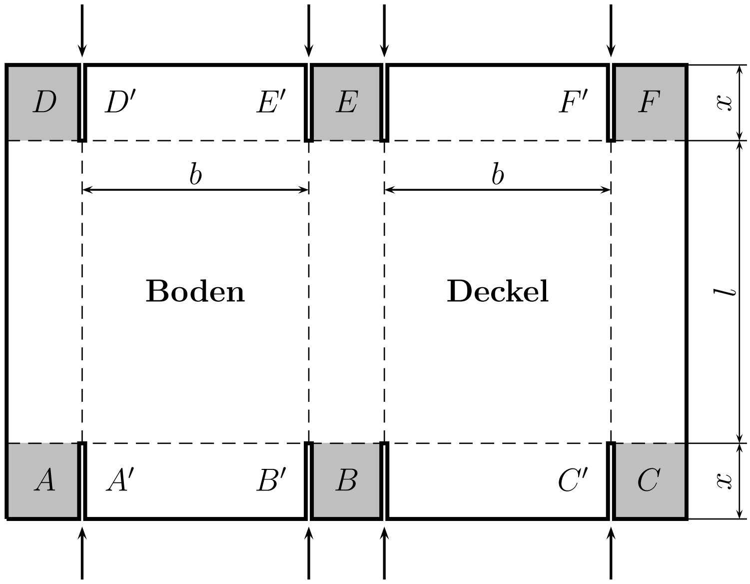
Aufgabe 17

Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit den Abmessungen $90\,\text{cm} \times 60\,\text{cm}$ soll ein quaderförmiger Behälter mit Deckel hergestellt werden. Dazu wird die Pappe an den acht mit einem Pfeil markierten Stellen mit der Einschnitt-Tiefe x eingeschnitten. Dadurch entstehen die sechs grau markierten Laschen, die mit A bis F markiert sind. Diese Laschen sind **quadratisch**, Seitenlänge x.



Nach dem Einschneiden werden die vier Rechtecke, die sich an den Boden anschließen, an den gestrichelten Linien senkrecht hochgeknickt. Dadurch entsteht das Bodenteil des eigentlichen Behälters. Nun werden die vier Laschen A, B, D und E umgeknickt und so mit den Seitenteilen des Behälters verklebt, dass A auf A', B auf B', D auf D' und E auf E' kommt.

Zum Schluss wird der Deckel fertiggestellt. Auch dessen anliegende Rechtecke werden hochgebogen, die beiden Laschen C und F werden mit den Seitenteilen so verklebt, dass C auf C' und F auf F' kommt. Dadurch ist ein beweglicher Deckel entstanden, der über das Bodenteil geklappt werden kann.

Wie groß muss die Einschnitt-Tiefe x (und damit auch die Behälterhöhe) gewählt werden, damit ein Behälter mit **möglichst großem Volumen** entsteht? Welche Länge l, welche Breite b und welches Volumen V hat damit der Behälter?

Anmerkung: Natürlich müssen die Abmessungen des Deckels geringfügig größer sein, als die Abmessungen des Bodenteils. Ansonsten würde der Deckel nicht über das Bodenteil passen. **Diesen kleinen Unterschied sollen Sie aber bei der Berechnung vernachlässigen!**

Lösung

Die **Hauptbedingung** stellt die Größe dar, die optimiert werden soll. Das ist hier das Volumen V.

$$\text{Hauptbedingung:} \quad \boxed{V = l \cdot b \cdot x}$$

Da die HB **drei** Variablen enthält, benötigen wir **zwei** Nebenbedingungen. Wir erhalten sie mit Hilfe der Skizze aus der Gesamtlänge und -Breite der vorgegebenen Pappe.

$$\begin{array}{rc} \text{1. Nebenbedingung:} & \boxed{60\,\text{cm} = 2x + l} \\ \text{2. Nebenbedingung:} & \boxed{90\,\text{cm} = 3x + 2b} \end{array}$$

Die erste NB wird nach l, die zweite nach b umgestellt, damit beide in die HB eingesetzt werden können.

$$\begin{array}{rrcl} \text{NB}_1: & 60\,\text{cm} & = & 2x + l \\ & l & = & 60\,\text{cm} - 2x \\ \text{NB}_2: & 90\,\text{cm} & = & 3x + 2b \\ & 2b & = & 90\,\text{cm} - 3x \\ & b & = & 45\,\text{cm} - 1,5x \end{array}$$

Eingesetzt in HB:

$$\begin{array}{rcl} V & = & l \cdot b \cdot x \\ V(x) & = & (60\,\text{cm} - 2x) \cdot (45\,\text{cm} - 1,5x) \cdot x \\ & = & (2\,700\,\text{cm}^2 - 90\,\text{cm} \cdot x - 90\,\text{cm} \cdot x + 3x^2) \cdot x \\ V(x) & = & 3x^3 - 180\,\text{cm} \cdot x^2 + 2\,700\,\text{cm}^2 \cdot x \end{array}$$

Extremwerte können nur dort liegen, wo die erste Ableitung Null wird.

$$\begin{array}{rcl} V'(x) & = & 9x^2 - 360\,\text{cm} \cdot x + 2\,700\,\text{cm}^2 \\ 0 & = & 9x_E^2 - 360\,\text{cm} \cdot x_E + 2\,700\,\text{cm}^2 \\ 0 & = & x_E^2 - 40\,\text{cm} \cdot x_E + 300\,\text{cm}^2 \\ x_{E1/2} & = & 20\,\text{cm} \pm \sqrt{400\,\text{cm}^2 - 300\,\text{cm}^2} \\ x_{E1/2} & = & 20\,\text{cm} \pm 10\,\text{cm} \end{array}$$

Wir erhalten (zunächst) zwei Lösungen:

$$\boxed{x_{E1} = 10\,\text{cm}} \qquad \boxed{x_{E2} = 30\,\text{cm}}$$

Die Lösung $x_{E2} = 30\,\text{cm}$ entfällt jedoch, denn aus der 1. Nebenbedingung ergäbe sich sonst: $l = 60\,\text{cm} - 2x = 0\,\text{cm}$ [1] Eine Länge Null ist aus logischen Gründen aber nicht möglich.

[1] Sieht man das nicht, dann muss man neben x_{E1} auch diesen Wert in die nachfolgende Überprüfung auf Minimum/Maximum mit einbeziehen. Es ergäbe sich dann ein Minimum, womit x_{E2} aus diesem Grund entfiele.

Zur Prüfung auf Hoch-/Tiefpunkt kann am einfachsten die zweite Ableitung verwendet werden. Sie lautet:

$$V''(x) = 18x - 360\,\text{cm}$$

Die Prüfung wird mit x_{E1} durchgeführt:

$$V''(x_{E1}) = 18x_{E1} - 360\,\text{cm} = 180\,\text{cm} - 360\,\text{cm} = -180\,\text{cm} < 0$$

Da $V''(x_{E1}) < 0$ ist, liegt bei $x_{E1} = 10\,\text{cm}$ – wie gewünscht – ein **Maximum** vor.

Hat der Schüler bis hier noch nicht die Lösung $x_{E2} = 30\,\text{cm}$ ausgeschlossen, dann muss auch mit diesem Wert geprüft werden:

$$V''(x_{E2}) = 18x_{E2} - 360\,\text{cm} = 540\,\text{cm} - 360\,\text{cm} = 180\,\text{cm} > 0$$

Da $V''(x_{E2}) > 0$ ist, liegt bei $x_{E2} = 30\,\text{cm}$ **kein** Maximum, sondern ein Minimum vor. Daher kommt dieser Wert **nicht** als Lösung in Betracht. Die (einzige) Lösung lautet also:

$$\boxed{x_{E1} = 10\,\text{cm}}$$

Zum Schluss müssen noch die Länge l, die Breite b und das Volumen V des fertigen Behälters bestimmt werden. Hierfür bieten sich die umgestellten Nebenbedingungen an.

$$\begin{aligned}
l &= 60\,\text{cm} - 2x_{E1} = 60\,\text{cm} - 2 \cdot 10\,\text{cm} = 40\,\text{cm}\\
b &= 45\,\text{cm} - 1{,}5x_{E1} = 45\,\text{cm} - 1{,}5 \cdot 10\,\text{cm} = 30\,\text{cm}\\
V &= l \cdot b \cdot x_{E1} = 40\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} = 12\,000\,\text{cm}^3
\end{aligned}$$