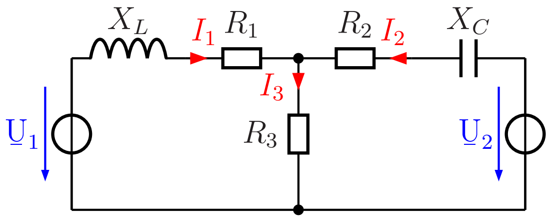
Aufgabe 28

In nebenstehender Wechselstrom-Schaltung sind folgende Werte bekannt:
$\underline{R}_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{R}_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{R}_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{X}_L = j3\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{X}_C = -j3\,\mathrm{k\Omega}$
$\underline{U}_1 = 12\,\mathrm{V}$
$\underline{U}_2 = j12\,\mathrm{V}$



Die Schaltung kann zur Berechnung der Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ mit diesem Komplexen Gleichungssystem beschrieben werden:

$$\boxed{\begin{array}{llrcl} (1) & (\underline{X}_L + \underline{R}_1 + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_1 & +\underline{R}_3 \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_1 \\ (2) & \underline{R}_3 \cdot \underline{I}_1 & +(\underline{X}_C + \underline{R}_2 + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_2 \end{array}}$$

a) Berechnen Sie damit die Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$!
b) Bestimmen Sie die Beträge der Ströme I_1, I_2 und I_3!

Lösung:

Die bekannten Werte werden eingesetzt.

$$\boxed{\begin{array}{lrrcl} (1) & (j3\,\mathrm{k\Omega}+1\,\mathrm{k\Omega}+1\,\mathrm{k\Omega})\cdot\underline{I}_1 & +1\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{I}_2 & = & 12\,\mathrm{V} \\ (2) & 1\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{I}_1 & +(-j3\,\mathrm{k\Omega}+1\,\mathrm{k\Omega}+1\,\mathrm{k\Omega})\cdot\underline{I}_2 & = & j12\,\mathrm{V} \end{array}}$$

Die Klammerausdrücke können noch etwas zusammengefasst werden.

$$\boxed{\begin{array}{lrrcl} (1) & (j3\,\mathrm{k\Omega}+2\,\mathrm{k\Omega})\cdot\underline{I}_1 & +1\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{I}_2 & = & 12\,\mathrm{V} \\ (2) & 1\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{I}_1 & +(-j3\,\mathrm{k\Omega}+2\,\mathrm{k\Omega})\cdot\underline{I}_2 & = & j12\,\mathrm{V} \end{array}}$$

Dieses Gleichungssystem kann nun mit jedem beliebigen Lösungsverfahren aufgelöst werden.

Ich führe als Beispiel die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel durch.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 12\,\mathrm{V} & 1\,\mathrm{k\Omega} \\ j12\,\mathrm{V} & -j3\,\mathrm{k\Omega}+2\,\mathrm{k\Omega} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j3\,\mathrm{k\Omega}+2\,\mathrm{k\Omega} & 1\,\mathrm{k\Omega} \\ 1\,\mathrm{k\Omega} & -j3\,\mathrm{k\Omega}+2\,\mathrm{k\Omega} \end{vmatrix}} \\
&= \frac{12\,\mathrm{V}\cdot(-j3\,\mathrm{k\Omega}+2\,\mathrm{k\Omega}) - j12\,\mathrm{V}\cdot 1\,\mathrm{k\Omega}}{(j3\,\mathrm{k\Omega}+2\,\mathrm{k\Omega})\cdot(-j3\,\mathrm{k\Omega}+2\,\mathrm{k\Omega}) - 1\,\mathrm{k\Omega}\cdot 1\,\mathrm{k\Omega}} \\
&= \frac{-j36\,\mathrm{k\Omega V}+24\,\mathrm{k\Omega V}-j12\,\mathrm{k\Omega V}}{9\,\mathrm{k\Omega}^2+j6\,\mathrm{k\Omega}^2-j6\,\mathrm{k\Omega}^2+4\,\mathrm{k\Omega}^2-1\,\mathrm{k\Omega}^2} \\
&= \frac{-j48\,\mathrm{k\Omega V}+24\,\mathrm{k\Omega V}}{12\,\mathrm{k\Omega}^2} \\
\underline{I}_1 &= 2\,\mathrm{mA} - j4\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (1) eingesetzt, um $\underline{I}_2$ zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
(j3\,\mathrm{k\Omega}+2\,\mathrm{k\Omega})\cdot\underline{I}_1 + 1\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{I}_2 &= 12\,\mathrm{V} \\
(j3\,\mathrm{k\Omega}+2\,\mathrm{k\Omega})\cdot(2\,\mathrm{mA}-j4\,\mathrm{mA}) + 1\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{I}_2 &= 12\,\mathrm{V} \\
j6\,\mathrm{V}+12\,\mathrm{V}+4\,\mathrm{V}-j8\,\mathrm{V}+1\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{I}_2 &= 12\,\mathrm{V} \\
16\,\mathrm{V}-j2\,\mathrm{V}+1\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{I}_2 &= 12\,\mathrm{V} && |-16\,\mathrm{V}+j2\,\mathrm{V} \\
1\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{I}_2 &= -4\,\mathrm{V}+j2\,\mathrm{V} && |:1\,\mathrm{k\Omega} \\
\underline{I}_2 &= -4\,\mathrm{mA}+j2\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

Der Strom $\underline{I}_3$ kann über die Kirchhoffsche Knotenregel am Verbindungspunkt von R_1, R_2 und R_3 bestimmt werden.

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 2\,\mathrm{mA} - j4\,\mathrm{mA} - 4\,\mathrm{mA} + j2\,\mathrm{mA} = -2\,\mathrm{mA} - j2\,\mathrm{mA}$$

Die zugehörigen **Beträge** müssen noch berechnet werden:

$$I_1 = \sqrt{(\mathrm{Re}\,\underline{I}_1)^2 + (\mathrm{Im}\,\underline{I}_1)^2} = \sqrt{(2\,\mathrm{mA})^2 + (-4\,\mathrm{mA})^2} \approx 4{,}472\,\mathrm{mA}$$

$$I_2 = \sqrt{(\mathrm{Re}\ \underline{\mathrm{I}}_2)^2 + (\mathrm{Im}\ \underline{\mathrm{I}}_2)^2} = \sqrt{(-4\,\mathrm{mA})^2 + (2\,\mathrm{mA})^2} \approx 4{,}472\,\mathrm{mA}$$

$$I_3 = \sqrt{(\mathrm{Re}\ \underline{\mathrm{I}}_3)^2 + (\mathrm{Im}\ \underline{\mathrm{I}}_3)^2} = \sqrt{(-2\,\mathrm{mA})^2 + (-2\,\mathrm{mA})^2} \approx 2{,}828\,\mathrm{mA}$$

Zusammengefasste Ergebnisse:

$$\boxed{\underline{\mathrm{I}}_1 = 2\,\mathrm{mA} - j4\,\mathrm{mA}} \qquad \boxed{\underline{\mathrm{I}}_2 = -4\,\mathrm{mA} + j2\,\mathrm{mA}} \qquad \boxed{\underline{\mathrm{I}}_3 = -2\,\mathrm{mA} - j2\,\mathrm{mA}}$$

$$\boxed{I_1 \approx 4{,}472\,\mathrm{mA}} \qquad \boxed{I_2 \approx 4{,}472\,\mathrm{mA}} \qquad \boxed{I_3 \approx 2{,}828\,\mathrm{mA}}$$