

Aufgabe 33

Berechnen Sie für das im Bild gezeigte Fachwerk die Auflagerkräfte und die Stabkräfte. Gegeben sind folgende Werte:

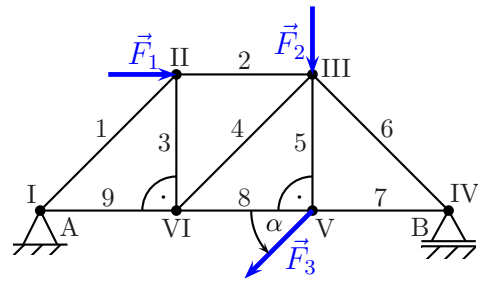
Rastermaß: $a = 3 \text{ m}$

Stablängen der Stäbe 2, 3, 5, 7, 8, 9:

$l_1 = a$

Winkel: $\alpha = 45^\circ$

Kräfte: $F_1 = F_2 = 5\,000 \text{ N}$, $F_3 = 4\,000 \text{ N}$

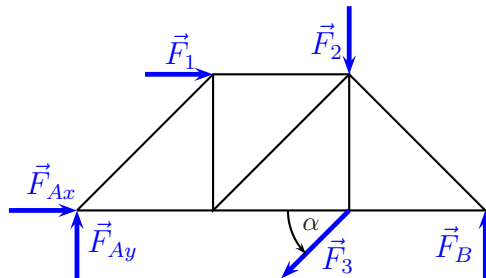


Lösung:

Bestimmung der fehlenden Winkel

Alle Winkel, die keinen Rechten Winkel darstellen, befinden sich jeweils in einem rechtwinkligen Dreieck mit gleichlangen Katheten. Daraus ergibt sich sofort: Diese Winkel haben jeweils 45° .

Berechnung der Auflagerkräfte



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow F_{Ax} + F_1 - F_3 \cdot \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{Ay} - F_2 - F_3 \cdot \sin \alpha + F_B = 0 \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow -F_1 \cdot a - F_2 \cdot 2a - F_3 \cdot 2a \cdot \sin \alpha + F_B \cdot 3a = 0\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung mit den Variablen F_{Ax} , F_{Ay} und F_B .

$$\begin{array}{rcll} (1) & F_{Ax} + F_1 - F_3 \cdot \cos 45^\circ & = & 0 \\ (2) & F_{Ay} - F_2 - F_3 \cdot \sin 45^\circ + F_B & = & 0 \\ (3) & -F_1 \cdot a - F_2 \cdot 2a - F_3 \cdot 2a \cdot \sin 45^\circ + F_B \cdot 3a & = & 0 \\ \hline (1) & F_{Ax} + 5\,000\text{ N} - 4\,000\text{ N} \cdot \cos 45^\circ & = & 0 \\ (2) & F_{Ay} - 5\,000\text{ N} - 4\,000\text{ N} \cdot \sin 45^\circ + F_B & = & 0 \\ (3) & -5\,000\text{ N} \cdot 3\text{ m} - 5\,000\text{ N} \cdot 2 \cdot 3\text{ m} - 4\,000\text{ N} \cdot 2 \cdot 3\text{ m} \cdot \sin 45^\circ + F_B \cdot 3 \cdot 3\text{ m} & = & 0 \\ \hline (1) & F_{Ax} - 2\,171,6\text{ N} & = & 0 \\ (2) & F_{Ay} - 7\,828,4\text{ N} + F_B & = & 0 \\ (3) & -61\,970,6\text{ Nm} + F_B \cdot 9\text{ m} & = & 0\end{array}$$

Aus Gleichung (1) ergibt sich sofort: $F_{Ax} = 2\,171,6\text{ N}$

Aus Gleichung (3) ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} -61\,970,6\text{ Nm} + F_B \cdot 9\text{ m} & = & 0 \\ F_B \cdot 9\text{ m} & = & 61\,970,6\text{ Nm} \end{array} \quad \begin{array}{l} | + 61\,970,6\text{ Nm} \\ | : 9\text{ m} \end{array}$$

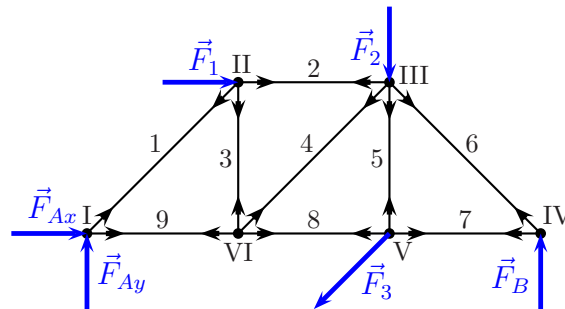
$$F_B = 6\,885,6\text{ N}$$

Dieser Wert wird in Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{aligned} F_{Ay} - 7\,828,4\text{ N} + F_B &= 0 \\ F_{Ay} - 7\,828,4\text{ N} + 6\,885,6\text{ N} &= 0 \\ F_{Ay} - 942,8\text{ N} &= 0 \quad | + 942,8\text{ N} \end{aligned}$$

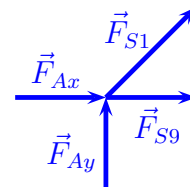
$$F_{Ay} = 942,8\text{ N}$$

Berechnung der Stabkräfte



Knoten I

Bei Knoten I sind die Stabkräfte \vec{F}_{S1} und \vec{F}_{S9} unbekannt. Die Gleichungen für die x - und y -Komponenten können zur Berechnung aufgestellt werden.



$$\begin{aligned} (1) \quad \sum F_x = 0 &\Rightarrow F_{Ax} + F_{S1} \cdot \cos 45^\circ + F_{S9} = 0 \\ (2) \quad \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{Ay} + F_{S1} \cdot \sin 45^\circ = 0 \end{aligned}$$

In die Gleichungen können die bereits bekannten Auflagerreaktionen F_{Ax} und F_{Ay} eingesetzt werden. Aus Gleichung (2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_{Ay} + F_{S1} \cdot \sin 45^\circ &= 0 \\ 942,8\text{ N} + F_{S1} \cdot \sin 45^\circ &= 0 \quad | - 942,8\text{ N} \\ F_{S1} \cdot \sin 45^\circ &= -942,8\text{ N} \quad | : \sin 45^\circ \\ F_{S1} &= -\frac{942,8\text{ N}}{\sin 45^\circ} \end{aligned}$$

$$F_{S1} = -1\,333,3\text{ N} \quad (\text{Druckstab})$$

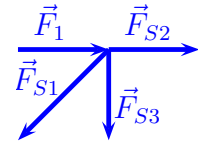
Dieser Wert für F_{S1} wird ebenso wie der zuvor berechnete Wert für F_{Ax} in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{aligned} F_{Ax} + F_{S1} \cdot \cos 45^\circ + F_{S9} &= 0 \\ -2\,171,6\text{ N} - 1\,333,3\text{ N} \cdot \cos 45^\circ + F_{S9} &= 0 \\ -3\,114,4\text{ N} + F_{S9} &= 0 \quad | + 3\,114,4\text{ N} \end{aligned}$$

$$F_{S9} = 3\,114,4\text{ N} \quad (\text{Zugstab})$$

Knoten II

Bei Knoten II sind die Stabkräfte \vec{F}_{S2} und \vec{F}_{S3} unbekannt. Die Gleichungen für die x - und y -Komponenten können zur Berechnung aufgestellt werden.



$$\begin{aligned}(1) \quad \sum F_x = 0 &\Rightarrow F_1 + F_{S2} - F_{S1} \cdot \cos 45^\circ = 0 \\(2) \quad \sum F_y = 0 &\Rightarrow -F_{S1} \cdot \sin 45^\circ - F_{S3} = 0\end{aligned}$$

Aus Gleichung (1) kann F_{S2} bestimmt werden.

$$\begin{aligned}F_1 + F_{S2} - F_{S1} \cdot \cos 45^\circ &= 0 \\5\,000\text{ N} + F_{S2} - (-1\,333,3\text{ N}) \cdot \cos 45^\circ &= 0 \\5\,942,8\text{ N} + F_{S2} &= 0 \quad | -5\,942,8\text{ N}\end{aligned}$$

$$F_{S2} = -5\,942,8\text{ N} \quad (\text{Druckstab})$$

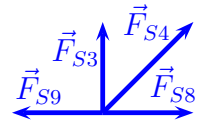
Aus Gleichung (2) kann F_{S3} bestimmt werden.

$$\begin{aligned}-F_{S1} \cdot \sin 45^\circ - F_{S3} &= 0 \\-(-1\,333,3\text{ N}) \cdot \sin 45^\circ - F_{S3} &= 0 \\942,8\text{ N} - F_{S3} &= 0 \quad | -942,8\text{ N} \\-F_{S3} &= -942,8\text{ N} \quad | \cdot (-1)\end{aligned}$$

$$F_{S3} = 942,8\text{ N} \quad (\text{Zugstab})$$

Knoten VI

Bei Knoten VI sind die Stabkräfte \vec{F}_{S4} und \vec{F}_{S8} unbekannt. Die Gleichungen für die x - und y -Komponenten können zur Berechnung aufgestellt werden.



$$\begin{aligned}(1) \quad \sum F_x = 0 &\Rightarrow -F_{S9} + F_{S4} \cdot \cos 45^\circ + F_{S8} = 0 \\(2) \quad \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_{S3} + F_{S4} \cdot \sin 45^\circ = 0\end{aligned}$$

Aus Gleichung (2) kann F_{S4} bestimmt werden.

$$\begin{aligned}F_{S3} + F_{S4} \cdot \sin 45^\circ &= 0 \\942,8\text{ N} + F_{S4} \cdot \sin 45^\circ &= 0 \quad -942,8\text{ N} \\F_{S4} \cdot \sin 45^\circ &= -942,8\text{ N} \quad | : \sin 45^\circ\end{aligned}$$

$$F_{S4} = -1\,333,3\text{ N} \quad (\text{Druckstab})$$

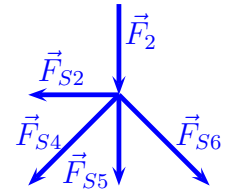
Dieser Wert für F_{S4} wird in Gleichung (1) eingesetzt, damit F_{S8} bestimmt werden kann.

$$\begin{aligned}-F_{S9} + F_{S4} \cdot \cos 45^\circ + F_{S8} &= 0 \\-3\,114,4\text{ N} - 1\,333,3\text{ N} \cdot \cos 45^\circ + F_{S8} &= 0 \\-4\,057,2\text{ N} + F_{S8} &= 0 \quad | +4\,057,2\text{ N}\end{aligned}$$

$$F_{S8} = 4\,057,2\text{ N} \quad (\text{Zugstab})$$

Knoten III

Bei Knoten **III** sind die Stabkräfte \vec{F}_{S5} und \vec{F}_{S6} unbekannt. Die Gleichungen für die x - und y -Komponenten können zur Berechnung aufgestellt werden.



$$\begin{aligned} (1) \quad \sum F_x = 0 &\Rightarrow -F_{S2} - F_{S4} \cdot \cos 45^\circ + F_{S6} \cdot \cos 45^\circ = 0 \\ (2) \quad \sum F_y = 0 &\Rightarrow -F_2 - F_{S4} \cdot \sin 45^\circ - F_{S5} - F_{S6} \cdot \sin 45^\circ = 0 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (1) kann F_{S6} bestimmt werden.

$$\begin{aligned} -F_{S2} - F_{S4} \cdot \cos 45^\circ + F_{S6} \cdot \cos 45^\circ &= 0 \\ -(-5\,942,8 \text{ N}) - (-1\,333,3 \text{ N}) \cdot \cos 45^\circ + F_{S6} \cdot \cos 45^\circ &= 0 \\ 6\,885,6 \text{ N} + F_{S6} \cdot \cos 45^\circ &= 0 & | -6\,885,6 \text{ N} \\ F_{S6} \cdot \cos 45^\circ &= -6\,885,6 \text{ N} & | : \cos 45^\circ \end{aligned}$$

$$F_{S6} = -9\,737,7 \text{ N} \quad (\text{Druckstab})$$

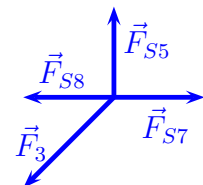
Dieser Wert für F_{S6} wird in Gleichung (2) eingesetzt, damit F_{S5} bestimmt werden kann.

$$\begin{aligned} -F_2 - F_{S4} \cdot \sin 45^\circ - F_{S5} - F_{S6} \cdot \sin 45^\circ &= 0 \\ -5\,000 \text{ N} - (-1\,333,3 \text{ N}) \cdot \sin 45^\circ - F_{S5} - (-9\,737,7 \text{ N}) \cdot \sin 45^\circ &= 0 \\ 2\,818,4 \text{ N} - F_{S5} &= 0 & | -2\,818,4 \text{ N} \\ -F_{S5} &= -2\,818,4 \text{ N} & | \cdot (-1) \end{aligned}$$

$$F_{S5} = 2\,818,4 \text{ N} \quad (\text{Zugstab})$$

Knoten V

Bei Knoten **V** ist nur noch die Stabkraft \vec{F}_{S7} unbekannt. Die Gleichungen für die x - und y -Komponenten können zur Berechnung aufgestellt werden. Es genügt jedoch die Gleichung für die x -Komponenten.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{S8} - F_3 \cdot \cos 45^\circ + F_{S7} = 0$$

Die bekannten Werte werden eingesetzt, F_{S7} kann berechnet werden.

$$\begin{aligned} -4\,057,2 \text{ N} - 4\,000 \text{ N} \cdot \cos 45^\circ + F_{S7} &= 0 \\ -6\,885,6 \text{ N} + F_{S7} &= 0 & | +6\,885,6 \text{ N} \end{aligned}$$

$$F_{S7} = 6\,885,6 \text{ N} \quad (\text{Zugstab})$$