

Aufgabe 23 (60 P.)

Gegeben sind die fünf Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -57 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ 12 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie zunächst die Parameter x , y und z so, dass die drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} paarweise aufeinander senkrecht stehen, also $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$.
- b) Berechnen Sie die Länge des Vektors \vec{b} !
- c) Nun soll der Parameter z in \vec{c} so verändert werden, dass die drei Vektoren \vec{c} , \vec{d} und \vec{e} **komplanar** werden.
- d) Berechnen Sie den Winkel φ , den die Vektoren \vec{d} und \vec{e} miteinander bilden!

Lösungen:

Lösung zu a) (20 P.)

Aus den drei Bedingungen für das Aufeinander-senkrecht-Stehen von jeweils zwei Vektoren können drei Gleichungen gebildet werden.

$$\begin{aligned}\vec{a} \perp \vec{b} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow x \cdot (-3) + (-57) \cdot y + (-2) \cdot 12 = 0 \\ \vec{a} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow x \cdot (-4) + (-57) \cdot 6 + (-2) \cdot z = 0 \\ \vec{b} \perp \vec{c} &\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow -3 \cdot (-4) + y \cdot 6 + 12 \cdot z = 0\end{aligned}$$

Die drei Gleichungen werden in die Normalform gebracht. Man erhält ein Lineargleichungssystem, das mit jedem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden kann.

(1)	$-3x$	$-57y$	$=$	24
(2)	$-4x$		$-2z =$	342
(3)		$6y$	$+12z =$	-12

Zur Lösung des Gleichungssystemes kommen mehrere Verfahren in Frage.

Lösungsvariante 1: Einsetzungsverfahren

Gleichung (3) wird nach y umgestellt, das Ergebnis wird in beide anderen Gleichungen eingesetzt.

$$\begin{aligned}6y + 12z &= -12 && | -12z \\ 6y &= -12 - 12z && | :6 \\ y &= -2 - 2z\end{aligned}$$

Einsetzen in (1) und (2):

$$\begin{array}{r} \text{In (1)} \quad -3x - 57 \cdot (-2 - 2z) = 24 \\ \text{In (2)} \quad \quad \quad -4x - 2z = 342 \\ \hline \quad \quad \quad -3x + 114 + 114z = 24 \quad | -114 \\ \quad \quad \quad -4x - 2z = 342 \\ \hline \quad \quad \quad -3x + 114z = -90 \\ \quad \quad \quad -4x - 2z = 342 \end{array}$$

Für den nächsten Reduktionsschritt kommen wieder mehrere Lösungsverfahren in Frage. Ein sinnvolles Verfahren wäre wiederum das Einsetzungsverfahren, indem die zweite Gleichung nach z aufgelöst wird.

$$\begin{aligned}-4x - 2z &= 342 && | +4x \\ -2z &= 342 + 4x && | :(-2) \\ z &= -171 - 2x\end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die andere Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned}-3x + 114z &= -90 \\ -3x + 114 \cdot (-171 - 2x) &= -90 \\ -3x - 19494 - 228x &= -90 && | +19494 \\ -231x &= 19404 && | :(-231) \\ x &= -84\end{aligned}$$

$$z = -171 - 2x = -171 - 2 \cdot (-84) = -3$$

$$y = -2 - 2z = -2 - 2 \cdot (-3) = 4$$

Lösungsvariante 2: Cramersche Regel

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\begin{vmatrix} 24 & -57 & 0 & 24 & -57 \\ 342 & 0 & -2 & 342 & 0 \\ -12 & 6 & 12 & -12 & 6 \\ -3 & -57 & 0 & -3 & -57 \\ -4 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & -57 & 0 & -3 & -57 \\ -4 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & 6 \end{vmatrix}} \\
 &= \frac{-1368 + 288 + 233928}{-36 - 2736} \\
 &= \frac{232848}{-2772} \\
 x &= -84
 \end{aligned}$$

Parameter y kann durch Einsetzen des Ergebnisses in Gleichung (1) bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 -3x - 57y &= 24 \\
 -3 \cdot (-84) - 57y &= 24 \\
 252 - 57y &= 24 & | -252 \\
 -57y &= -288 & | : (-57) \\
 y &= 4
 \end{aligned}$$

Parameter z kann durch Einsetzen des Ergebnisses in Gleichung (3) bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 6y + 12z &= -12 \\
 6 \cdot 4 + 12z &= -12 \\
 24 + 12z &= -12 & | -24 \\
 12z &= -36 & | : 12 \\
 z &= -3
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst: $x = -84 \quad y = 4 \quad z = -3$

Lösung zu b) (10 P.)

Die Länge eines Vektors ist sein Betrag.

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 12^2} = 13$$

Die Länge des Vektors beträgt: **13 Längeneinheiten**

Lösung zu c) (15 P.)

Zur Überprüfung der Komplanarität gibt es zwei unterschiedliche Ansätze, die zu zwei völlig unterschiedlichen Lösungswegen führen.

Lösungsvariante 1:

Die erste Variante geht von der Definition der Komplanarität aus:

$$\lambda \cdot \vec{c} + \mu \cdot \vec{d} = \vec{e}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ z \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hierzu kann man die Komponentengleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{rcl} (1) & \lambda \cdot (-4) & + \mu \cdot 1 = 0 \\ (2) & \lambda \cdot 6 & + \mu \cdot (-3) = -1 \\ (3) & \lambda \cdot z & + \mu \cdot 5 = 4 \\ \hline (1) & -4\lambda & + \mu = 0 \\ (2) & 6\lambda & - 3\mu = -1 \\ (3) & \lambda \cdot z & + 5\mu = 4 \end{array}$$

Gleichung (1) wird nach μ umgestellt:

$$\begin{array}{rcl} -4\lambda + \mu & = & 0 \quad | + 4\lambda \\ \mu & = & 4\lambda \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} \text{In (2)} & 6\lambda & - 3 \cdot 4\lambda = -1 \\ \text{In (3)} & \lambda \cdot z & + 5 \cdot 4\lambda = 4 \\ \hline (2a) & 6\lambda & - 12\lambda = -1 \\ (3a) & \lambda \cdot z & + 20\lambda = 4 \end{array}$$

Aus Gleichung (2a) kann λ berechnet werden.

$$\begin{array}{rcl} 6\lambda & - 12\lambda & = -1 \\ -6\lambda & = & -1 \quad | : (-6) \\ \lambda & = & \frac{1}{6} \end{array}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (3a) eingesetzt:

$$\begin{array}{rcl} \lambda \cdot z + 20\lambda & = & 4 \\ \frac{1}{6} \cdot z + 20 \cdot \frac{1}{6} & = & 4 \quad | \cdot 6 \\ z + 20 & = & 24 \quad | - 20 \\ z & = & 4 \end{array}$$

Lösungsvariante 2:

In dieser Lösungsvariante nutzt man den Lehrsatz aus:

$$\vec{c}, \vec{d} \text{ und } \vec{e} \text{ komplanar} \Leftrightarrow \det(\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}) = 0$$

Diese Determinante wird aufgestellt und gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned} \det(\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}) &= 0 \\ \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \\ z & 5 & 4 \end{vmatrix} &= 0 \\ \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \\ z & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 & 1 \\ 6 & -3 \\ z & 5 \end{matrix} &= 0 \\ 48 - z - 20 - 24 &= 0 \\ 4 &= z \end{aligned}$$

Ergebnis in beiden Varianten: $z = 4$

Lösung zu d) (15 P.)

Die Bestimmung des Winkels φ kann mit Hilfe des nachfolgenden Lehrsatzes erfolgen.

$$\begin{aligned} |\vec{d}| \cdot |\vec{e}| \cdot \cos \varphi &= \vec{d} \cdot \vec{e} \\ \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \cos \varphi &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 4^2} \cdot \cos \varphi &= 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \\ \sqrt{35} \cdot \sqrt{17} \cdot \cos \varphi &= 23 \\ \cos \varphi &= \frac{23}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{17}} \\ \varphi &= \arccos \frac{23}{\sqrt{595}} \\ \varphi &\approx 19,454^\circ \end{aligned}$$

Zusammengefasst: $\varphi \approx 19,454^\circ$