Aufgabe 27

Gegeben sind die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ z \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Parameter x, y und z so, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen, also $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\perp\vec{c}$ und $\vec{b}\perp\vec{c}$.

b) Berechnen Sie die **Längen** der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus Frageteil **a)**!

c) Prüfen Sie durch eine Rechnung, ob die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, die Sie in Frageteil **a)** bestimmt haben, **komplanar** sind. Begründen Sie, warum Sie das Ergebnis auch ohne Rechnung erwarten durften!

d) Bestimen Sie nun den Parameter x so, dass die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **komplanar** werden. Gehen Sie dabei von den Parametern y und z aus, die Sie im Frageteil **a)** bestimmt haben.

e) Berechnen Sie den **Winkel** zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die sich aus Frageteil **d)** ergeben haben!

Lösung

Lösung zu a) (15 P.)

Gegeben sind die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ z \end{pmatrix}$$

Aus den drei Bedingungen für das Aufeinander-senkrecht-Stehen von jeweils zwei Vektoren können drei Gleichungen gebildet werden.

$$\begin{array}{ccccccrrrcc}
\vec{a}\perp\vec{b} & \Rightarrow & \vec{a}\cdot\vec{b} & = & 0 & \Rightarrow & x\cdot(-2) & +3\cdot y & +0\cdot 2 & = & 0 \\
\vec{a}\perp\vec{c} & \Rightarrow & \vec{a}\cdot\vec{c} & = & 0 & \Rightarrow & x\cdot 5 & +3\cdot 5 & +0\cdot z & = & 0 \\
\vec{b}\perp\vec{c} & \Rightarrow & \vec{b}\cdot\vec{c} & = & 0 & \Rightarrow & -2\cdot 5 & +y\cdot 5 & +2\cdot z & = & 0
\end{array}$$

Die drei Gleichungen werden in die Normalform gebracht. Man erhält ein Lineargleichungssystem, das mit jedem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden kann.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcr}
(1) & -2x & +3y & & = & 0 \\
(2) & 5x & & & = & -15 \\
(3) & & 5y & +2z & = & 10
\end{array}}$$

Aus Gleichung (2) ergibt sich sofort x:

$$\begin{aligned} 5x &= -15 \quad | : 5 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Dieser Wert wird in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{aligned} -2x + 3y &= 0 \\ -2 \cdot (-3) + 3y &= 0 \\ 6 + 3y &= 0 \quad | - 6 \\ 3y &= -6 \quad | : 3 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Dieser Wert wird in Gleichung (3) eingesetzt.

$$\begin{aligned} 5y + 2z &= 10 \\ 5 \cdot (-2) + 2z &= 10 \\ -10 + 2z &= 10 \quad | + 10 \\ 2z &= 20 \quad | : 2 \\ z &= 10 \end{aligned}$$

Damit lauten die drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Lösung zu b) (9 P.)

Die Längen sind die Beträge der Vektoren.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18} \approx 4{,}242\,641$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} \approx 3{,}464\,102$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \sqrt{5^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{150} \approx 12{,}247\,45$$

Lösung zu c) (11 P.)

Zur Prüfung auf Komplanarität gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten.

Lösungsvariante 1: Mit Determinante

$$\begin{aligned} \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) &= \left| \begin{array}{rrr|rr} -3 & -2 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & 2 \end{array} \right. \\ &= -3 \cdot (-2) \cdot 10 + (-2) \cdot 5 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \cdot 2 - 0 \cdot (-2) \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot (-3) - 10 \cdot 3 \cdot (-2) \\ &= 60 + 0 + 30 - 0 + 30 + 60 \\ \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) &= 180 \neq 0 \end{aligned}$$

Da die Determinante $\neq 0$ ist, sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **nicht komplanar**.

Lösungsvariante 2: Mit Definition der Komplanarität

Diese Lösungsvariante geht von der Definition der Komplanarität aus:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} &= \vec{c} \\ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hierzu kann man die Komponentengleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{lrrcl} (1) & \lambda \cdot (-3) & +\mu \cdot (-2) & = & 5 \\ (2) & \lambda \cdot 3 & +\mu \cdot (-2) & = & 5 \\ (3) & \lambda \cdot 0 & +\mu \cdot 2 & = & 10 \\ \hline (1) & -3\lambda & -2\mu & = & 5 \\ (2) & 3\lambda & -2\mu & = & 5 \\ (3) & & 2\mu & = & 10 \\ \hline \end{array}$$

Aus zwei der drei Gleichungen kann nun λ und μ bestimmt werden. Setzt man die Werte in die dritte Gleichung ein, dann muss sich bei Komplanarität eine wahre Aussage ergeben. Da es schon drei Möglichkeiten gibt, zwei der drei Gleichungen auszuwählen und für jede Kombination noch mehrere Lösungsverfahren möglich sind, wird hier beispielhaft nur ein einziger, jedoch sehr sinnvoller Lösungsweg dargestellt.

Aus Gleichung (3) kann sofort μ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} 2\mu &= 10 \quad |:2 \\ \mu &= 5 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis wird in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{aligned} -3\lambda - 2\mu &= 5 \\ -3\lambda - 2 \cdot 5 &= 5 \\ -3\lambda - 10 &= 5 \quad |+10 \\ -3\lambda &= 15 \quad |:(-3) \\ \lambda &= -5 \end{aligned}$$

Beide Ergebnisse werden in Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{aligned} 3\lambda - 2\mu &= 5 \\ 3 \cdot (-5) - 2 \cdot 5 &= 5 \\ -25 &= 5 \end{aligned}$$

Da dies eine **falsche Aussage** ist, ist **keine Komplanarität** gegeben.

Durch eine einfache Überlegung kann Komplanarität auch ohne Rechnung ausgeschlossen werden:

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen eine Ebene auf. Da Vektor $\vec{c}$ sowohl senkrecht auf $\vec{a}$ als auch senkrecht auf $\vec{b}$ steht, muss er auch senkrecht auf dieser Ebene stehen. Komplanarität würde aber verlangen, dass er **in der gleichen Ebene** liegen müsste, wie die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene.

Lösung zu d) (15 P.)

Gegeben sind diese Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Der Parameter x soll so bestimmt werden, dass die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **komplanar** werden.

Auch zu dieser Aufgabe gibt es zwei Lösungsvarianten.

Lösungsvariante 1: Mit Determinante

$$\begin{array}{rcll}
\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) & = & 0 & \\
\left|\begin{array}{ccc|cc} x & -2 & 5 & x & -2 \\ 3 & -2 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & 2 \end{array}\right. & = & 0 & \\
x \cdot (-2) \cdot 10 - 2 \cdot 5 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \cdot 2 - 0 \cdot (-2) \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot x - 10 \cdot 3 \cdot (-2) & = & 0 & \\
-20x + 30 - 10x + 60 & = & 0 & \\
-30x + 90 & = & 0 & \mid -90 \\
-30x & = & -90 & \mid : (-30) \\
x & = & 3 &
\end{array}$$

Mit $\boxed{x = 3}$ werden die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar.

Lösungsvariante 2: Mit Definition der Komplanarität

Diese Lösungsvariante geht von der Definition der Komplanarität aus:

$$\begin{array}{rcl}
\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} & = & \vec{c} \\
\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Hierzu kann man die Komponentengleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{llrcl}
(1) & \lambda \cdot x & +\mu \cdot (-2) & = & 5 \\
(2) & \lambda \cdot 3 & +\mu \cdot (-2) & = & 5 \\
(3) & \lambda \cdot 0 & +\mu \cdot 2 & = & 10 \\
\hline
(1) & x \cdot \lambda & -2\mu & = & 5 \\
(2) & \quad 3\lambda & -2\mu & = & 5 \\
(3) & & 2\mu & = & 10 \\
\hline
\end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden. Beispielhaft wird nur ein einziger Lösungsweg vorgestellt.

Aus Gleichung (3) kann sofort μ bestimmt werden.

$$\begin{array}{rcll}
2\mu & = & 10 & |:2 \\
\mu & = & 5 &
\end{array}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll}
3\lambda - 2\mu & = & 5 & \\
3\lambda - 2 \cdot 5 & = & 5 & \\
3\lambda - 10 & = & 5 & |+10 \\
3\lambda & = & 15 & |:3 \\
\lambda & = & 5 &
\end{array}$$

Beide Ergebnisse werden nun in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll}
x \cdot \lambda - 2\mu & = & 5 & \\
x \cdot 5 - 2 \cdot 5 & = & 5 & \\
5x - 10 & = & 5 & |+10 \\
5x & = & 15 & |:5 \\
x & = & 3 &
\end{array}$$

Mit $\boxed{x = 3}$ werden die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar.

Lösung zu e) (10 P.)

Gegeben sind diese beiden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist der Winkel zwischen den beiden Vektoren. Die Bestimmung des Winkels φ kann mit Hilfe des nachfolgenden Lehrsatzes erfolgen.

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi &= \vec{a} \cdot \vec{c} \\
\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \cos\varphi &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \cos\varphi &= 3 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 \\
\sqrt{18} \cdot \sqrt{12} \cdot \cos\varphi &= -12 \\
\cos\varphi &= \frac{-\,12}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{12}} \\
\varphi &= \arccos \frac{-\,12}{\sqrt{216}} \\
\varphi &\approx 144{,}736°
\end{aligned}$$

Zusammengefasst: $\boxed{\varphi \approx 144{,}736°}$