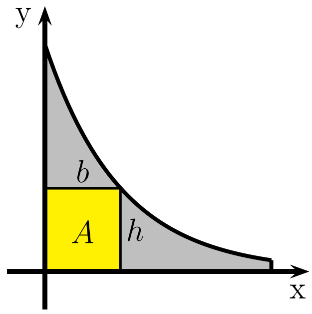
Aufgabe 39

Bei der Herstellung einer Schablone aus einer 3×3 Meter großen Holzplatte ist ein Reststück gemäß nebenstehender Skizze übrig geblieben. Die Oberkante wird in der Einheit Meter durch die Funktion

$$f(x) = 3 \cdot e^{-x}$$

beschrieben. Die Längen in x- und y-Richtung betragen jeweils drei Meter. Aus diesem Reststück soll ein möglichst großes Rechteck A ausgesägt werden. Welche Breite b und welche Höhe h muss dieses Rechteck erhalten?



Lösung:

$$\begin{array}{lrcl} \text{HB:} & A & = & b \cdot h \\ \text{NB:} & h & = & 3 \cdot e^{-b} \end{array}$$

Die NB wird in die HB eingesetzt und nach b abgeleitet. Hierzu ist die Produkt- und die Kettenregel erforderlich.

$$\begin{aligned} A(b) &= b \cdot 3 \cdot e^{-b} \\ A'(b) &= 1 \cdot 3 \cdot e^{-b} + b \cdot 3 \cdot (-1) \cdot e^{-b} \\ A'(b) &= 3 \cdot e^{-b} - 3b \cdot e^{-b} \\ A'(b) &= 3 \cdot e^{-b} \cdot (1-b) \end{aligned}$$

Die Ableitung wird gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned} 3 \cdot e^{-b_E} \cdot (1-b_E) &= 0 \quad | : 3 \\ e^{-b_E} \cdot (1-b_E) &= 0 \end{aligned}$$

Da e^{-b_E} niemals Null sein kann, darf dadurch dividiert werden.

$$\begin{aligned} 1 - b_E &= 0 \\ b_E &= 1 \end{aligned}$$

Mit der zweiten Ableitung (oder einem anderen Kriterium) kann geprüft werden, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt.
Zur Bestimmung der zweitem Ableitung wird die Produkt- und die Kettenregel benötigt.

$$A'(b) = 3 \cdot e^{-b} \cdot (1-b)$$

$$\begin{array}{rcl} u(b) = 3 \cdot e^{-b} & \Rightarrow & u'(b) = -3 \cdot e^{-b} \\ v(b) = 1 - b & \Rightarrow & v'(b) = -1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} A''(b) &= -3 \cdot e^{-b} \cdot (1-b) + 3 \cdot e^{-b} \cdot (-1) \\ &= -3 \cdot e^{-b} \cdot (1-b) - 3 \cdot e^{-b} \\ &= -3 \cdot e^{-b} \cdot (1-b+1) \\ A''(b) &= -3 \cdot e^{-b} \cdot (2-b) \end{aligned}$$

$$A''(1) = -3 \cdot e^{-1} \cdot (2-1) = -3 \cdot e^{-1} \approx -1{,}1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } b_E = 1$$

Die noch fehlende Höhe h_E wird über die NB bestimmt:

$$h_E = 3 \cdot e^{-b_E} = 3 \cdot e^{-1} \approx 1{,}103\,638$$

Zusammenfassung: Die Maße der Rechteckplatte betragen:

$$\boxed{\text{Breite: } b_E = 1\,\text{m, Höhe: } h_E = 3 \cdot e^{-1}\,\text{m} \approx 1{,}104\,\text{m}}$$