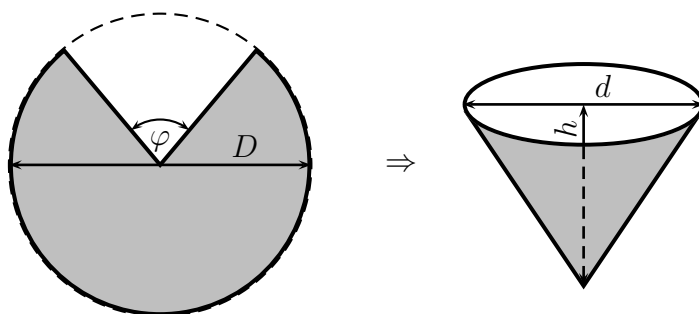


Aufgabe 2

Aus einem kreisförmigen Blechstück mit dem Durchmesser D wird ein Sektor herausgeschnitten. Die Schnittkanten des verbleibenden Blechstückes werden zusammengefügt, so dass ein oben offener Kegel entsteht.



a) Welche Höhe h und welchen Durchmesser d muss dieser Kegel erhalten, damit das Volumen des Kegels möglichst groß wird?

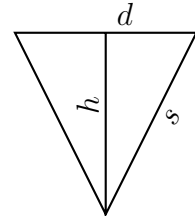
b) Wie groß ist der Winkel φ des ausgeschnittenen Kreissektors?

Lösung:

Teil a) Für die Berechnung des Kegelvolumens V steht folgende Formel zur Verfügung:

$$V = \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h$$

Benennt man die Länge der Seitenlinie des Kegels von der Spitze bis zum kreisförmigen Rand mit s , dann gibt der Satz des Pythagoras einen Zusammenhang zwischen d , h und s an:



$$s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$

Aus der Konstruktionsbeschreibung ergibt sich, dass die Seitenlänge s der Radius der ursprünglichen runden Blechplatte ist, also sein halber Durchmesser $\frac{D}{2}$:

$$s = \frac{D}{2}$$

Hiermit können nun Haupt- und Nebenbedingungen angegeben werden:

$$\begin{aligned} \text{HB:} \quad V &= \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h \\ \text{NB:} \quad \left(\frac{D}{2}\right)^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 \end{aligned}$$

Die Nebenbedingung wird nach d^2 umgestellt, damit das Ergebnis in die Hauptbedingung eingesetzt werden kann.

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{2}\right)^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 \\ \frac{D^2}{4} &= \frac{d^2}{4} + h^2 && | \cdot 4 \\ D^2 &= d^2 + 4h^2 && | - 4h^2 \\ D^2 - 4h^2 &= d^2 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Hauptbedingung und nach h ableiten:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{12} \cdot d^2 \cdot h \\ V(h) &= \frac{\pi}{12} \cdot (D^2 - 4h^2) \cdot h \\ V(h) &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 \cdot h - \frac{\pi}{3} \cdot h^3 \\ V'(h) &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 - \pi \cdot h^2 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist Nullwerden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 - \pi \cdot h_E^2 & | + \pi \cdot h_E^2 \\
 \pi \cdot h_E^2 &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 & | : \pi \\
 h_E^2 &= \frac{D^2}{12} & | \sqrt{} \\
 h_{E1/2} &= \pm \sqrt{\frac{D^2}{12}} \\
 h_{E1/2} &= \pm \frac{D}{\sqrt{12}}
 \end{aligned}$$

Aus praktischen Gründen entfällt die negative Lösung. Übrig bleibt:

$$h_E = \frac{D}{\sqrt{12}} \approx 0,288675D$$

Nun muss geprüft werden, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt. Dies geschieht am einfachsten mit Hilfe der zweiten Ableitung.

$$\begin{aligned}
 V'(h) &= \frac{\pi}{12} \cdot D^2 - \pi \cdot h^2 \\
 V''(h) &= -2\pi \cdot h \\
 V''(h_E) &= -2\pi \cdot \frac{D}{\sqrt{12}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } h_E = \frac{D}{\sqrt{12}}
 \end{aligned}$$

Jetzt fehlt noch der Durchmesser d des Kegels. Zur Berechnung setzen die Schüler das Ergebnis in die umgestellte Nebenbedingung ein.

$$\begin{aligned}
 d^2 &= D^2 - 4h^2 \\
 d_E^2 &= D^2 - 4 \left(\frac{D}{\sqrt{12}} \right)^2 \\
 &= D^2 - 4 \cdot \frac{D^2}{12} \\
 &= D^2 - \frac{1}{3}D^2 \\
 d_E^2 &= \frac{2}{3}D^2 & | \sqrt{} \\
 d_{E1/2} &= \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot D
 \end{aligned}$$

Da Längen stets positiv sind, entfällt die negative Lösung. Es bleibt:

$$d_E = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot D \approx 0,816497D$$

Teil b) Der Umfang des Kreises mit dem Durchmesser d am Kegel ist aus konstruktiven Gründen identisch mit dem Bogenstück des Kreissektors der ursprünglichen Blechplatte mit dem Durchmesser D . Da der gesuchte Winkel φ der Winkel am **weggeschnittenen** Sektor, nicht aber am **übriggebliebenen** Sektor ist, gehört zu diesem der Winkel $(360^\circ - \varphi)$.

An der ursprünglichen Blechplatte mit dem Kreissektor verhalten sich die Bogenstücke wie die zugehörigen Winkel. Nennt man das Bogenstück des übriggebliebenen Sektors b und den Umfang des Vollkreises U , dann ergibt sich damit eine Gleichung zur Bestimmung von φ :

$$\begin{aligned}
 \frac{b}{U} &= \frac{360^\circ - \varphi}{360^\circ} \\
 \frac{\pi \cdot d}{\pi \cdot D} &= \frac{360^\circ - \varphi}{360^\circ} \\
 \frac{d}{D} &= \frac{360^\circ - \varphi}{360^\circ} && | \cdot D \cdot 360^\circ \\
 360^\circ \cdot d &= (360^\circ - \varphi) \cdot D \\
 360^\circ \cdot d &= 360^\circ \cdot D - \varphi \cdot D && | + \varphi \cdot D - 360^\circ \cdot d \\
 \varphi \cdot D &= 360^\circ \cdot D - 360^\circ \cdot d \\
 \varphi \cdot D &= 360^\circ \cdot (D - d) && | : D \\
 \varphi &= \frac{360^\circ \cdot (D - d)}{D}
 \end{aligned}$$

Nun kann der gefundene Wert d_E eingesetzt werden, um den Winkel für das optimale Volumen auszurechnen.

$$\varphi_E = \frac{360^\circ \cdot \left(D - \sqrt{\frac{2}{3}}D\right)}{D} = \frac{360^\circ \cdot D \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{D} = 360^\circ \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 66,06^\circ$$

Zusammengefasst:

$$\varphi_E \approx 66,06^\circ$$