Integrationsübungen mit Lösungen

Wolfgang Kippels

27. Oktober 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einleitung

An dieser Stelle sollen übungshalber diverse unbestimmte Integrale berechnet werden. Die notwendigen Grundlagen zur Integralrechnung finden Sie hier:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/integral.pdf

Für die Lösung einiger Aufgaben sind auch Kenntnisse zu weitergehenden Integrationsmethoden erforderlich. Informationen dazu finden Sie hier:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/int-meth.pdf

Etwas einfachere Übungsaufgaben sind auch noch hier zu finden:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/inte_un.pdf

3 Aufgaben

3.1 Aufgabe 1

$$\int 5x - 7 \;\mathrm{d}x = \dots$$

3.2 Aufgabe 2

$$\int e^x - \sin x \;\mathrm{d}x = \dots$$

3.3 Aufgabe 3

$$\int 4x^7 + e^2 \;\mathrm{d}x = \dots$$

3.4 Aufgabe 4

$$\int \cos 3x \;\mathrm{d}x = \dots$$

3.5 Aufgabe 5

$$\int e^{5x} \;\mathrm{d}x = \dots$$

3.6 Aufgabe 6

$$\int x \cdot e^{x^2} \;\mathrm{d}x = \dots$$

3.7 Aufgabe 7

$$\int 3x \cdot \cos x \;\mathrm{d}x = \dots$$

3.8 Aufgabe 8

$$\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2} \,\mathrm{d}x = \dots$$

4 Lösungen der Aufgaben

4.1 Aufgabe 1

Für diese Aufgabe benötigt man nur die Summen- und die Konstantenregel.

$$\int 5x - 7 \, \mathrm{d}x = \frac{5}{2}x^2 - 7x + c$$

4.2 Aufgabe 2

Für diese Aufgabe benötigt man nur die Summen- und die Konstantenregel.

$$\int e^x - \sin x \, \mathrm{d}x = e^x + \cos x + c$$

4.3 Aufgabe 3

Für diese Aufgabe benötigt man nur die Summen- und die Konstantenregel.

$$\int 4x^7 + e^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^8 + e^2 \cdot x + c$$

Eine „Falle“ ist das e^2. Manch einer verwechselt das mit e^x oder auch mit x^2. Tatsächlich aber ist e^2 eine Konstante.

4.4 Aufgabe 4

$$\int \cos 3x \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Hier kommt man nur mit der Summen- oder der Konstantenregel nicht weiter. Die Aufleitung zu $\cos x$ wäre $\sin x$. Hier „stört“ jedoch die 3. Bildet man testweise die Ableitung zu $g(x) = \sin 3x$, dann erhält man mit Hilfe der Kettenrgel: $g'(x) = 3 \cdot \cos 3x$. Das ist genau das 3-fache der zu integrierenden Funktion. Die Stammfunktion ist demnach $\frac{1}{3}$ von $g(x)$.

$$\int \cos 3x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \sin 3x + c$$

4.5 Aufgabe 5

$$\int e^{5x} \, \mathrm{d}x = \ldots$$

Auch hier kommt man nur mit der Summen- oder der Konstantenregel nicht weiter. Die Aufleitung zu e^x wäre e^x. Hier „stört“ nur die 5. Bildet man testweise die Ableitung zu $g(x) = e^{5x}$, dann erhält man mit Hilfe der Kettenrgel: $g'(x) = 5 \cdot e^{5x}$. Das ist genau das 5-fache der zu integrierenden Funktion. Die Stammfunktion ist demnach $\frac{1}{5}$ von $g(x)$.

$$\int e^{5x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5} \cdot e^{5x} + c$$

4.6 Aufgabe 6

$$\int x \cdot e^{x^2}\ \mathrm{d}x = \dots$$

Hier kommt man mit der *Integration durch Substitution* weiter. Es gibt eine „innere“ Funktion, die wir mir $g(x)$ bezeichnen können. Es ist der Exponent.

$$g(x) = x^2$$

Hiervon benötigen wir auch die Ableitung.

$$g'(x) = 2x$$

Wir müssen nun prüfen, ob das zum Ansatz für die Integration durch Substitution passt.

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x = \int e^{\underbrace{x^2}_{g(x)}} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)}\ \mathrm{d}x$$

Vergleicht man das Ergebnis mit der zu integrierenden Funktion, dann stimmt das bis auf den Faktor 2 überein. Die kann man aber einbauen, indem man den Faktor $\frac{1}{2}$ zum Ausgleich vor das Integral schreibt. Wir können damit substituieren mit:

$$u = g(x) = x^2$$

Setzen wir das ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int x \cdot e^{x^2}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \cdot \int e^u\ du \\
\int x \cdot e^{x^2}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \cdot e^u + c
\end{aligned}$$

Jetzt kann zurücksubstituiert werden.

$$\begin{aligned}
\int x \cdot e^{x^2}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \cdot \int 2x \cdot e^{x^2}\ \mathrm{d}x \\
\int x \cdot e^{x^2}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \cdot e^u + c \\
\int x \cdot e^{x^2}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + c
\end{aligned}$$

4.7 Aufgabe 7

$$\int 3x \cdot \cos x\ \mathrm{d}x = \dots$$

Hier kann man erfolgreich mit der Methode der *Partiellen Integration* arbeiten. Wir wählen folgende Hilfsfunktionen:

$$u(x) = 3x \qquad \text{und} \qquad v'(x) = \cos x$$

Wir erhalten dann durch Ab- bzw. Aufleiten der Hilfsfunktionen:

$$u'(x) = 3 \qquad \text{und} \qquad v(x) = \sin x$$

Die Formel für die Partielle Integration kann angewendet werden.

$$\begin{aligned}
\int u(x) \cdot v'(x) \;\mathrm{d}x &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \;\mathrm{d}x \\
\int 3x \cdot \cos x \;\mathrm{d}x &= 3x \cdot \sin x - \int 3 \cdot \sin x \;\mathrm{d}x \\
\int 3x \cdot \cos x \;\mathrm{d}x &= 3x \cdot \sin x - 3 \cdot (-\cos x) + c \\
\int 3x \cdot \cos x \;\mathrm{d}x &= 3x \cdot \sin x + 3 \cdot \cos x + c
\end{aligned}$$

4.8 Aufgabe 8

$$\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2} \;\mathrm{d}x = \ldots$$

Bei dieser Funktion empfiehlt sich die Methode der *Integration durch Substitution*. Als innere Funktion $g(x)$ wählen wir den Klammerinhalt im Nenner.

$$g(x) = 2 + x^3$$

Wir bestimmen die zugehörige Ableitung.

$$g'(x) = 3x^2$$

Nun muss geprüft werden, inwieweit das zum Ansatz der Integration durch Substitution passt.

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x) \;\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\underbrace{2+x^3}_{g(x)})^2} \cdot \underbrace{3x^2}_{g'(x)} \;\mathrm{d}x$$

Bis auf die 3, die zu viel da ist, passt alles. Die kann durch $\frac{1}{3}$ vor dem Integral kompensiert werden. Wir können substituieren.

$$u = g(x) = 2 + x^3$$

Damit erhalten wir beim Einsetzen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{u^2}\,du \\
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\cdot\int u^{-2}\,du \\
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot u^{-1}+c \\
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{3u}+c
\end{aligned}$$

Jetzt kann zurücksubstituiert werden.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{3u}+c \\
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{3\cdot(2+x^3)}+c \\
\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{6+3x^3}+c
\end{aligned}$$