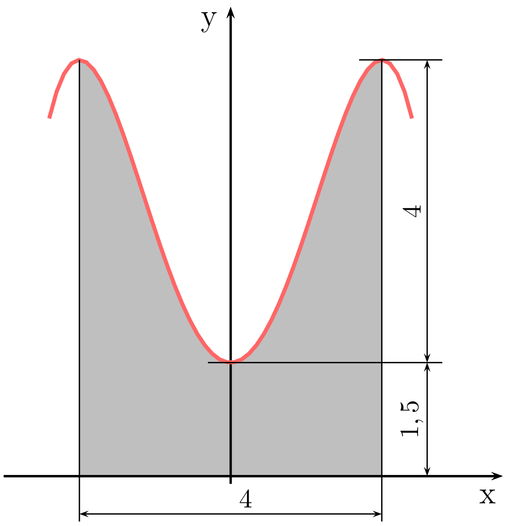
Aufgabe 1

a) Die nebenstehende Skizze zeigt ein Dichtprofil im Querschnitt. Die Maße sind in der Einheit *Zentimeter* angegeben. Die Form des Querschnittes wird durch eine ganzrationale spiegelsymmetrische Funktion beschrieben, die ein Polynom 4. Grades darstellt. Stellen Sie die zugehörige Funktionsgleichung auf!



b) Berechnen Sie das Volumen des Dichtprofils pro laufendem Meter! Gehen Sie dabei von folgender Funktion aus!

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{3}{2}$$

c) Wie groß ist die Neigung (Steigung) des Dichtprofils an der steilsten Stelle?

Erwartete Schülerleistung:

Teil a) Ein Polynom 4. Grades hat die allgemeine Form:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Liegt Spiegelsymmetrie zur y-Achse vor, dann sind alle Koeffizienten von ungeraden Potenzen Null. Damit bleibt:

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

Zur Bestimmung der Parameter a, b und c werden 3 Bedingungen benötigt. Diese sind beispielsweise:

- Punkt $T(0|1,5)$
- Punkt $H_2(2|5,5)$
- Hochpunkt bei $x_H = 2$

Manche Schüler könnten noch auf die Idee kommen, den Tiefpunkt bei $x_T = 0$ auszunutzen. Dies würde zum Parameter $d = 0$ führen. Wegen der vorgegebenen Symmetrie ist dies aber bereits bekannt. Ebenso würden die Daten des Punktes $H_1(-2|5,5)$ zu keiner neuen Erkenntnis führen, würde man sie **zusätzlich** zu den Daten des Punktes $H_2(2|5,5)$ verwenden; alternativ könnte man sie jedoch verwenden.

Für den Hochpunkt wird die erste Ableitung benötigt. Diese lautet:

$$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$$

Die Bedingungen werden in Gleichungen umgesetzt:

$$\begin{array}{lrclcrrrcl}
(1) & f(0) & = & 1,5 & \Rightarrow & a \cdot 0^4 & +c \cdot 0^2 & +e & = & 1,5 \\
(3) & f(2) & = & 5,5 & \Rightarrow & a \cdot 2^4 & +c \cdot 2^2 & +e & = & 5,5 \\
(3) & f'(2) & = & 0 & \Rightarrow & 4a \cdot 2^3 & +2c \cdot 2 & & = & 0
\end{array}$$

Das sich ergebende Gleichungssystem wird aufgelöst:

$$\begin{array}{lrrrcl}
(1) & & & e & = & 1,5 \\
(2) & 16a & +4c & +e & = & 5,5 \\
(3) & 32a & +4c & & = & 0
\end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann auf unterschiedlichen Wegen berechnet werden. Alle gängigen Lösungsverfahren sind einsetzbar. Da die Koeffizienten von c gleich sind, bietet sich jedoch das **Subtraktionsverfahren** an.

Das Ergebnis aus Gleichung (1) wird in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt.

$$
\begin{array}{llllll}
(2) & 16a & +4c & +1,5 & = & 5,5 \\
(3) & 32a & +4c & & = & 0 \\
\hline
(2) & 16a & +4c & & = & 4 \quad |- \\
(3) & 32a & +4c & & = & 0 \quad | \\
\hline
 & 16a & & & = & -4 \quad |:16 \\
 & a & & & = & -0,25
\end{array}
$$

Dieses Ergebnis kann in Gleichung (2) oder (3) eingesetzt werden, um a zu berechnen. Mit Gleichung (3) geht es geringfügig einfacher.

$$
\begin{aligned}
32a + 4c &= 0 \\
32 \cdot (-0,25) + 4c &= 0 \\
-8 + 4c &= 0 \quad | + 8 \\
4c &= 8 \quad | : 4 \\
c &= 2
\end{aligned}
$$

Mit diesen Ergebnissen kann die Funktionsgleichung angegeben werden:

$$\boxed{f(x) = -0,25x^4 + 2x^2 + 1,5}$$

Teil b) Schneidet man von dem Dichtprofil ein 1-m-langes Stück ab, erhält man einen prismatischen Körper. Zu seiner Berechnung ist die in der Skizze grau markierte Fläche A erforderlich. Diese kann mit dem bestimmten Integral berechnet werden.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \\
&= \int_{-2}^{2} -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{3}{2}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{20}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x\right]_{-2}^{2} \\
&= \left(-\frac{1}{20}\cdot 2^5 + \frac{2}{3}\cdot 2^3 + \frac{3}{2}\cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{20}\cdot(-2)^5 + \frac{2}{3}\cdot(-2)^3 + \frac{3}{2}\cdot(-2)\right) \\
&= \left(-\frac{8}{5} + \frac{16}{3} + 3\right) - \left(\frac{8}{5} - \frac{16}{3} - 3\right) \\
&= \frac{101}{15} + \frac{101}{15} \\
&= \frac{202}{15} \\
A &\approx 13,467\,\mathrm{FE}
\end{aligned}$$

Da die Maße in der Skizze in cm angegeben sind, ist die Maßeinheit der Fläche cm^2.

$$A \approx 13,467\,\mathrm{cm}^2$$

Damit kann das Volumen für 1 m Dichtprofil berechnet werden:

$$V = A \cdot h \approx 13,467\,\mathrm{cm}^2 \cdot 1\,\mathrm{m} = 1346,7\,\mathrm{cm}^3 = 1,3467\,\mathrm{dm}^3$$

Zusammengefasst: $\boxed{V \approx 1,3467\,\mathrm{dm}^3}$

Teil c) Die steilste Stelle liegt im **Wendepunkt**. Ein Wendepunkt kann nur dort liegen, wo die zweite Ableitung Null wird. Mit der dritten Ableitung kann dann geprüft werden, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt.

Zunächst werden die erforderlichen Ableitungen gebildet.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{3}{2} \\
f'(x) &= -x^3 + 4x \\
f''(x) &= -3x^2 + 4 \\
f'''(x) &= -6x
\end{aligned}$$

Damit können die Wendepunkte bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
f''(x_W) &= 0 \\
-3x_W^2 + 4 &= 0 && \mid + 3x_W^2 \\
4 &= 3x_W^2 && \mid : 3 \\
\frac{4}{3} &= x_W^2 && \mid\sqrt{} \\
x_W &= \pm\frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

$$x_{W1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad x_{W2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Prüfung, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt:

$$f'''(x_{W1}) = -6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f'''(x_{W2}) = -6 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Die Steigung wird mit der ersten Ableitung bestimmt. Aus Symmetriegründen ist die Steigung in beiden Wendepunkten betragsmäßig gleich. Da die Steigung laut Skizze bei x_{W2} negativ ist, ist die Steigung bei x_{W1} die gesuchte.

$$f'(x_{W1}) = -x_{W1}^3 + 4x_{W1} = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 3,0792$$

Zusammengefasst: $\boxed{\text{Maximale Steigung} \approx 3,0792}$