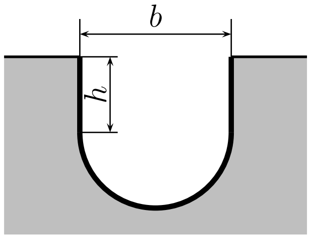
Aufgabe 15

Ein Kanal soll einen halbkreisförmigen Boden erhalten. Die Kanalwände verlaufen senkrecht.



a) Wie groß müssen Breite b und Höhe h (Höhe der geraden Wände) des Kanals sein, damit bei gegebenem Kanal-Querschnitt A die benetzte Fläche des Kanals möglichst klein wird? Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Differentialrechnung!

b) Interpretieren Sie das Ergebnis!

Lösung:

Optimiert werden soll die *benetzte Fläche*. In der Skizze ist das die Umfangslänge, die ich l nenne. Sie besteht aus den beiden geraden Wänden sowie dem halbkreisförmigen Boden. Sie stellt also die **Hauptbedingung** dar. Die **Nebenbedingung** erhalten wir aus dem gegebenen Querschnitt A mit der Rechteck- und der Halbkreisfläche.

$$\begin{aligned}
\text{Hauptbedingung:} \quad l &= 2h + \frac{\pi}{2} \cdot b \\
\text{Nebenbedingung:} \quad A &= h \cdot b + \frac{\pi}{8} \cdot b^2
\end{aligned}$$

Die Nebenbedingung ist einfacher nach h umzustellen, als nach b.

$$\begin{aligned}
A &= h \cdot b + \frac{\pi}{8} \cdot b^2 \quad \left| - \frac{\pi}{8} \cdot b^2 \right. \\
A - \frac{\pi}{8} \cdot b^2 &= h \cdot b \qquad\qquad | : b \\
\frac{A}{b} - \frac{\pi}{8} \cdot b &= h
\end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die HB eingesetzt. Wir erhalten l als Funktion von b:

$$\begin{aligned}
l(b) &= 2 \cdot \left(\frac{A}{b} - \frac{\pi}{8} \cdot b \right) + \frac{\pi}{2} \cdot b \\
l(b) &= \frac{2A}{b} - \frac{\pi}{4} \cdot b + \frac{\pi}{2} \cdot b \\
l(b) &= \frac{2A}{b} + \frac{\pi}{4} \cdot b
\end{aligned}$$

Damit die Ableitung bequemer (ohne Quotientenregel) vorgenommen werden kann, wandle ich den Nenner in eine negative Potenz:

$$\begin{aligned}
l(b) &= \frac{2A}{b} + \frac{\pi}{4} \cdot b \\
l(b) &= 2A \cdot b^{-1} + \frac{\pi}{4} \cdot b \\
l'(b) &= -2A \cdot b^{-2} + \frac{\pi}{4} \\
l'(b) &= -\frac{2A}{b^2} + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Ein Minimum kann nur vorliegen, wenn die erste Ableitung Null wird.

$$\begin{aligned}
l'(b_E) &= 0 \\
-\frac{2A}{b_E^2} + \frac{\pi}{4} &= 0 & \left| + \frac{2A}{b_E^2} \right. \\
\frac{\pi}{4} &= \frac{2A}{b_E^2} & \left| \cdot \frac{b_E^2 \cdot 4}{\pi} \right. \\
b_E^2 &= \frac{8A}{\pi} & |\sqrt{} \\
b_{E1/2} &= \pm\sqrt{\frac{8A}{\pi}}
\end{aligned}$$

Da eine negative Länge nicht möglich ist, entfällt die negative Lösung. Es bleibt nur die Lösung:

$$\boxed{b_E = \sqrt{\frac{8A}{\pi}}}$$

Natürlich muss noch geprüft werden, ob tatsächlich ein Minimum vorliegt. Dies prüfe ich mit Hilfe der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned}
l'(b) &= -2A \cdot b^{-2} + \frac{\pi}{4} \\
l''(b) &= 4A \cdot b^{-3} \\
l''(b) &= \frac{4A}{b^3}
\end{aligned}$$

Da sowohl A als auch b **positiv** sind, ist für $b = b_E$ auch $l''(b_E) > 0$. Das bedeutet, es liegt tatsächlich ein Minimum vor.

Nun muss noch die Höhe h bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
h_E &= \frac{A}{b_E} - \frac{\pi}{8} \cdot b_E \\
&= \frac{A}{\sqrt{\frac{8A}{\pi}}} - \frac{\pi}{8} \cdot \sqrt{\frac{8A}{\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{A^2}{\frac{8A}{\pi}}} - \sqrt{\frac{\pi^2}{8^2} \cdot \frac{8A}{\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi \cdot A^2}{8A}} - \sqrt{\frac{\pi \cdot A}{8}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi \cdot A}{8}} - \sqrt{\frac{\pi \cdot A}{8}} \\
h_E &= 0
\end{aligned}$$

Der Kanal ist also genau dann optimal, wenn er einen **reinen Halbkreis ohne senkrechte Wände** darstellt.