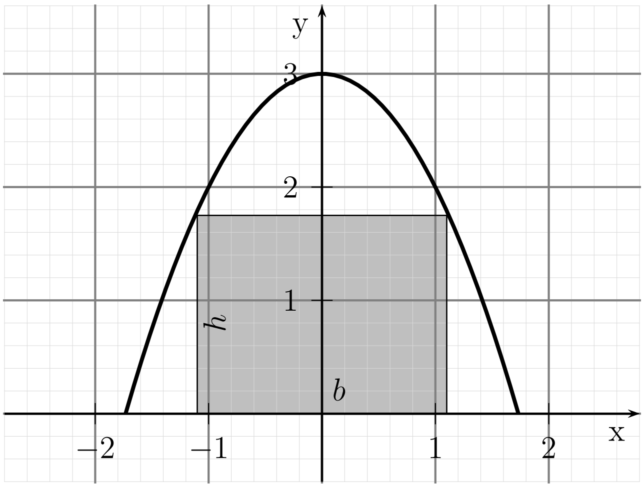
Aufgabe 29

Unter einem parabelförmigen Gewölbe entsprechend der Funktion

$$f(x) = 3 - x^2$$

(in Metern) sollen Container mit rechteckigem Querschnitt abgestellt werden.



a) Welche Breite b und welche Höhe h sollen die Container haben, damit möglichst viel hinein passt?

b) Wieviel Prozent der Fläche unter dem Gewölbe nimmt die Querschnittfläche der Container ein?

Achtung! Die Fläche in der Skizze zeigt **nicht** die **optimale** Fläche!

Erwartete Schülerleistungen:

Lösung zu a)
Aufstellen der Hauptbdingung:

$$\text{HB:} \quad A = b \cdot h = 2x \cdot y$$

Aufstellen der Nebenbedingung:

$$\text{NB:} \quad y = 3 - x^2$$

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung:

$$\begin{aligned} A &= 2x \cdot (3 - x^2) \\ A(x) &= 6x - 2x^3 \\ A'(x) &= 6 - 6x^2 \\ A''(x) &= -12x \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für das Auftreten eines Maximums ist das Null-Werden der ersten Ableitung.

$$\begin{array}{rcll} A'(x_E) &=& 0 & \\ 6 - 6x_E^2 &=& 0 & \quad |-6 \\ -6x_E^2 &=& -6 & \quad |:(-6) \\ x_E^2 &=& 1 & \quad |\sqrt{} \\ x_{E1/2} &=& \pm 1 & \\ x_{E1} = 1 & & x_{E2} = -1 & \end{array}$$

Die Lösung $x_{E2} = -1$ entfällt, da die Breite nicht negativ sein kann.

Es muss geprüft werden, ob tatsächlich wie gewünscht ein **Maximum** vorliegt.

$$f''(1) = -12 \cdot 1 = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } x_{E1} = 1$$

Die gesuchten Größen b und h werden bestimmt:

$$b = 2x_E = 2 \cdot 1 = 2$$

$$h = f(x_E) = 3 - 1^2 = 2$$

Zusammengefasst: $\boxed{b = 2\,\mathrm{m}}$ $\boxed{h = 2\,\mathrm{m}}$

Lösung zu b)
Damit kann die Querschnittfläche der Container bestimmt werden:

$$A_C = b \cdot h = 2\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m}^2$$

Die Gesamtfläche unter der Kurve kann mit dem bestimten Integral berechnet werden. Dazu benötigt man die Nullstellen der Funktion als Integrationsgrenzn.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ 3 - x_0^2 &= 0 \\ x_0^2 &= 3 \\ x_{01/02} &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Hiermit kann die Gesamtfläche A_p unter der Parabel aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} A_P &= \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3 - x^2 \; dx \\ &= \left[3x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= \left(3 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}^3\right) - \left(3 \cdot (-\sqrt{3}) - \frac{1}{3} \cdot (-\sqrt{3})^3\right) \\ &= \sqrt{3} \cdot (3-1) - (-\sqrt{3}) \cdot (3-1) \\ &= 4 \cdot \sqrt{3} \\ A_P &\approx 6{,}928 \end{aligned}$$

Der Prozentanteil der Containerfläche an der Gesamtfläche wird bestimmt.

$$p = \frac{A_C}{A_P} \cdot 100\% \approx \frac{4\,\mathrm{m}^2}{6{,}928\,\mathrm{m}^2} \cdot 100\% \approx 57{,}735\%$$

Ergebnis: $\boxed{\text{Die Container nutzen 57,735\% der Gesamtfläche.}}$