

## Aufgabe 8

Gegeben sind nachfolgende Vektoren mit  $u = -1$ ,  $v = 7$  und  $w = 1$ .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} u \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ w \end{pmatrix}$$

- a) Sind die drei Vektoren **komplanar**? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung!
- b) Berechnen Sie die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , die die Vektoren miteinander bilden mit  $\alpha = \angle \vec{b}, \vec{c}$ ,  $\beta = \angle \vec{a}, \vec{c}$  und  $\gamma = \angle \vec{a}, \vec{b}$ !
- c) Berechnen Sie die Länge des Vektors  $\vec{d}$  mit  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ !
- d) Bestimmen Sie nun die Parameter  $u$ ,  $v$  und  $w$  so, dass die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  jeweils **rechte Winkel** darstellen!

## Lösung:

a)

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 - 1 - 9 + 21 + 1 + 3 = 8 \neq 0$$

Da die Determinante  $\neq 0$  ist, liegt **keine Komplanarität** vor.

b)

Bestimmung des Winkels  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \alpha &= \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \cos \alpha &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} \\ \alpha &= \arccos \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} \\ \alpha &= \arccos \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}} \\ \alpha &= \arccos \frac{(-1) \cdot (-3) + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}} \\ \alpha &= \arccos \frac{11}{\sqrt{51} \cdot \sqrt{11}} \\ \alpha &= \arccos \frac{11}{\sqrt{561}} \\ \alpha &\approx 62,327^\circ \end{aligned}$$

Bestimmung des Winkels  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \beta &= \vec{a} \cdot \vec{c} \\
 \cos \beta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} \\
 \beta &= \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} \\
 \beta &= \arccos \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}} \\
 \beta &= \arccos \frac{(-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}} \\
 \beta &= \arccos \frac{7}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}} \\
 \beta &= \arccos \frac{7}{11} \\
 \beta &\approx 50,479^\circ
 \end{aligned}$$

Bestimmung des Winkels  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma &= \vec{a} \cdot \vec{b} \\
 \cos \gamma &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\
 \gamma &= \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\
 \gamma &= \arccos \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{vmatrix}} \\
 \gamma &= \arccos \frac{(-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 1^2}} \\
 \gamma &= \arccos \frac{23}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{51}} \\
 \gamma &= \arccos \frac{23}{561} \\
 \gamma &\approx 13,818^\circ
 \end{aligned}$$

c)

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-5)^2 + 11^2 + 3^2} = \sqrt{155} \approx 12,45$$

Die Länge von  $\vec{d}$  beträgt etwa 12,45 Längeneinheiten.

d)

$$\begin{array}{l} (1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ (2) \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ (3) \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}$$

---

$$\begin{array}{l} (1) \quad \begin{pmatrix} u \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ (2) \quad \begin{pmatrix} u \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ w \end{pmatrix} = 0 \\ (3) \quad \begin{pmatrix} -1 \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ w \end{pmatrix} = 0 \end{array}$$

---

$$\begin{array}{l} (1) \quad -u + 3v + 1 = 0 \\ (2) \quad -3u + 3 + w = 0 \\ (3) \quad 3 + v + w = 0 \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem wird in Normalform umgestellt. Man erhält:

$$\begin{array}{l} (1) \quad -u + 3v = -1 \\ (2) \quad -3u + w = -3 \\ (3) \quad v + w = -3 \end{array}$$

Zur Lösung kann jedes beliebige Lösungsverfahren verwendet werden. Ich benutze für den ersten Reduktionsschritt das Additions-/Subtraktionsverfahren. Zunächst soll die Variable  $w$  eliminiert werden. Dazu wird Gleichung (2) von Gleichung (3) subtrahiert.

$$\begin{array}{l} (3) \quad v + w = -3 \quad | \\ (2) \quad -3u + w = -3 \quad | - \\ \hline (4) \quad 3u + v = 0 \end{array}$$

Für die weitere Lösung bietet sich das Einsetzungsverfahren an, da diese Gleichung (4) bequem nach  $v$  umgestellt werden kann.

$$\begin{array}{l} (4) \quad 3u + v = 0 \quad | - 3u \\ (4a) \quad v = -3u \end{array}$$

Diesen Term setze ich in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned} -u + 3v &= -1 \\ -u + 3 \cdot (-3u) &= -1 \\ -u - 9u &= -1 \\ -10u &= -1 \quad | : (-10) \\ u &= 0,1 \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (4a) eingesetzt:

$$v = -3u = -3 \cdot 0,1 = -0,3$$

Dieses Ergebnis wird in Gleichung (3) eingesetzt.

$$\begin{aligned} v + w &= -3 \\ -0,3 + w &= -3 \quad | + 0,3 \\ w &= -2,7 \end{aligned}$$

Zusammengefasste Ergebnisse:  $u = 0,1$   $v = -0,3$   $w = -2,7$