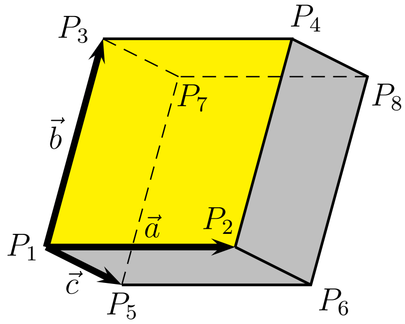
Aufgabe 38

Das Bild eines Würfels soll auf einem Bildschirm dargestellt werden. Gegeben sind die Punkte $P_1(2|1|3)$, $P_2(7|1|3)$ und $P_3(x|5|6)$. Der Vektor $\vec{a}$ verläuft von P_1 nach P_2, der Vektor $\vec{b}$ von P_1 nach P_3. Ausgehend von diesen drei Punkten soll ein Würfel entwickelt werden, dessen **zweidimensionales** Bild nebenstehend skizziert ist.



a) Bestimmen Sie den Parameter x so, dass sich zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein **Rechter Winkel** ergibt.

b) Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **gleich lang** sind. Gehen Sie dabei von $x = 2$ aus.

c) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$, der sowohl senkrecht auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ steht und die gleiche Länge wie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ hat.

d) Bestimmen Sie den Punkt P_4, so dass die Punkte P_1, P_2, P_4, P_3 ein Quadrat ergeben. (Das Quadrat ist im Bild gelb markiert.)

e) Ergänzen Sie das Quadrat aus **d)** zu einem Würfel mit den weiteren Eckpunkten P_5, P_6, P_7 und P_8 gemäß dem obenstehenden Bild. Gehen Sie hierbei von $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ aus.

f) Um den **dreidimensionalen** Würfel auf einem Bildschirm darstellen zu können, soll er auf die **zweidimensionale** Bildschirm-Ebene abgebildet werden. Die Projektion erfolgt nach dieser Abbildungsvorschrift:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x + 0{,}5z \\ y + 0{,}5z \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie zu jedem Punkt $P_1 \ldots P_8$ aus dem $\mathbb{R}^3$ (aus dem dreidimensionalen Raum) den jeweils zugehörigen Punkt $P_1^* \ldots P_8^*$ aus dem $\mathbb{R}^2$ (auf der zweidimensionalen Bildschirmebene)!

g) Wieviele Pixel enthält die gelb markierte parallelogrammförmige Fläche auf dem Bildschirm (im $\mathbb{R}^2$), die durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird? Die Längenenheit auf dem Bildschirm beträgt 100 Pixel.

Lösung:

zu a) Zweckmäßigerweise definiert man zu jedem Punkt $P_n = (n_1|n_2|n_3)$ einen „Aufvektor“ $\vec{P}_n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, der vom Koordinatenursprung zum jeweiligen Punkt P_n verläuft.
Damit können die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie folgt aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 1-1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{b} &= \vec{P}_3 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} x-2 \\ 5-1 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Diese Gleichung kann nach x aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} &= 0 \\ 5 \cdot (x-2) + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 &= 0 \\ 5x - 10 &= 0 \quad | + 10 \\ 5x &= 10 \quad | : 5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

zu b) Zunächst muss $\vec{b}$ bestimmt werden:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gleiche Länge von Vektoren bedeutet gleiche Beträge. Daher werden die Beträge von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3} = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^3} = \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2} = 5$$

Damit ist der Nachweis erbracht, die Längen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich.

zu c) Es gibt zwei grundsätzlich verschiedene Lösungswege. Zum einen kann mit dem Kreuzprodukt, zum anderen mit dem Skalarprodukt gearbeitet werden.

Lösungsvariante 1: Mit Hilfe des Kreuzproduktes wird ein Hilfs-Vektor $\vec{h}$ senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugt. Dieser muss anschließend durch Multiplikation mit einem Skalar auf die richtige Länge gebracht werden.

$$\vec{h} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 0 - 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 4 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Die Länge dieses Hilfsvektors wird bestimmt:

$$\left|\vec{h}\right| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} = \sqrt{0^2 + (-15)^2 + 20^2} = 25$$

Damit kann der Verkürzungsfaktor λ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \lambda \cdot \vec{h} \\ |\vec{c}| &= |\lambda| \cdot \left|\vec{h}\right| \\ 5 &= |\lambda| \cdot 25 \quad | : 25 \\ \frac{1}{5} &= |\lambda| \\ \lambda_{1,2} &= \pm\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Jetzt kann $\vec{c}$ bestimmt werden. Ich beginne mit $\lambda_1 = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \lambda_1 \cdot \vec{h} \\ \vec{c} &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \cdot 0 \\ \frac{1}{5} \cdot (-15) \\ \frac{1}{5} \cdot 20 \end{pmatrix} \\ \vec{c}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$ ergibt sich der Gegenvektor von $\vec{c}_1$, also:

$$\vec{c}_2 = -\vec{c}_1 = -\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Beide Lösungen für $\vec{c}$ sind möglich und auch gleich richtig.

Lösungsvariante 2: Zunächst wird der gesuchte Vektor $\vec{c}$ mit seinen Komponenten festgelegt:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Drei Bedingungen müssen erfüllt werden:

$$\begin{array}{rccc} (1) & \vec{c} & \perp & \vec{a} \\ (2) & \vec{c} & \perp & \vec{b} \\ (3) & |\vec{c}| & = & |\vec{a}| \end{array}$$

Diese Bedingungen führen zu drei Gleichungen:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & = & 0 \\ (2) & \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} & = & 0 \\ (3) & \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} & = & 5 \\ \hline (1) & 5 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 & = & 0 \\ (2) & 0 \cdot c_1 + 4 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 & = & 0 \\ (3) & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 & = & 25 \end{array}$$

Aus (1) folgt sofort:

$$\begin{array}{rcll} 5c_1 & = & 0 & | : 5 \\ c_1 & = & 0 & \end{array}$$

Das Ergebnis kann in beide anderen Gleichungen eingesetzt werden.

$$\begin{array}{lrcl} (2) & 4c_2 + 3c_3 & = & 0 \\ (3) & c_2^2 + c_3^2 & = & 25 \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist **nicht linear**, daher kommt zur Lösung nur das **Einsetzungsverfahren** in Frage. Ich löse Gleichung (2) nach c_2 auf.

$$\begin{array}{rcll} 4c_2 + 3c_3 & = & 0 & | - 3c_3 \\ 4c_2 & = & -3c_3 & | : 4 \\ c_2 & = & -\frac{3}{4} \cdot c_3 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (3) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
c_2^2 + c_3^2 &= 25 \\
\left(-\tfrac{3}{4}\cdot c_3\right)^2 + c_3^2 &= 25 \\
\frac{9}{16}\cdot c_3^2 + c_3^2 &= 25 && |\cdot 16 \\
9c_3^2 + 16c_3^2 &= 400 \\
25c_3^2 &= 400 && |:25 \\
c_3^2 &= 16 && |\sqrt{\ } \\
c_{31/32} &= \pm 4 \\
c_{31} = 4 \qquad & c_{32} = -4
\end{aligned}$$

Mit zwei Lösungen für c_3 erhält man auch zwei Lösungen für c_2, wenn man die Ergebnisse in die umgestellte Gleichung (2) einsetzt.

$$c_{21} = -\frac{3}{4}\cdot c_{31} = -\frac{3}{4}\cdot 4 = -3$$

$$c_{22} = -\frac{3}{4}\cdot c_{32} = -\frac{3}{4}\cdot(-4) = 3$$

Hiermit lauten die beiden Lösungen für $\vec{c}$:

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ oder: } \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

d)

$$\vec{P}_4 = \vec{P}_2 + \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann auch mit $\vec{P}_4 = \vec{P}_3 + \vec{a}$ oder mit $\vec{P}_4 = \vec{P}_1 + \vec{a} + \vec{b}$ o. ä. gerechnet werden.

e)

$$\vec{P}_5 = \vec{P}_1 + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_6 = \vec{P}_2 + \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_7 = \vec{P}_3 + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_8 = \vec{P}_4 + \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

f) Die Abbildung erfolgt nach der angegebenen Abbildungsvorschrift.

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \vec{P}_1^* = \begin{pmatrix} 2 + 0{,}5 \cdot 3 \\ 1 + 0{,}5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \to \vec{P}_2^* = \begin{pmatrix} 7 + 0{,}5 \cdot 3 \\ 1 + 0{,}5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \to \vec{P}_3^* = \begin{pmatrix} 2 + 0{,}5 \cdot 6 \\ 5 + 0{,}5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \to \vec{P}_4^* = \begin{pmatrix} 7 + 0{,}5 \cdot 6 \\ 5 + 0{,}5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \to \vec{P}_5^* = \begin{pmatrix} 2 + 0{,}5 \cdot 7 \\ -2 + 0{,}5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_6 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \to \vec{P}_6^* = \begin{pmatrix} 7 + 0{,}5 \cdot 7 \\ -2 + 0{,}5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_7 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \to \vec{P}_7^* = \begin{pmatrix} 2 + 0{,}5 \cdot 10 \\ 2 + 0{,}5 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_8 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \to \vec{P}_8^* = \begin{pmatrix} 7 + 0{,}5 \cdot 10 \\ 2 + 0{,}5 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

g) Zur Flächenberechnung des Parallelogramms bietet sich das Kreuzprodukt an. Da es jedoch nur im $\mathbb{R}^3$, nicht aber im $\mathbb{R}^2$ definiert ist, muss eine dritte Komponente mit jeweils dem Wert 0 hinzugefügt werden. Zuvor müssen jedoch auch die zweidimensionalen Abbildungen $\vec{a}^*$ und $\vec{b}^*$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmt werden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \vec{a}^* = \begin{pmatrix} 5 + 0{,}5 \cdot 0 \\ 0 + 0{,}5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \to \vec{b}^* = \begin{pmatrix} 0 + 0{,}5 \cdot 3 \\ 4 + 0{,}5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$$

Die zugehörigen erweiterten dreidimensionalen Vektoren heißen dann:

$$\vec{a}^{**} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b}^{**} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 5{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Kreuzprodukt kann gebildet werden.

$$\vec{a}^{**} \times \vec{b}^{**} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 5{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 5{,}5 \\ 0 \cdot 1{,}5 - 5 \cdot 0 \\ 5 \cdot 5{,}5 - 0 \cdot 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27{,}5 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Fläche ist hiervon der Betrag.

$$A = \left| \vec{a}^{**} \times \vec{b}^{**} \right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 27{,}5^2} = 27{,}5\,\text{FE}$$

Wieviele Pixel enthält diese Fläche? Da die **Längeneinheit** 100 Pixel beträgt, muss die **Flächeneinheit** $100 \cdot 100 = 10\,000$ Pixel betragen. Wir berechnen die Pixelzahl Z:

$$Z = 27{,}5 \cdot 10\,000\,\text{Pixel} = 275\,000\,\text{Pixel}$$

$\boxed{\text{Die gelbe Fläche beinhaltet } 275\,000 \text{ Pixel.}}$