Aufgabe 10

Ein Polynom dritten Grades $f_1(x)$ hat einen Wendepunkt bei $W(1|1)$. Die Gerade mit der Funktionsgleichung $f_2(x) = 3x - 4$ berührt im Punkt B bei $x_B = 2$ den Graphen von $f_1(x)$ als Tangente.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Polynoms $f_1(x)$!

b) Untersuchen Sie die Funktion $f_1(x)$ auf Hoch-, Tief-, und Sattelpunkte und bestimmen Sie die Achsenabschnitte sowie die Schnittpunkte mit der Tangenten $f_2(x)$! Gehen Sie dabei von $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ aus.

c) Skizzieren Sie die Graphen von Polynoms und Tangente!

d) Die gegebene Tangente mit der oben angegebenen Funktionsgleichung $f_2(x)$, die den Graphen von $f_1(x)$ in B berührt, schneidet diesen Graphen in einem weiteren Punkt P. Berechnen Sie die Fläche, die von den Funktionsgraphen von Polynom und Tangente zwischen P und B eingeschlossen wird!

Lösung:

a) Bestimmung der Funktionsgleichung:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ax^3+bx^2+cx+d \\ f_1'(x) &= 3ax^2+2bx+c \\ f_1''(x) &= 6ax+2b \end{aligned}$$

Nun können die Bedingungen ausgewertet werden. Der Wendepunkt ergibt zwei Bedingungen und der Berührpunkt ebenfalls.

$$\begin{array}{lrclcrcl} (1) & f_1(1) & = & 1 & \Rightarrow & a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d & = & 1 \\ (2) & f_1''(1) & = & 0 & \Rightarrow & 6a\cdot 1+2b & = & 0 \\ (3) & f_1(2) & = & f_2(2) & \Rightarrow & a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d & = & 3\cdot 2-4 \\ (4) & f_1'(2) & = & f_2'(2) & \Rightarrow & 3a\cdot 2^2+2\cdot 2b+c & = & 3 \end{array}$$

Fasst man die Gleichungen zusammen, erhält man dieses Lineargleichungssystem 4. Ordnung:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrcl} (1) & a & +b & +c & +d & = & 1 \\ (2) & 6a & +2b & & & = & 0 \\ (3) & 8a & +4b & +2c & +d & = & 2 \\ (4) & 12a & +4b & +c & & = & 3 \end{array}}$$

Das Gleichungssystem kann mit jedem beliebigen Verfahren gelöst werden. Es bietet sich an Gleichung (1) von Gleichung (3) zu subtrahieren, damit d wegfällt.

$$\begin{array}{lrrrrcll} (3) & 8a & +4b & +2c & +d & = & 2 & | \\ (1) & a & +b & +c & +d & = & 1 & |- \\ \hline (5) & 7a & +3b & +c & & = & 1 & \end{array}$$

Zusammen mit Gleichung (2) und (4) bleibt damit ein Gleichungssystem 3. Ordnung übrig:

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcl} (2) & 6a & +2b & & = & 0 \\ (4) & 12a & +4b & +c & = & 3 \\ (5) & 7a & +3b & +c & = & 1 \end{array}}$$

Auch für den nächsten Reduktionsschritt bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an. Gleichung (4) und (5) können voneinander subtrahiert werden, damit c wegfällt.

$$\begin{array}{lrrrcll} (4) & 12a & +4b & +c & = & 3 & | \\ (5) & 7a & +3b & +c & = & 1 & |- \\ \hline (7) & 5a & +b & & = & 2 & \end{array}$$

Zusammen mit Gleichung (2) bleibt nun ein Lineargleichungssystem 2. Ordnung übrig.

$$\boxed{\begin{array}{lrrcl} (2) & 6a & +2b & = & 0 \\ (7) & 5a & +b & = & 2 \end{array}}$$

Hier bietet sich keine Methode direkt an. Ich stelle Gleichung (2) nach b um und setze das Ergebnis dann in (7) ein.

$$\begin{aligned} 6a + 2b &= 0 && \mid -6a \\ 2b &= -6a && \mid :2 \\ b &= -3a \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung (7):

$$\begin{aligned} 5a + b &= 2 \\ 5a - 3a &= 2 \\ 2a &= 2 && \mid :2 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt.

$$b = -3a = -3 \cdot 1 = -3$$

Beide Werte setze ich in Gleichung (5) ein.

$$\begin{aligned} 7a + 3b + c &= 1 \\ 7 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + c &= 1 \\ 7 - 9 + c &= 1 \\ -2 + c &= 1 && \mid +2 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von d verwende ich Gleichung (1).

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 1 \\ 1 - 3 + 3 + d &= 1 \\ 1 + d &= 1 && -1 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

Hiermit lautet die gesuchte Gleichung: $\boxed{f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x}$

b1) Bestimmung der Extrema:

Zunächst werden die notwendigen Ableitungen bestimmt.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3 - 3x^2 + 3x \\ f_1'(x) &= 3x^2 - 6x + 3 \\ f_1''(x) &= 6x - 6 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für Extrema ist das Null-werden der ersten Ableitung.

$$\begin{aligned} 3x_E^2 - 6x_E + 3 &= 0 && \mid :3 \\ x_E^2 - 2x_E + 1 &= 0 \\ x_{E1/2} &= 1 \pm \sqrt{1-1} \\ x_E &= 1 \end{aligned}$$

Wir haben nur einen einzigen Kandidaten für Extremstellen, weil die Wurzel Null ergibt.

Zur Prüfung auf die Art des Extremums kann die zweite Ableitung verwendet werden.

$$f_1''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Aussage möglich!}$$

Da diese Methode zu keiner Aussage führte, muss die andere Methode verwendet werden.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 3 = 3 \\ f_1'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ Sattelpunkt weil } \textbf{kein} \text{ Vorzeichenwechsel}$$

Der zugehörige y-Wert muss bestimmt werden.

$$y_s = f_1(x_E) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 1$$

Der Sattelpunkt lautet: $\boxed{S(1|1)}$

b2) Bestimmung der Achsenabschnitte:

Beginnen wir mit dem y-Achsenabschnitt y_0.

$$y_0 = f_1(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$$

Es folgt die Nullstellenberechnung.

$$\begin{array}{rcll}
f(x_0) & = & 0 & \\
x_0^3 - 3 \cdot x_0^2 + 3 \cdot x_0 & = & 0 & \\
x_0 \cdot (x_0^2 - 3 \cdot x_0 + 3) & = & 0 & \qquad \Rightarrow \quad x_{01} = 0 \\
x_0^2 - 3 \cdot x_0 + 3 & = & 0 & \\
x_{02/3} & = & \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 3} & \\
x_{02/3} & = & \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} &
\end{array}$$

Da der Radikand negativ ist, gibt es keine weiteren Nullstellen. Zusammengefasst:

$$\boxed{y_0 = 0} \quad \text{und} \quad \boxed{x_0 = 0}$$

b3) Bestimmung der Schnittpunkte beider Funktionsgraphen:

Zur Schnittpunktbestimmung müssen die Funktionsterme gleichgesetzt werden.

$$\begin{array}{rcll}
f_1(x_s) & = & f_2(x_s) & \\
x_s^3 - 3x_s^2 + 3x_s & = & 3x_s - 4 & | - 3x_s + 4 \\
x_s^3 - 3x_s^2 + 4 & = & 0 &
\end{array}$$

Die Nullstellen eines Polynoms dritten Grades können nicht analytisch berechnet werden. Da jedoch der Berührpunkt bei $x_B = 2$ bekannt ist, kann eine Polynomdivision durchgeführt werden. Damit ist $x_{s1} = x_B = 2$.

$$\begin{array}{rrrrcccc}
(x_s^3 & -3x_s^2 & & +4) & : & (x_s-2) & = & x_s^2 - x_s - 2\\
-(x_s^3 & -2x_s^2) & & & & & & \\
\hline
 & (-x_s^2 & & +4) & & & & \\
- & (-x_s^2 & +2x_s) & & & & & \\
\hline
 & & (-2x_s & +4) & & & & \\
 & - & (-2x_s & +4) & & & & \\
\hline
 & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Der Ergebnisterm kann nun weiter untersucht werden.

$$\begin{aligned}
x_s^2 - x_s - 2 &= 0\\
x_{s2/3} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}\\
x_{s2/3} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}\\
x_{s2/3} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}\\
x_{s2/3} &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\\
x_{s2} = -1 & \qquad x_{s3} = 2
\end{aligned}$$

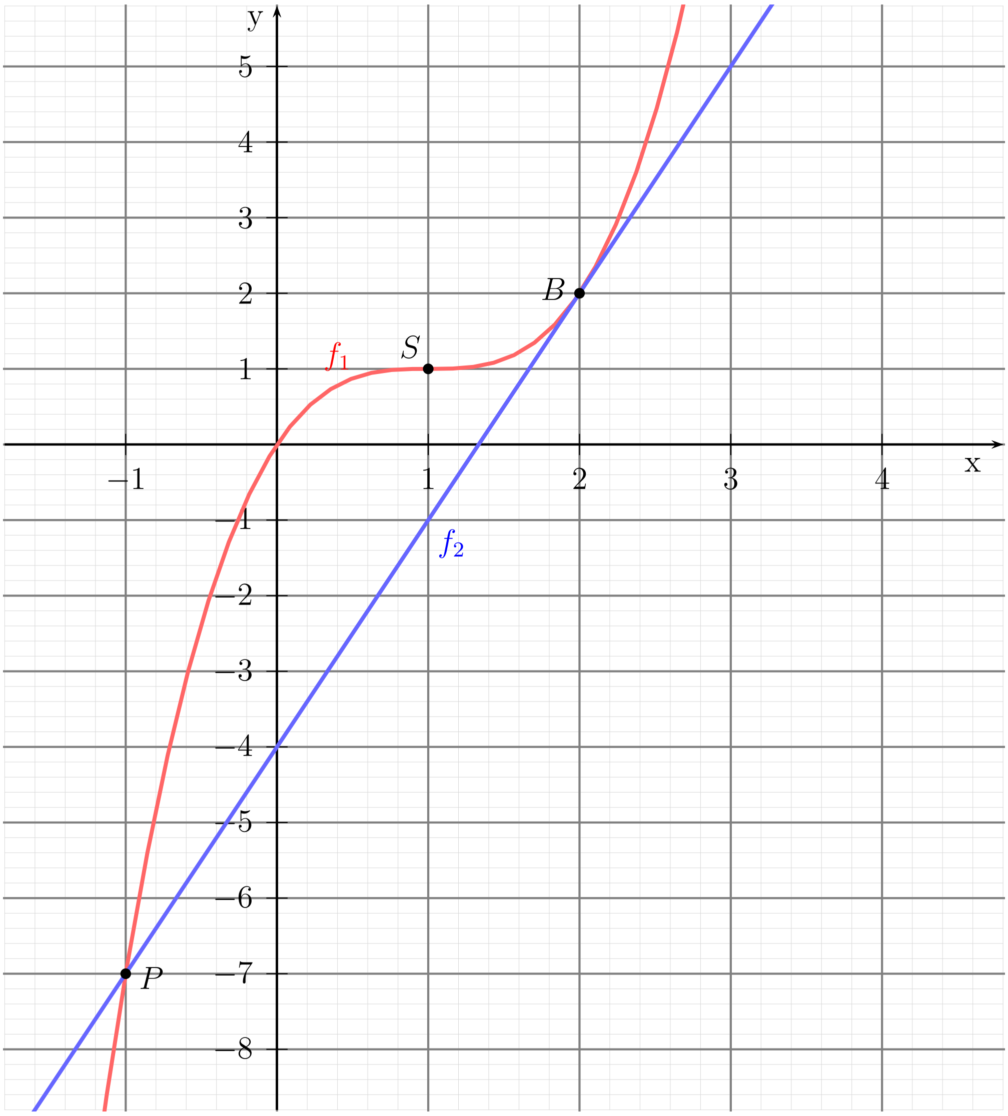
$x_{s3} = 2$ ist identisch mit $x_{s1} = 2$. Es gibt also tatsächlich nur zwei Schnittpunkte. Es fehlen noch die zugehörigen y-Werte.

Bei der Berechnung spielt es keine Rolle, ob man dazu f_1 oder f_2 verwendet. Da f_2 einfacher ist, verwende ich diese Funktion.

$$\begin{array}{rclcl}
y_{s1} &=& f_2(x_{s1}) &=& 3 \cdot 2 - 4 &=& 2\\
y_{s2} &=& f_2(x_{s2}) &=& 3 \cdot (-1) - 4 &=& -7
\end{array}$$

Damit sind die Schnittpunkte bekannt: $\boxed{B(2|2)}$ und $\boxed{P(-1|-7)}$

c) Skizze der Funktionsgraphen:



d) Bestimmung der Fläche:
Da die Integrationsgrenzen durch die Schnittpunktberechnung bereits bekannt sind, kann die gesuchte Fläche als Bestimmtes Integral aufgestellt werden.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} f_1(x) - f_2(x)\ dx \\
&= \int_{-1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 3x) - (3x - 4)\ dx \\
&= \int_{-1}^{2} x^3 - 3x^2 + 4\ dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x \right]_{-1}^{2} \\
&= \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 4 \cdot 2 \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 + 4 \cdot (-1) \right) \\
&= (4 - 8 + 8) - \left(\frac{1}{4} + 1 - 4 \right) \\
&= 4 - (-2{,}75) \\
&= 4 + 2{,}75 \\
A &= 6{,}75
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Fläche beträgt: $\boxed{A = 6{,}75\,\mathrm{FE}}$