

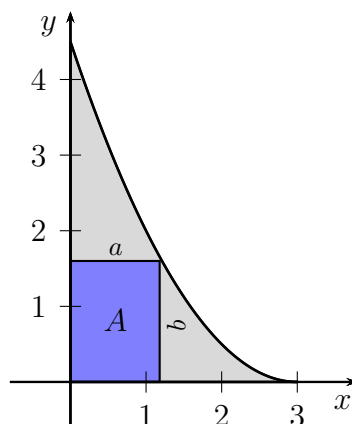
Aufgabe 31

Eine Glasscherbe mit einem rechten Winkel hat eine parabelförmige Bruchkante. Die Parabel hat bei der Nullstelle $x_0 = 3$ ihren Scheitelpunkt und schneidet bei $y_0 = 4,5$ die y -Achse. Die Einheit ist dabei Dezimeter. Aus dieser Scherbe soll eine **möglichst große rechteckige Fläche A** herausgeschnitten werden, wie nebenstehend dargestellt.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel!

b) Bestimmen Sie die Seitenlängen a und b des optimalen Rechtecks! Gehen Sie dabei von der Funktion $f(x) = 0,5x^2 - 3x + 4,5$ aus.

c) Wieviel Prozent des Glases fällt dabei als ungenutzter Verschnitt an?



Lösung:

zu a) (Variante 1)

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^2 + bx + c \\f'(x) &= 2ax + b\end{aligned}$$

Zwei Bedingungen erhält man aus dem Scheitelpunkt (Tiefpunkt):

$$\begin{aligned}(1) \quad f(3) &= 0 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0 \\(2) \quad f'(3) &= 0 \Rightarrow 2a \cdot 3 + b = 0\end{aligned}$$

Die dritte Bedingung ergibt sich aus dem y -Achsenabschnitt y_0 .

$$(3) \quad f(0) = 4,5 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4,5$$

Aus dieser Bedingung ergibt sich sofort c .

$$c = 4,5$$

Dieser Wert wird in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt.

$$\begin{array}{r} (1) \quad 9a + 3b + c = 0 \\ (2) \quad 6a + b = 0 \\ \hline (1) \quad 9a + 3b + 4,5 = 0 \\ (2) \quad 6a + b = 0 \\ \hline (1) \quad 9a + 3b = -4,5 \\ (2) \quad 6a + b = 0 \end{array}$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems kann Gleichung (2) mit 3 multipliziert werden, dann können die Gleichungen voneinander subtrahiert werden.

$$\begin{array}{r} (1) \quad 9a + 3b = -4,5 \\ (2) \quad 6a + b = 0 \quad | \cdot 3 \\ \hline (1) \quad 9a + 3b = -4,5 \quad | - \\ (2) \quad 18a + 3b = 0 \quad | \\ \hline 9a = 4,5 \quad | : 9 \\ a = 0,5 \end{array}$$

Der Parameter b kann mit Gleichung (2) bestimmt werden.

$$\begin{aligned}6a + b &= 0 \\ 6 \cdot 0,5 + b &= 0 \\ 3 + b &= 0 \quad | - 3 \\ b &= -3\end{aligned}$$

Hiermit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = 0,5x^2 - 3x + 4,5$

zu a) (Variante 2) Alternativ kann die Funktionsgleichung auch über die **Scheitelpunktform** der Funktionsgleichung bestimmt werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \\ f(x) &= a \cdot (x - 3)^2 + 0 \\ &= a \cdot (x^2 - 6x + 9) \\ f(x) &= ax^2 - 6ax + 9a \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von a werden die Koordinaten des Schnittpunktes eingesetzt.

$$\begin{aligned} f(0) &= y_0 \\ a \cdot 0^2 - 6a \cdot 0 + 9a &= 4,5 \\ 9a &= 4,5 \quad | : 9 \\ a &= 0,5 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis wird in die bisherige Funktionsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 - 6ax + 9a \\ &= 0,5x^2 - 6 \cdot 0,5x + 9 \cdot 0,5 \\ f(x) &= 0,5x^2 - 3x + 4,5 \end{aligned}$$

zu b) Die **Hauptbedingung** ist die zu optimierende Rechteckfläche.

$$\text{HB: } A = a \cdot b$$

Die **Nebenbedingung** ist die Funktionsgleichung, da ja der Eckpunkt rechts oben auf dem Funktionsgraphen liegt.

$$\text{NB: } b = f(a) = 0,5a^2 - 3a + 4,5$$

Die Nebenbedingung ist schon nach b umgestellt und kann daher sofort in die Hauptbedingung eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} A &= a \cdot b \\ &= a \cdot (0,5a^2 - 3a + 4,5) \\ A(a) &= 0,5a^3 - 3a^2 + 4,5a \\ A'(a) &= 1,5a^2 - 6a + 4,5 \\ 0 &= 1,5a^2 - 6a + 4,5 \quad | : 1,5 \\ 0 &= a^2 - 4a + 3 \\ a_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ &= 2 \pm 1 \\ a_1 &= 1 \quad a_2 = 3 \end{aligned}$$

Man sollte hier sofort erkennen, dass der Wert $a_2 = 3$ nicht als Lösung in Frage kommt, da damit kein Rechteck zustande kommt. Dann muss geprüft werden, ob tatsächlich

ein **Maximum** vorliegt. Das kann am einfachsten mit der 2. Ableitung geprüft werden. Diese muss zunächst gebildet werden.

$$\begin{aligned} A'(a) &= 1,5a^2 - 6a + 4,5 \\ A''(a) &= 3a - 6 \end{aligned}$$

Der gefundene Wert für a wird nun in die zweite Ableitung eingesetzt. Hat der Schüler $a_2 = 3$ noch nicht ausgeschlossen, muss er dies mit beiden Werten für a machen.

$$\begin{aligned} A''(a_1) &= 3 \cdot 1 - 6 = -3 < 0 \Rightarrow \text{Maximum bei } a_1 = 1 \\ A''(a_2) &= 3 \cdot 3 - 6 = 3 > 0 \Rightarrow \text{Minimum bei } a_2 = 3 \end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung liegt also bei $a_1 = 1$. Der zugehörige b -Wert muss noch bestimmt werden.

$$b_1 = A(a_1) = 0,5a_1^3 - 3a_1^2 + 4,5a_1 = 0,5 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4,5 \cdot 1 = 2$$

Zusammengefasstes Ergebnis: $a = 1 \text{ dm}$ $b = 2 \text{ dm}$

zu c) Hierzu müssen die Rechteckfläche sowie die Gesamtfläche der Glasscherbe bestimmt und zueinander ins Verhältnis gesetzt werden.

$$A_{\text{Rechteck}} = a \cdot b = 1 \text{ dm} \cdot 2 \text{ dm} = 2 \text{ dm}^2$$

Die Scherbenfläche kann mit einem Integral bestimmt werden.

$$\begin{aligned} A_{\text{Scherbe}} &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\ &= \int_0^3 0,5x^2 - 3x + 4,5 dx \\ &= \left[\frac{0,5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4,5x \right]_0^3 \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \right]_0^3 \\ &= \left(\frac{1}{6} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 + \frac{9}{2} \cdot 3 \right) - \left(\frac{1}{6} \cdot 0^3 - \frac{3}{2} \cdot 0^2 + \frac{9}{2} \cdot 0 \right) \\ &= (4,5 - 13,5 + 13,5) - 0 \\ A_{\text{Scherbe}} &= 4,5 \end{aligned}$$

Die Fläche der Scherbe beträgt $A_{\text{Scherbe}} = 4,5 \text{ dm}^2$.

Der Verschnitt ist die Differenz zwischen der Scherbenfläche und dem Rechteck.

$$A_{\text{Rest}} = A_{\text{Scherbe}} - A_{\text{Rechteck}} = 4,5 \text{ dm}^2 - 2 \text{ dm}^2 = 2,5 \text{ dm}^2$$

Hiermit kann der Prozentanteil berechnet werden.

$$p = \frac{A_{\text{Rest}}}{A_{\text{Scherbe}}} \cdot 100\% = \frac{2,5 \text{ dm}^2}{4,5 \text{ dm}^2} \cdot 100\% \approx 55,6\%$$

Der Verschnitt beträgt etwa 55,6%.