

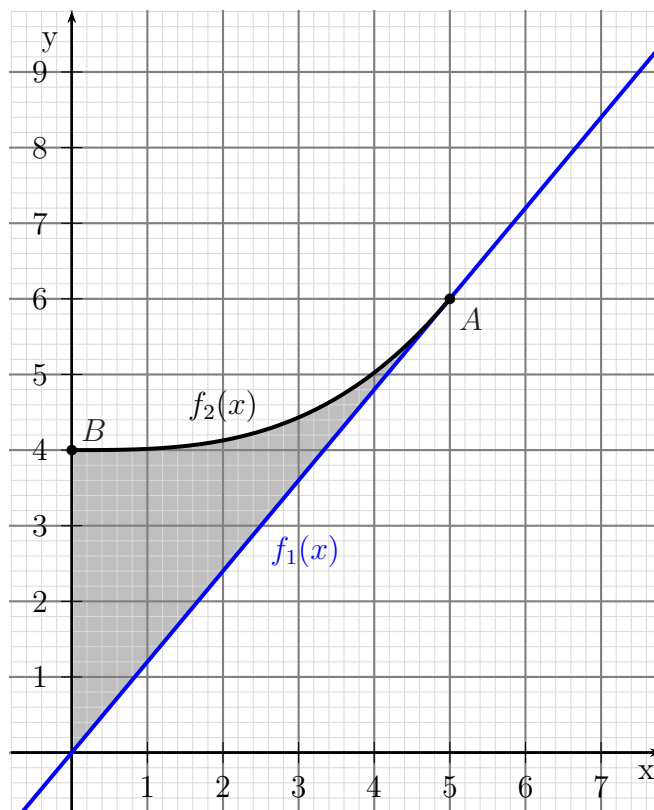
Aufgabe 12

An einen Berghang mit linearem Verlauf soll eine Ski-Sprungschanze gebaut werden. Der natürliche Berghang dient dabei als Anlaufstrecke.

Im unteren Teil biegt die Spur im Punkt **A** ohne Knick ab zum Schanzentisch im Punkt **B**. Das Kurvenstück, das den Hang mit dem Schanzentisch verbindet, stellt ein **Polynom dritten Grades** dar, wobei die Kurve auf der Kante des Schanzentisches im Punkt **B** einen Sattelpunkt hat.

Ein Koordinatensystem ist an den Hang angelegt, so dass der Koordinatenursprung genau senkrecht unter der Kante des Schanzentisches auf dem natürlichen Hang liegt. Der Schanzentisch bei Punkt **B** liegt eine **unbekannte** Höhe darüber.

(**Achtung!** Sie können also **nicht** den aus der Skizze ablesbaren Wert als gegeben voraussetzen!)



Der Punkt **A**, bei dem das Kurvenstück ohne Knick in den natürlichen Hang einmündet, liegt bei **A(5m|6m)**.

- Bestimmen Sie die Lineare Funktion $f_1(x)$, die den Verlauf des Hanges darstellt!
- Bestimmen Sie das Polynom dritten Grades $f_2(x)$, das den Verlauf des gebogenen Kurvenstückes darstellt!
- Unter dem gebogenen Kurvenstück muss ein Unterbau aus Beton angefertigt werden. Wieviel m^3 Beton ist (ohne Berücksichtigung des Fundamentes) erforderlich, wenn der Unterbau 80 cm breit werden soll?
- Wie groß ist die Steigung des gebogenen Kurvenstückes genau in seiner Mitte (waagrecht gemessen)?

Lösung:

Zur besseren Übersichtlichkeit erfolgen alle Berechnungen in der Einheit **Meter**. Die Einheiten lasse ich bei den Berechnungen weg.

a) Die allgemeine Geradengleichung lautet:

$$f_1(x) = mx + b$$

Der Graph der Gerade f_1 geht durch den Koordinatenursprung und den Punkt $A(5|6)$. Hieraus ergibt sich:

$$b = y_0 = 0$$
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 0}{5 - 0} = \frac{6}{5} = 1,2x$$

Damit lautet die Geradengleichung: $f_1(x) = 1,2x$

b) Die allgemeine Gleichung für ein Polynom 3. Grades lautet:

$$f_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Die ersten beiden Ableitungen werden ebenfalls benötigt.

$$f_1'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f_1''(x) = 6ax + 2b$$

Nun können die angegebenen Bedingungen in Gleichungen umgewandelt werden.

Bekannt ist der Punkt Punkt $A(5|6)$:

$$(1) \quad f_2(5) = 6 \Rightarrow a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = 6$$

Bekannt ist auch die Steigung im Punkt $A(5|6)$:

$$(2) \quad f_2'(5) = \frac{6}{5} \Rightarrow 3a \cdot 5^2 + 2b \cdot 5 + c = \frac{6}{5}$$

Im Punkt $B(0|?)$ liegt ein Sattelpunkt. Das ergibt zwei Bedingungen:

$$(3) \quad f_2'(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0$$
$$(4) \quad f_2''(0) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 0 + 2b = 0$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergibt sich sofort:

$$c = 0 \quad \text{und} \quad b = 0$$

Setzt man diese Werte in (1) und (2) ein, erhält man das Lineargleichungssystem:

$$\begin{array}{l} (1) \quad 125a + d = 6 \\ (2) \quad 75a = \frac{6}{5} \end{array}$$

Aus Gleichung (2) kann a ausgerechnet werden.

$$\begin{array}{l} 75a = \frac{6}{5} \quad | : 75 \\ a = 0,016 \end{array}$$

Dieser Wert wird in (1) eingesetzt, um d zu bestimmen.

$$\begin{array}{l} 125a + d = 6 \\ 125 \cdot 0,016 + d = 6 \\ 2 + d = 6 \quad | - 2 \\ d = 4 \end{array}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $f_2(x) = 0,016x^3 + 4$

c) Zur Berechnung des Volumens wird zunächst die in der gegebenen Skizze markierte Fläche A benötigt. Diese kann mit einem Integral berechnet werden, die Grenzen sind mit 0 und 5 ja schon bekannt.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^5 f_2(x) - f_1(x) \, dx \\ &= \int_0^5 0,016x^3 + 4 - 1,2x \, dx \\ &= \int_0^5 0,016x^3 - 1,2x + 4 \, dx \\ &= [0,004x^4 - 0,6x^2 + 4x]_0^5 \\ &= (0,004 \cdot 5^4 - 0,6 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5) - (0,004 \cdot 0^4 - 0,6 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0) \\ A &= 7,5 \end{aligned}$$

Die Fläche beträgt also $7,5 \text{ m}^2$. Bei der Berechnung des Volumens der Betonmauer muss noch die Mauerbreite berücksichtigt werden.

$$V = A \cdot b = 7,5 \text{ m}^2 \cdot 80 \text{ cm} = 7,5 \text{ m}^2 \cdot 0,8 \text{ m} = 6 \text{ m}^3$$

Das Stützwandvolumen beträgt: $V = 6 \text{ m}^3$

d) Die Mitte zwischen 0 und 5 liegt bei 2,5. Die Steigung dort liefert die erste Ableitung von f_2 .

$$\begin{aligned}f_2(x) &= 0,016x^3 + 4 \\f_2'(x) &= 0,048x^2 \\f_2'(2,5) &= 0,048 \cdot 2,5^2 \\f_2'(2,5) &= 0,3\end{aligned}$$

Die Steigung in der Mitte des Kurvenstücks beträgt: $m = 0,3$