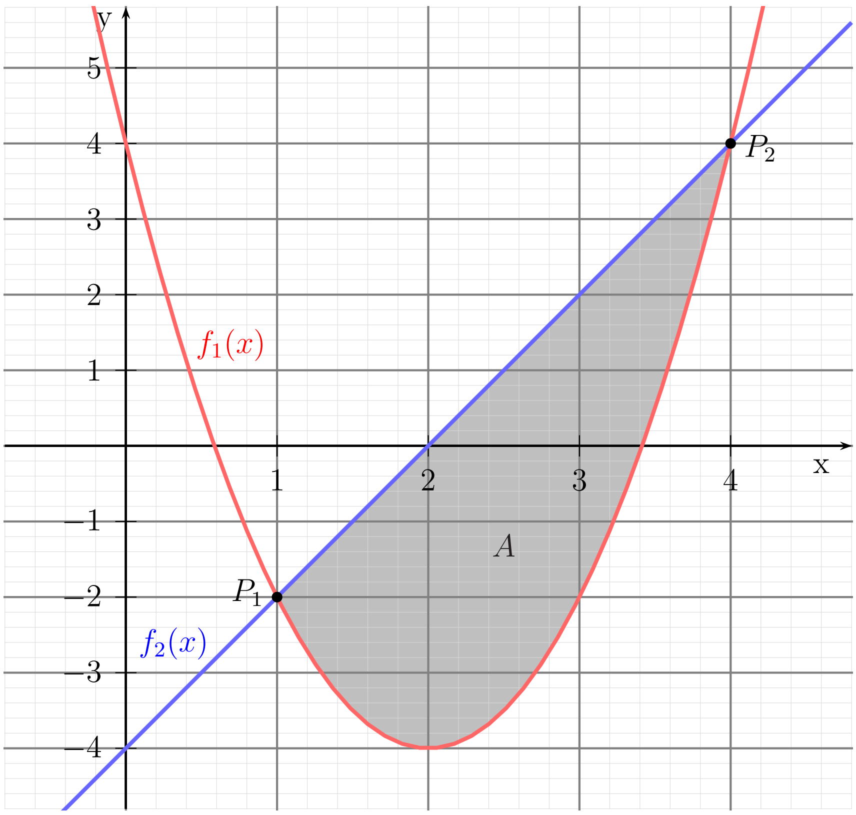
Aufgabe 9

Gegeben sind die Funktionen mit den Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = 2x^2 - 8x + 4 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = 2x - 4$$

Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den beiden Funktionsgraphen eingeschlossen wird! Fertigen Sie vor der Rechnung eine Skizze an!

Lösung:



Schnittpunktbestimmung: Zur Schnittpunktbestimmung müssen die Funktionsterme gleichgesetzt werden.

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= f_2(x) \\
2x^2 - 8x + 4 &= 2x - 4 && | - 2x + 4 \\
2x^2 - 10x + 8 &= 0 && | : 2 \\
x^2 - 5x + 4 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} \\
x_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_1 = 1 & \quad\quad x_2 = 4
\end{aligned}$$

Flächenberechnung: Mit diesen beiden Schnittstellen kann nun der Ansatz für die Flächenberechnung gemacht werden. Die folgende Formel kann dafür verwendet werden:

$$\boxed{A = \int\limits_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x)\ dx}$$

Hierbei ist zu beachten, dass

- die untere Integrationsgrenze unten ans Integralzeichen und die obere oben ans Integralzeichen gesetzt wird.
- die **untere** Funktion von der **oberen** subtrahiert wird.

In diesem Beispiel stimmen die Indizes zufällig schon, wie man aus der Skizze erkennen kann. Wir können die Werte also so einsetzen, wie sie sind.

$$
\begin{aligned}
A &= \int\limits_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x)\ dx \\
&= \int\limits_{1}^{4} (2x-4) - (2x^2 - 8x + 4)\ dx \\
&= \int\limits_{1}^{4} (2x - 4 - 2x^2 + 8x - 4)\ dx \\
&= \int\limits_{1}^{4} (-2x^2 + 10x - 8)\ dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x\right]_1^4 \\
&= \left(-\frac{2}{3}\cdot 4^3 + 5\cdot 4^2 - 8\cdot 4\right) - \left(-\frac{2}{3}\cdot 1^3 + 5\cdot 1^2 - 8\cdot 1\right) \\
&= \frac{16}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right) \\
&= \frac{27}{3} \\
A &= 9
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Fläche beträgt: $\boxed{A = 9\,\mathrm{FE}}$