b>	<b>3</b>
2.1	Aufgabe 1 . . . . .	3
2.2	Aufgabe 2 . . . . .	3
2.3	Aufgabe 3 . . . . .	3
2.4	Aufgabe 4 . . . . .	3
2.5	Aufgabe 5 . . . . .	3
2.6	Aufgabe 6 . . . . .	3
2.7	Aufgabe 7 . . . . .	3
2.8	Aufgabe 8 . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Lösungen der Aufgaben</b>	<b>4</b>
3.1	Aufgabe 1 . . . . .	4
3.2	Aufgabe 2 . . . . .	4
3.3	Aufgabe 3 . . . . .	4
3.4	Aufgabe 4 . . . . .	4
3.5	Aufgabe 5 . . . . .	4
3.6	Aufgabe 6 . . . . .	5
3.7	Aufgabe 7 . . . . .	5
3.8	Aufgabe 8 . . . . .	6

# 1 Einleitung

An dieser Stelle sollen übungshalber diverse unbestimmte Integrale berechnet werden. Die notwendigen Grundlagen zur Integralrechnung finden Sie hier:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/integral.pdf>

Für die Lösung einiger Aufgaben sind auch Kenntnisse zu weitergehenden Integrationsmethoden erforderlich. Informationen dazu finden Sie hier:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/int-meth.pdf>

## 2 Aufgaben

### 2.1 Aufgabe 1

$$\int 5x - 7 \, dx = \dots$$

### 2.2 Aufgabe 2

$$\int e^x - \sin x \, dx = \dots$$

### 2.3 Aufgabe 3

$$\int 4x^7 + e^2 \, dx = \dots$$

### 2.4 Aufgabe 4

$$\int \cos 3x \, dx = \dots$$

### 2.5 Aufgabe 5

$$\int e^{5x} \, dx = \dots$$

### 2.6 Aufgabe 6

$$\int x \cdot e^{x^2} \, dx = \dots$$

### 2.7 Aufgabe 7

$$\int 3x \cdot \cos x \, dx = \dots$$

### 2.8 Aufgabe 8

$$\int \frac{x^2}{(2 + x^3)^2} \, dx = \dots$$

## 3 Lösungen der Aufgaben

### 3.1 Aufgabe 1

Für diese Aufgabe benötigt man nur die Summen- und die Konstantenregel.

$$\int 5x - 7 \, dx = \frac{5}{2}x^2 - 7x + c$$

### 3.2 Aufgabe 2

Für diese Aufgabe benötigt man nur die Summen- und die Konstantenregel.

$$\int e^x - \sin x \, dx = e^x + \cos x + c$$

### 3.3 Aufgabe 3

Für diese Aufgabe benötigt man nur die Summen- und die Konstantenregel.

$$\int 4x^7 + e^2 \, dx = \frac{1}{2}x^8 + e^2 \cdot x + c$$

Eine „Falle“ ist das  $e^2$ . Manch einer verwechselt das mit  $e^x$  oder auch mit  $x^2$ . Tatsächlich aber ist  $e^2$  eine Konstante.

### 3.4 Aufgabe 4

$$\int \cos 3x \, dx = \dots$$

Hier kommt man nur mit der Summen- oder der Konstantenregel nicht weiter. Die Aufleitung zu  $\cos x$  wäre  $\sin x$ . Hier „stört“ jedoch die 3. Bildet man testweise die Ableitung zu  $g(x) = \sin 3x$ , dann erhält man mit Hilfe der Kettenregel:  $g'(x) = 3 \cdot \cos 3x$ . Das ist genau das 3-fache der zu integrierenden Funktion. Die Stammfunktion ist demnach  $\frac{1}{3}$  von  $g(x)$ .

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \cdot \sin 3x + c$$

### 3.5 Aufgabe 5

$$\int e^{5x} \, dx = \dots$$

Auch hier kommt man nur mit der Summen- oder der Konstantenregel nicht weiter. Die Aufleitung zu  $e^x$  wäre  $e^x$ . Hier „stört“ nur die 5. Bildet man testweise die Ableitung zu  $g(x) = e^{5x}$ , dann erhält man mit Hilfe der Kettenregel:  $g'(x) = 5 \cdot e^{5x}$ . Das ist genau das 5-fache der zu integrierenden Funktion. Die Stammfunktion ist demnach  $\frac{1}{5}$  von  $g(x)$ .

$$\int e^{5x} \, dx = \frac{1}{5} \cdot e^{5x} + c$$

### 3.6 Aufgabe 6

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \dots$$

Hier kommt man mit der *Integration durch Substitution* weiter. Es gibt eine „innere“ Funktion, die wir mit  $g(x)$  bezeichnen können. Es ist der Exponent.

$$g(x) = x^2$$

Hiervon benötigen wir auch die Ableitung.

$$g'(x) = 2x$$

Wir müssen nun prüfen, ob das zum Ansatz für die Integration durch Substitution passt.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int e^{\underbrace{x^2}_{g(x)}} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)} dx$$

Vergleicht man das Ergebnis mit der zu integrierenden Funktion, dann stimmt das bis auf den Faktor 2 überein. Die kann man aber einbauen, indem man den Faktor  $\frac{1}{2}$  zum Ausgleich vor das Integral schreibt. Wir können damit substituieren mit:

$$u = g(x) = x^2$$

Setzen wir das ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \cdot \int e^u du \\ \int x \cdot e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \cdot e^u + c \end{aligned}$$

Jetzt kann zurücksubstituiert werden.

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \cdot \int 2x \cdot e^{x^2} dx \\ \int x \cdot e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \cdot e^u + c \\ \int x \cdot e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + c \end{aligned}$$

### 3.7 Aufgabe 7

$$\int 3x \cdot \cos x dx = \dots$$

Hier kann man erfolgreich mit der Methode der *Partiellen Integration* arbeiten. Wir wählen folgende Hilfsfunktionen:

$$u(x) = 3x \quad \text{und} \quad v'(x) = \cos x$$

Wir erhalten dann durch Ab- bzw. Aufleiten der Hilfsfunktionen:

$$u'(x) = 3 \quad \text{und} \quad v(x) = \sin x$$

Die Formel für die Partielle Integration kann angewendet werden.

$$\begin{aligned} \int u(x) \cdot v'(x) \, dx &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx \\ \int 3x \cdot \cos x \, dx &= 3x \cdot \sin x - \int 3 \cdot \sin x \, dx \\ \int 3x \cdot \cos x \, dx &= 3x \cdot \sin x - 3 \cdot (-\cos x) + c \\ \int 3x \cdot \cos x \, dx &= 3x \cdot \sin x + 3 \cdot \cos x + c \end{aligned}$$

### 3.8 Aufgabe 8

$$\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2} \, dx = \dots$$

Bei dieser Funktion empfiehlt sich die Methode der *Integration durch Substitution*. Als innere Funktion  $g(x)$  wählen wir den Klammerinhalt im Nenner.

$$g(x) = 2 + x^3$$

Wir bestimmen die zugehörige Ableitung.

$$g'(x) = 3x^2$$

Nun muss geprüft werden, inwieweit das zum Ansatz der Integration durch Substitution passt.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int \underbrace{\frac{1}{(2+x^3)^2}}_{g(x)} \cdot \underbrace{3x^2}_{g'(x)} \, dx$$

Bis auf die 3, die zu viel da ist, passt alles. Die kann durch  $\frac{1}{3}$  vor dem Integral kompensiert werden. Wir können substituieren.

$$u = g(x) = 2 + x^3$$

Damit erhalten wir beim Einsetzen:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2} dx &= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{u^2} du \\ \int \frac{x^2}{(2+x^3)^2} dx &= \frac{1}{3} \cdot \int u^{-2} du \\ \int \frac{x^2}{(2+x^3)^2} dx &= \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot u^{-1} + c \\ \int \frac{x^2}{(2+x^3)^2} dx &= -\frac{1}{3u} + c\end{aligned}$$

Jetzt kann zurücks substituiert werden.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2} dx &= -\frac{1}{3u} + c \\ \int \frac{x^2}{(2+x^3)^2} dx &= -\frac{1}{3 \cdot (2+x^3)} + c \\ \int \frac{x^2}{(2+x^3)^2} dx &= -\frac{1}{6+3x^3} + c\end{aligned}$$