Aufgabe 18

Der achsensymmetrische Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades hat im Punkt $W(2|-3)$ einen Wendepunkt. Die Wendetangente verläuft parallel zur Geraden g mit der Funktionsgleichung: $g(x) = 4x - 2$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösung:

Als ganzrationale Funktion 4. Grades hat die gesuchte Funktion diese Normalform:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Bei Achsensymmetrie sind die Koeffizienten bei ungraden Exponenten Null. Berücksichtigt man das, vereinfacht sich die Funktionsgleichung so:

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

Bilden wir noch die benötigten beiden Ableitungen.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + cx^2 + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 2cx \\ f''(x) &= 12ax^2 + 2c \end{aligned}$$

Jetzt können die Bedingungen aufgestellt werden. Beginnen wir mit den Koordinaten des bekannten (Wende-) Punktes $W(2|-3)$.

$$f(2) = -3 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 2^4 + c \cdot 2^2 + e = -3$$

Als nächstes nutzen wir aus, dass es ein **Wende**-Punkt ist. Die zweite Ableitung muss dann dort Null sein.

$$f''(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a \cdot 2^2 + 2c = 0$$

Weiterhin ist die Steigung im Wendepunkt bekannt. Sie kann aus der Geradengleichung der angegebenen Geraden mit 4 entnommen werden.

$$f'(2) = 4 \quad \Rightarrow \quad 4a \cdot 2^3 + 2c \cdot 2 = 4$$

Fasst man die drei Gleichungen zusammen, erhält man ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung.

$$\boxed{\begin{array}{lllll} (1) & 16a & +4c & +e & = -3 \\ (2) & 48a & +2c & & = 0 \\ (3) & 32a & +4c & & = 4 \end{array}}$$

Es bietet sich an, zunächst Gleichung (2) und (3) so zu kombinieren, dass c wegfällt. Dazu dividiere ich Gleichung (3) durch 2 und subtrahiere sie von Gleichung (2).

$$\begin{array}{llllll} (2) & 48a & +2c & = & 0 & \\ (3) & 32a & +4c & = & 4 & |:2 \\ \hline (2) & 48a & +2c & = & 0 & | \\ (3) & 16a & +2c & = & 2 & |- \\ \hline & 32a & & = & -2 & |:32 \\ & a & & = & -0{,}0625 & \end{array}$$

Das Ergebnis kann nun ich Gleichung (2) oder (3) eingesetzt werden, um c zu bestimmen. Ich verwende willkürlich Gleichung (2).

$$\begin{aligned}
48a + 2c &= 0 \\
48 \cdot (-0{,}0625) + 2c &= 0 \\
-3 + 2c &= 0 \qquad |+3 \\
2c &= 3 \qquad |:2 \\
c &= 1{,}5
\end{aligned}$$

Beide Ergebnisse werden nun in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
16a + 4c + e &= -3 \\
16 \cdot (-0{,}0625) + 4 \cdot 1{,}5 + e &= -3 \\
-1 + 6 + e &= -3 \\
5 + e &= -3 \quad |-5 \\
e &= -8
\end{aligned}$$

Hiermit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = -0{,}0625x^4 + 1{,}5x^2 - 8}$