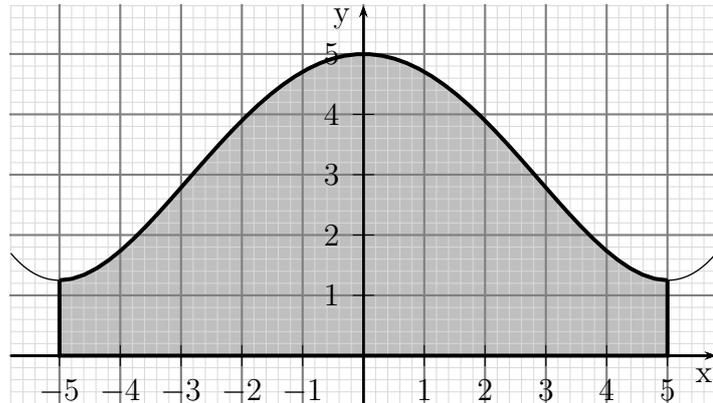


Aufgabe 19

Die Fassade am Giebel eines historischen Gebäudes hat eine obere Begrenzung in der Form eines spiegelsymmetrischen Polynoms 4. Grades. Rechts und links sowie auch unten stellt der Rand der Fassade eine gerade Linie dar. Die Fassade ist 10 Meter breit. In der Mitte hat sie eine Höhe von 5 Metern und an den Rändern beträgt die Höhe jeweils 1,25 Meter. An beiden Rändern hat das begrenzende Polynom jeweils einen Tiefpunkt.



- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms! Stellen Sie diese in der Einheit *Meter* auf, Sie können die Einheiten dann weglassen.
- In welchem Abstand von der Mitte befinden sich die steilsten Stellen? Wie groß ist die Steigung dort? Gehen Sie bei der Berechnung von folgendem Polynom aus:
 $f(x) = 0,006x^4 - 0,3x^2 + 5$
- Die Fassade soll frisch gestrichen werden. Für wieviele Quadratmeter muss Farbe beschafft werden?

Lösung

Teil a) Die allgemeine Form eines symmetrischen Polynoms 4. Grades lautet:

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

Zur Bestimmung von a , c und e sind 3 Bedingungen erforderlich, die aus dem Text herausgelesen werden können. Da Extrempunkte bekannt sind, muss zuvor noch die erste Ableitung bestimmt werden:

$$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$$

Folgende Bedingungen sind bekannt:

$$\begin{array}{lcl} (1) & f(0) = 5 & \Rightarrow e = 5 \\ (2) & f(5) = 1,25 & \Rightarrow 625a + 25c + e = 1,25 \\ (3) & f'(5) = 0 & \Rightarrow 500a + 10c = 0 \end{array}$$

Gleichung (1) wird in (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} (2) & 625a + 25c + 5 & = 1,25 & | - 5 \\ (3) & 500a + 10c & = 0 & \\ \hline (2) & 625a + 25c & = -3,75 & \\ (3) & 500a + 10c & = 0 & \end{array}$$

Ab hier sind mehrere Lösungsmöglichkeiten möglich, beispielsweise folgende:

Gleichung (3) wird nach c umgestellt und in (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} 500a + 10c & = 0 & | - 500a \\ 10c & = -500a & | : 10 \\ c & = -50a & \end{array}$$

Eingesetzt in (2):

$$\begin{array}{rcl} 625a + 25 \cdot (-50a) & = & -3,75 \\ 625a - 1250a & = & -3,75 \\ -625a & = & -3,75 & | : (-625) \\ a & = & 0,006 \end{array}$$

Eingesetzt in die umgestellte Gleichung (2):

$$c = -50a = -50 \cdot 0,006 = -0,3$$

Damit lautet die Funktionsgleichung:

$$f(x) = 0,006x^4 - 0,3x^2 + 5$$

Teil b) Die steilsten Stellen eines Graphen liegen in den Wendepunkten. Wendepunkte können nur da liegen, wo die zweite Ableitung Null wird.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0,006x^4 - 0,3x^2 + 5 \\
 f'(x) &= 0,024x^3 - 0,6x \\
 f''(x) &= 0,072x^2 - 0,6 \\
 f''(x_w) &= 0 \\
 0,072x_w^2 - 0,6 &= 0 && | + 0,6 \\
 0,072x_w^2 &= 0,6 && | : 0,072 \\
 x_w^2 &= \frac{25}{3} = 8,\bar{3} && | \sqrt{} \\
 x_{w1/2} &= \pm \sqrt{\frac{25}{3}} \approx \pm 2,887 \\
 x_{w1} = +\sqrt{\frac{25}{3}} & & x_{w2} = -\sqrt{\frac{25}{3}}
 \end{aligned}$$

Um zu prüfen, ob dort wirklich Wendepunkte vorliegen, kann die dritte Ableitung verwendet werden.

$$f'''(x) = 0,144x$$

Ist $f'''(x_w) \neq 0$, dann liegt dort ein Wendepunkt vor.

$$\begin{aligned}
 f'''(x_{w1}) &= 0,144 \cdot \sqrt{\frac{25}{3}} \approx 0,416 \neq 0 \Rightarrow \text{WP bei } x_{w1} = \sqrt{\frac{25}{3}} \\
 f'''(x_{w2}) &= 0,144 \cdot \left(-\sqrt{\frac{25}{3}}\right) \approx -0,416 \neq 0 \Rightarrow \text{WP bei } x_{w2} = -\sqrt{\frac{25}{3}}
 \end{aligned}$$

Um die Steigung an diesen Stellen zu bestimmen, wird die erste Ableitung verwendet:

$$\begin{aligned}
 f'(x_{w1}) &= 0,024 \cdot \left(\sqrt{\frac{25}{3}}\right)^3 - 0,6 \cdot \sqrt{\frac{25}{3}} = -0,4 \cdot \sqrt{\frac{25}{3}} \approx -1,15 \\
 f'(x_{w2}) &= 0,024 \cdot \left(-\sqrt{\frac{25}{3}}\right)^3 - 0,6 \cdot \left(-\sqrt{\frac{25}{3}}\right) = 0,4 \cdot \sqrt{\frac{25}{3}} \approx 1,15
 \end{aligned}$$

Die Steigung bei $x_{w1} \approx 2,887$ beträgt etwa $-1,15$.

Die Steigung bei $x_{w2} \approx -2,887$ beträgt etwa $1,15$.

Teil c) Die Fläche wird mit dem bestimmten Integral berechnet. Die Grenzen sind bekannt.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-5}^5 f(x) dx \\ &= \int_{-5}^5 0,006x^4 - 0,3x^2 + 5 dx \\ &= [0,0012x^5 - 0,1x^3 + 5x]_{-5}^5 \\ &= (0,0012 \cdot 5^5 - 0,1 \cdot 5^3 + 5 \cdot 5) - (0,0012 \cdot (-5)^5 - 0,1 \cdot (-5)^3 + 5 \cdot (-5)) \\ &= (3,75 - 12,5 + 25) - (-3,75 + 12,5 - 25) \\ &= 16,25 + 16,25 \\ A &= 32,5 \end{aligned}$$

Die Fläche beträgt: $A = 32,5 \text{ m}^2$