Grundlagen der Wechselstromtechnik

W. Kippels

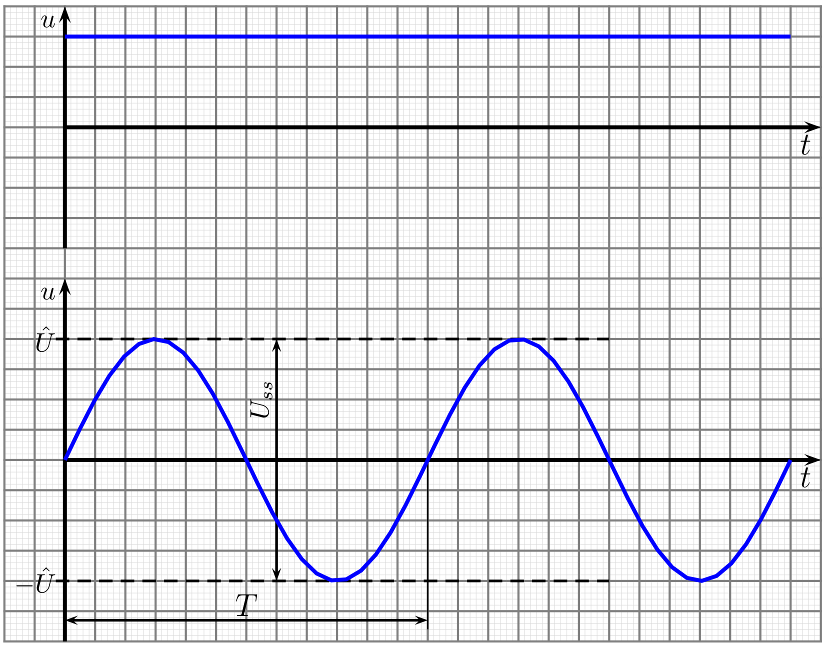
19. Dezember 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Grundgrößen der Wechselstromtechnik

1.1 Definitionen einiger Grundgrößen

Ein Gleichstrom fließt immer in der gleichen Richtung. Die zugehörige Gleichspannung ist immer gleich groß und verändert sich nicht. Der zugehörige zeitliche Verlauf ist im nebenstehenden Diagramm oben dargestellt.



Darunter ist der zeitliche Verlauf einer Wechselspannung dargestellt. Die Spannung ist zu jedem Zeitpunkt eine andere. Nicht nur die Spannungshöhe ändert sich, sondern auch die Spannungsrichtung.

Der zeitliche Verlauf der hier gezeigten Wechselspannung hat Sinusform. Daher spricht man von „Sinusförmiger Wechselspannung“. Wenn auch nicht jede Wechselspannung diese Form hat, ist jedoch diese Wechselspannung bei weitem die bedeutenste. Im Verlauf dieses Artikels soll daher immer die Sinusform vorausgesetzt werden, solange nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

Jede Wechselspannung hat bestimmte Kenngrößen. Dazu gehören unter anderem der **Scheitelwert $\hat{\mathbf{U}}$**, die **Spitze-Spitze-Spannung $\mathbf{U_{ss}}$** und die **Periodendauer $\boldsymbol{T}$**. Diese drei Größen sind im Diagramm eingetragen.

Unter dem **Scheitelwert $\hat{\mathbf{U}}$** versteht man den Betrag des maximal (und minimal) auftretenden Momentanwertes der Spannung. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Spannung gleich weit in den positiven wie in den negativen Bereich verläuft. Man nennt den Scheitelwert der Spannung auch „*Amplitude*“. Die Einheit des Scheitelwertes einer Spannung ist natürlich das Volt, denn er ist auch eine Spannung.

$$[\hat{U}] = 1\,\mathrm{V}$$

Wenn man eine Wechselspannung mit dem Oszilloskop misst, dann kann man am einfachsten den **Spitze-Spitze-Wert $\mathbf{U_{ss}}$** bestimmen. Darunter versteht man den Potentialunterschied zwischen der untersten und der obersten Spitze. Bei einer symmetrischen Wechselspannung ist der Wert das Doppelte der Amplitude.

$$U_{ss} = 2 \cdot \hat{U}$$

Die **Periodendauer** $\boldsymbol{T}$ ist die Zeitspanne, die abäuft, bis die Spannung wieder den gleichen Zustand erreicht. Eingezeichnet ist im Diagramm die Zeit von einem Nulldurchgang in positiver Richtung bis zum nächsten. Alternativ könnte man aber auch die Zeit von einem Spannungsmaximum bis zum nächsten Maximum messen. Der zugehörige Teil der Kennlinie wird **Periode** genannt. Die Einheit der Periodendauer ist die Sekunde.

$$[T] = 1\,\mathrm{s}$$

Eine weitere wichtige Größe ist die **Frequenz** $\boldsymbol{f}$. Darunter versteht man die Anzahl der Schwingungen je Zeiteinheit. Die Einheit der Frequenz ist Hz (gesprochen: Hertz[1]), eine Abkürzung von $1\,\mathrm{s}^{-1}$.

$$[f] = 1\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$$

Aufgrund der Definition für die Frequenz gilt der formelmäßige Zusammenhang:

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Eine weitere wichtige Größe ist die sogenannte **Kreisfrequenz** ω[2]. Auf den ersten Blick ist ω durchaus verzichtbar, denn ω ist nur ein Vielfaches von f, genauer:

$$\boxed{\omega = 2 \cdot \pi \cdot f}$$

Die Kreisfrequenz wird jedoch benötigt, wenn man den Spannungsverlauf mathematisch in den Griff bekommen will. Da ein Vollwinkel im Bogenmaß (bekanntlich) $2 \cdot \pi$ beträgt und die Winkelfunktionen in der Technik immer in diesem Winkelmaßsystem berechnet werden, kommt dieser Faktor zustande.

Für die Einheit der Kreisfrequenz, die ja auch $1\,\mathrm{s}^{-1}$ beträgt, wird im Gegensatz zur Frequenz f nicht die Einheit $1\,\mathrm{Hz}$ verwendet. Es bleibt bei $1\,\mathrm{s}^{-1}$ oder $\frac{1}{\mathrm{s}}$.

Mit der Kreisfrequenz ω können wir die Funktionsgleichung einer sinusförmigen Wechselspannung angeben. Hierbei ist zu beachten, dass man für **zeitveränderliche** Größen Kleinbuchstaben verwendet, wie hier das u. (Ähnliches gilt auch für einen zeitveränderlichen Strom, der dann mit i bezeichnet wird.)

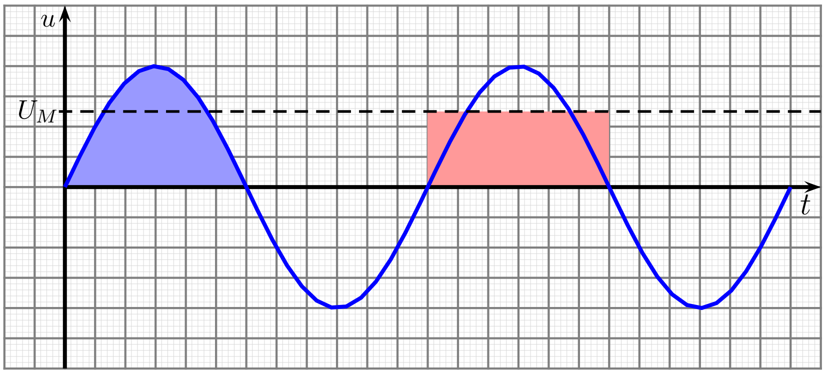
$$\boxed{u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega t}$$

[1]Nach *Heinrich Hertz*, dem Entdecker der Elektromagnetischen Wellen, ⋆1857, †1894
[2]ω ist ein griechischer Buchstabe, gesprochen: Omega

1.2 Mittelwert und Effektivwert

1.2.1 Mittelwert

Als Nenngröße für eine Wechselspannung wird der **Effektivwert** verwendet. Da er gern mit dem **Mittelwert** verwechselt wird, möchte ich diesen zuerst erklären.



Würde man über eine ganze Periode einen Mittelwert der Spannung bilden, dann käme wegen der Symmetrie Null heraus. Damit kann man wenig anfangen. Daher bildet man den Mittelwert nur über eine Halbwelle. Wenn die Fläche unter der Sinuskurve für eine Halbwelle (blau markiert, links) genau so groß ist, wie die Rechteckfläche unter einer Geraden in der Höhe U_M für eine Halbwelle (rot markiert, rechts), dann stellt U_M den Mittelwert der Wechselspannung dar. Dies wollen wir nun mit mathematischen Mitteln untersuchen.

Berechnen wir zunächst die linke Fläche unter der Kurve. Das geht mit dem bestimmten Integral von 0 bis $\frac{T}{2}$ von der Spannungsfunktion.

$$\begin{aligned}
A_{Kurve} &= \int\limits_0^{\frac{T}{2}} \hat{U} \cdot \sin\omega t \; dt \\
&= \left[-\frac{\hat{U}}{\omega} \cdot \cos\omega t \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \left[-\frac{\hat{U}}{2\pi f} \cdot \cos 2\pi f t \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \left[-\frac{\hat{U}}{2\pi \frac{1}{T}} \cdot \cos 2\pi \frac{1}{T} \cdot t \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \left[-\frac{\hat{U} \cdot T}{2\pi} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t \right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= -\frac{\hat{U} \cdot T}{2\pi} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} + \frac{\hat{U} \cdot T}{2\pi} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \\
&= -\frac{\hat{U} \cdot T}{2\pi} \cdot \cos\pi + \frac{\hat{U} \cdot T}{2\pi} \cdot \cos 0 \\
A_{Kurve} &= \frac{\hat{U} \cdot T}{\pi}
\end{aligned}$$

Die (rechte rote) Rechteckfläche hat die Höhe U_M und die Breite $\frac{T}{2}$. Damit ist die Rechteckfläche schnell bestimmt:

$$A_{Rechteck} = U_M \cdot \frac{T}{2}$$

Da beide Fläche gleich sein sollen, kann ich sie mathematisch gleichsetzen.

$$\begin{aligned} A_{Rechteck} &= A_{Kurve} \\ U_M \cdot \frac{T}{2} &= \frac{\hat{U} \cdot T}{\pi} \qquad | \cdot \frac{2}{T} \\ U_M &= \frac{2}{\pi} \cdot \hat{U} \end{aligned}$$

Die Konstante $\frac{2}{\pi}$ kann auch durch eine dezimale Näherung ausgedrückt werden. Damit erhält man die Formel:

$$\boxed{U_M = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{U} \approx 0,6366 \cdot \hat{U}}$$

1.2.2 Effektivwert

Kommen wir nun zum Begriff „Effektivwert“. Die Definition lautet:

> **Eine Gleichspannung, die in gleichen Zeiträumen die gleiche Wärmeleistung in einem Ohmschen Widerstand zur Folge hat, wie eine Wechselspannung, heißt: *Effektivwert* der Wechselspannung.**

Auch hier gibt es einen Umrechnungsfaktor, der den Effektivwert U_{eff} mit dem Scheitelwert $\hat{U}$ verknüpft. Diesen Wert wollen wir nun herleiten.

Die Formel zur Berechnung der Arbeit *bei konstanter Leistung* lautet:

$$W = P \cdot t$$

Ist die Leistung *zeitabhängig*, also nicht konstant, dann muss die Arbeit über das Integral bestimmt werden. Die Arbeit, die vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt t_2 verrichtet wird, ist dann:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\ dt$$

Ich wähle genau die Zeit für eine Periode (also die Periodendauer T) zur Bestimmung der Arbeit. Damit erhalten wir:

$$W = \int_{0}^{T} p(t)\ dt$$

Als nächstes müssen wir uns die Funktion $p(t)$ ansehen. Aus der Gleichstromtechnik bekannt ist die Formel, mit deren Hilfe die Leistung P in einem Widerstand R bestimmt werden kann, wenn man eine Spannung U anlegt:

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Ist die Spannung U eine Wechselspannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega t$, dann muss dieser Term anstelle von U eingesetzt werden. Wir erhalten dann $p(t)$:

$$p(t) = \frac{(\hat{U} \cdot \sin \omega t)^2}{R}$$

Hiermit kann nun die Arbeit W für eine Periode berechnet werden:

$$\begin{aligned} W &= \int\limits_0^T p(t)\ dt \\ W &= \int\limits_0^T \frac{(\hat{U} \cdot \sin \omega t)^2}{R}\ dt \\ W &= \frac{\hat{U}^2}{R} \cdot \int\limits_0^T \sin^2 \omega t\ dt \end{aligned}$$

Um das Integral auflösen zu können, forme ich $\sin^2 \omega t$ mit Hilfe des folgenden *Additionstheorems* um:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\varphi)$$

Das wenden wir nun an und können weiterrechnen:

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{\hat{U}^2}{R} \cdot \int\limits_0^T \sin^2 \omega t \; dt \\
&= \frac{\hat{U}^2}{R} \cdot \int\limits_0^T \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\omega t) \; dt \\
&= \frac{\hat{U}^2}{2R} \cdot \left(\int\limits_0^T 1 \; dt - \int\limits_0^T \cos 2\omega t \; dt \right) \\
&= \frac{\hat{U}^2}{2R} \cdot \Big([t]_0^T - [\omega \cdot \sin 2\omega t \;]_0^T \Big) \\
&= \frac{\hat{U}^2}{2R} \cdot \Big((T - 0) - (\omega \cdot \sin 0 - \omega \cdot \sin 4\pi) \Big) \\
W &= \frac{\hat{U}^2}{2R} \cdot T
\end{aligned}
$$

Als nächstes berechnen wir die Arbeit, wenn am Widerstand R eine Gleichspannung der Größe U_{eff} für die Zeit T anliegt:

$$W = P \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t = \frac{U_{eff}^2}{R} \cdot T$$

Da die Arbeit mit der Gleichspannung und die Arbeit mit Wechselspannung gleich sein sollen, kann ich sie gleichsetzen:

$$
\begin{aligned}
\frac{U_{eff}^2}{R} \cdot T &= \frac{\hat{U}^2}{2R} \cdot T && | \cdot \frac{R}{T} \\
U_{eff}^2 &= \frac{\hat{U}^2}{2} && | \sqrt{} \\
U_{eff} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{U}^2
\end{aligned}
$$

Die Konstante $\frac{1}{\sqrt{2}}$ lässt sich – ähnlich, wie zuvor beim Mittelwert – durch eine dezimale Näherung beschreiben. Damit erhalten wir die Formel zur Bestimmung des Effektivwertes der Spannung:

$$\boxed{U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{U} \approx 0,7071 \cdot \hat{U}}$$

Vergleicht man die Umrechnungsfaktoren für den Mittel- und den Effektivwert miteinander, dann kann man erkennen, dass sie zwar grob näherungsweise gleich sind, sich aber doch um etwa 10% unterscheiden. Deshalb darf man sie nicht miteinander verwechseln.

Man nennt den Effektivwert auch den „*Quadratischen Mittelwert*“. Damit ist gemeint, dass die Momentanwerte alle quadriert werden, bevor ein Mittelwert gebildet wird. Das spiegelt sich in der Leisungsformel $P = \frac{U^2}{R}$ wieder, in der die Spannung im Quadrat vorkommt. Aus diesem Grund verwendet man in neuerer Literatur anstelle von U_{eff} auch die Bezeichnung U_{RMS} für den Effektivwert. Die Buchstaben *RMS* stehen für „*Root Mean Square*“, was auf deutsch nichts anderes als *Quadratischer Mittelwert* bedeutet.

1.3 Übungsfragen zu Grundgrößen der Wechselspannung

Musterlösungen zu den Übungsfragen sind hier zu finden:

http://www.dk4ek.de/elektronik/wechsell.pdf

1.3.1 Frage 1:

Die Netz-Wechselspannung hat eine Frequenz von $f = 50\,\text{Hz}$. Bestimmen Sie:

1. die Periodendauer
2. die Kreisfrequenz

1.3.2 Frage 2:

Die Netz-Wechselspannung hat einen Effektivwert von $U_{eff} = 230\,\text{V}$. Wie groß ist der Scheitelwert $\hat{U}$?

1.3.3 Frage 3:

Eine Wechselspannung hat einen Effektivwert von $U_{eff} = 10\,\text{V}$. Wie groß ist der Mittelwert U_M?

1.3.4 Frage 4:

Mit Hilfe eines Oszilloskopes wird der Spitze-Spitze-Wert einer sinusförmigen Wechselspannung mit $U_{ss} = 30\,\text{V}$ gemessen. Wie groß ist der Effektivwert U_{eff} der Spannung?

1.3.5 Frage 5:

Mit Hilfe eines Oszilloskopes wird die Periodendauer einer sinusförmigen Wechselspannung mit $T = 200\,\mu\text{s}$ gemessen. Wie groß ist die Frequenz f der Spannung?

2 Wechselstromwiderstände

Schließt man eine Wechselspannung an einen Ohmschen Widerstand an, so ergibt sich ein Strom, dessen Momentanwerte zu jedem Zeitpunkt proportional zu den Momentanwerten der Spannung sind. Es gilt das Ohmsche Gesetz:

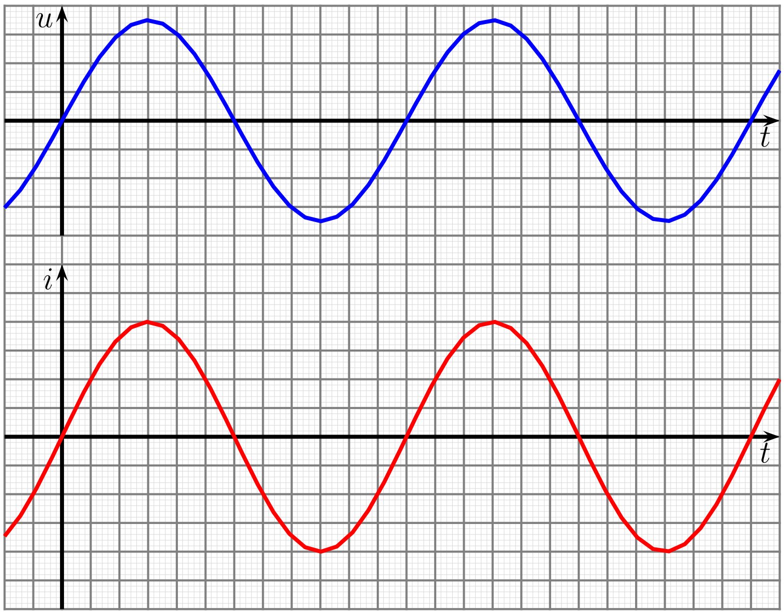
$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

Gehen wir von einer sinusförmigen Spannung gemäß

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega t$$

aus, dann erhält man für den Strom:

$$i(t) = \frac{\hat{U} \cdot \sin \omega t}{R} = \frac{\hat{U}}{R} \cdot \sin \omega t$$



Spannungs- und Stromverlauf im Ohmschen Widerstand

Der Wert für $\frac{\hat{U}}{R}$ kann dabei als Scheitelwert des Stromes mit $\hat{I}$ bezeichnet werden:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}$$

Oben sind Spannung und Strom untereinander dargestellt. Die Maxima und die Nulldurchgänge sind auf der Zeitachse an den gleichen Stellen. Bei einem Kondensator oder einer Spule sieht es anders aus.

2.1 Wechselstromwiderstand eines Kondensators

An einem Kondensator gilt der Zusammenhang zwischen Spannung und Strom:

$$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$$

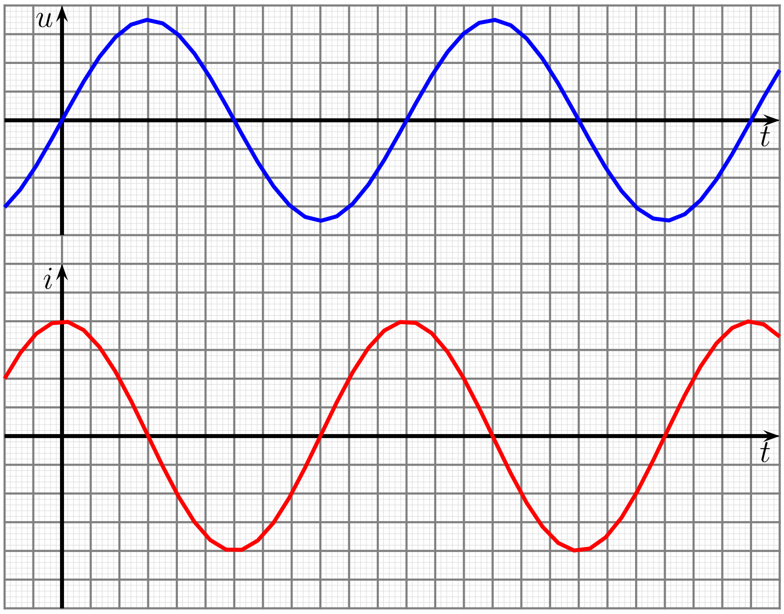
Die **Ableitung** der Spannung, also die **Änderung** der Spannung innerhalb einer bestimmten Zeit bestimmt zusammen mit der Kapazität die Größe des Stromes. Setzen wir nun die bekannte Funktion für die Spannung

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega t$$

in diese Stromfunktion ein, muss die Ableitung gebildet werden.

$$i(t) = C \cdot \frac{d\,\hat{U} \cdot \sin \omega t}{dt} = C \cdot \hat{U} \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

Nebenstehend ist der Verlauf von Spannung und Strom in einem Kondensator dargstellt. Man kann erkennen, das der Strom keinesfalls proportional zur Spannung ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Spannung noch 0. Da sie sich aber hier recht schnell **ändert**, hat der Strom hier seinen Maximalwert. Erreicht die Spannung ihren Scheitelwert, ändert sie sich kaum noch, der Strom wird zu Null. Nach dem Spannungsmaximum verringert sich die Spannung wieder, der Strom fließt nun aus dem Kondensator heraus, er entlädt sich. Der Strom ist also hier schon negativ. Man sagt: **Es gibt eine *Phasenverschiebung* zwischen Spannung und Strom.**



Spannungs- und Stromverlauf im Kondensator

Ähnlich zum Widerstand kann auch hier der Scheitelwert des Stromes angegeben werden. Berücksichtigt man, dass der Kosinus immer nur Werte zwischen +1 und −1 annehmen kann, erhalten wir:

$$\hat{I} = \hat{U} \cdot \omega C$$

Da für die **Scheitelwerte** eine Proportionalität zwischen Spannung und Strom besteht, liegt es nahe, hier auch von einem Widerstand zu sprechen. Da der Zusammenhang hier jedoch **nicht** für die Momentanwerte gilt, bekommt er einem eigenen Namen und ein anderes Formelzeichen. Man nennt diesen Wechselstromwiderstand eines Kondensators **Blindwiderstand** und gibt ihm das Formelzeichen $\mathbf{X_C}$.

Wir können X_C brechnen:

$$X_C = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\hat{U}}{\hat{U} \cdot \omega C} = \frac{1}{\omega C}$$

Hierbei ist immer zu beachten, dass hierdurch nur ein Betrag angegeben wird, die Phasenverschiebung wird **nicht** erfasst! Um diese mit zu berücksichtigen, bietet sich die **Komplexe Rechnung**[3] an. Legt man die Spannung U_C am Kondensator als **reelle** Größe fest, dann erhält man für den Kondensatorstrom I_C eine positiv imaginäre Größe,

[3]Die Grundlagen zu Komplexen Rechnung sind hier zu finden:
http://www.dk4ek.de/mathematik/komplgl.pdf

da der Strom der Spannung in der Phase um 90° vorauseilt.

$$\underline{U}_C = U_C \qquad \text{und} \qquad \underline{I}_C = jI_C$$

Hiermit kann der Komplexe Widerstand des Kondensators bestimmt werden:

$$\underline{X}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}_C} = \frac{U_C}{jI_C} = \frac{U_C}{jU_C \cdot \omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$

Zusammengefasst:

$$\boxed{\underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C}}$$

2.2 Wechselstromwiderstand einer Spule

An einer idealen Spule – besser: an einer **Induktivität** – gilt der Zusammenhang zwischen Spannung und Strom:

$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u(t)\ dt$$

Das **unbestimmte Integral** über der Spannung nach der Zeit bestimmt zusammen mit der Induktivität die Größe des Stromes. Setzen wir nun die bekannte Funktion für die Spannung

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega t$$

in diese Stromfunktion ein, muss das Integral gebildet werden.

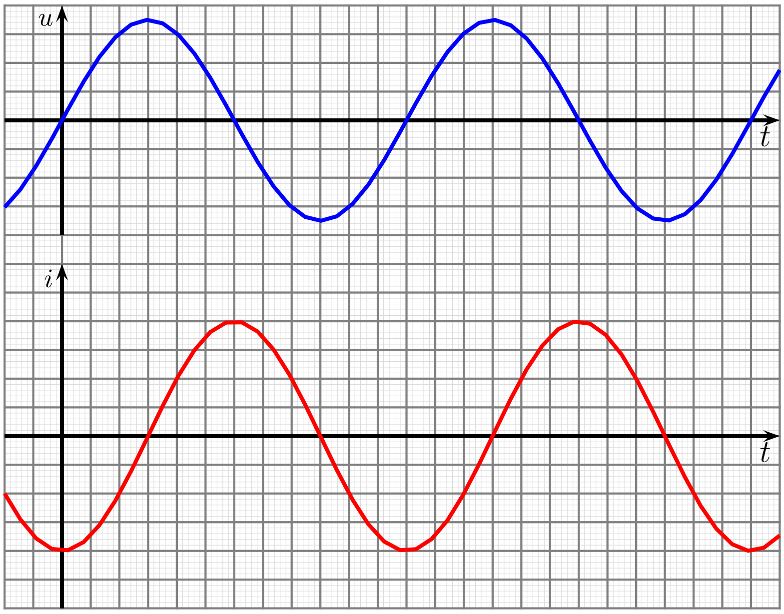
$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int \hat{U} \cdot \sin \omega t\ dt = \frac{1}{L} \cdot \frac{\hat{U}}{\omega} \cdot (-\cos \omega t) + i_0 = -\frac{\hat{U}}{\omega L} \cdot \cos \omega t + i_0$$

Ähnlich zum Kapazitiven Blindwiderstand kann auch hier der Scheitelwert des Stromes angegeben werden. Berücksichtigt man, dass der Kosinus immer nur Werte zwischen $+1$ und -1 annehmen kann, erhalten wir:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\omega C}$$

Wir können den Blindwiderstand X_L der Induktivität brechnen:

$$X_L = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\hat{U}}{\frac{\hat{U}}{\omega L}} = \omega L$$



Spannungs- und Stromverlauf in der Spule

Nebenstehend ist der Verlauf von Spannung und Strom in einer idealen Spule dargstellt. Man kann erkennen, das der Strom keinesfalls proportional zur Spannung ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Spannung noch 0. Es fließt hier ein negativer Strom. Mit steigender Spannung wird dieser Strom schwächer und wird im Spannungsmaximum schließlich zu Null. Dann kehrt sich die Stromrichtung um, und es beginnt ein positiver Strom zu fließen, während die Spannung schon wieder kleiner wird. Die Stromkurve wird zusehens flacher, je kleiner die Spannung geworden ist. Wenn dann die Spannung negativ wird, fließt der Strom zunächst in der alten Richtung weiter, wird aber langsam wieder kleiner. Wie bei dem Kondensator haben wir auch hier eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom, jedoch in der anderen Richtung. Der Strom eilt der Spannung nach.

Wie bei der Kapazität kann man auch bei der Induktivität sinnvoll mit der Komplexen Rechnung arbeiten. Legt man die Spannung U_L an der Induktivität als **reelle** Größe fest, dann erhält man für den Spulenstrom I_L eine negativ imaginäre Größe, da der Strom der Spannung in der Phase um 90° nacheilt.

$$\underline{U}_L = U_L \qquad \text{und} \qquad \underline{I}_L = -jI_L$$

Hiermit kann der Komplexe Widerstand der Induktivität bestimmt werden:

$$\underline{X}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} = \frac{U_L}{-jI_L} = \frac{U_L}{-j\frac{U_L}{\omega L}} = \frac{\omega L}{-j} = j\omega L$$

Zusammengefasst:

$$\boxed{\underline{X}_L = \jmath\omega L}$$

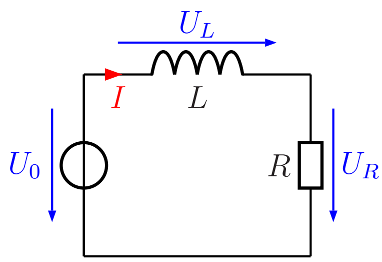
3 Schaltnetze mit Wechselstromwiderständen

Achtung! Für alle Berechnungen ist es wichtig zu wissen, dass in der Wechselstromtechnik nur unter Verwendung der Komplexen Rechnung die Kirchhoffschen Regeln gültig sind! Das liegt daran, dass Phasenverschiebungen zwischen Spannungen und Strömen berücksichtigt werden müssen.

3.1 Reihenschaltungen

3.1.1 R-L-Reihenschaltung

Nebenstehend ist eine Reihenschaltung aus einer Induktivität und einem Ohmschen Widerstand dargestellt. Die Teilspannungen sind mit U_L und U_R bezeichnet, die Gesamtspannung heißt U_0. Da der Strom überall gleich ist, heißt er schlicht I.



R-L-Reihenschaltung

Als Beispiel möchte ich die Schaltung mit folgenden Werten durchrechnen:

$$U_0 = 10\,\mathrm{V} \quad R = 80\,\Omega \quad L = 60\,\mathrm{mH} \quad \omega = 1\,000\,\mathrm{s}^{-1}$$

Zunächst bestimme ich den Blindwiderstand der Induktivität.

$$\underline{X}_L = j\omega L = j \cdot 1\,000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 60\,\mathrm{mH} = j60\,\Omega$$

Damit können R und X_L zu einem Gesamtwiderstand zusammengefasst werden. Für Widerstände, die weder reine Ohmsche Widerstände noch reine Blindwiderstände sind, verwendet man weder den Buchstaben R noch X als Formelzeichen. Man nennt Widerstände mit unbekannter Phasenverschiebung **Scheinwiderstände**, die mit dem Formelzeichen Z gekennzeichnet werden. Den Ersatzwiderstand aus X_L und R nenne ich daher Z. Da X_L und R in Reihe geschaltet sind, kommt die Reihenschaltungsformel von Kirchhoff zur Anwendung.

$$\underline{Z} = \underline{X}_L + \underline{R} = j60\,\Omega + 80\,\Omega$$

Dieser Widerstandswert mit Real- und Imaginärteil kann nicht weiter zusammengefasst werden.

Hiermit kann der komplexe Strom $\underline{I}$ bestimmt werden.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} = \frac{10\,\mathrm{V}}{80\,\Omega + j60\,\Omega}$$

Durch **Konjugiert Komplexes Ereitern**[4] kann man diesen Bruch so umformen, dass $\underline{I}$ mit Real- und Imaginärteil angegeben werden kann.

$$\begin{aligned}
\underline{I} &= \frac{10\,\mathrm{V}}{80\,\Omega + j60\,\Omega} \\
&= \frac{10\,\mathrm{V}\cdot(80\,\Omega - j60\,\Omega)}{(80\,\Omega + j60\,\Omega)\cdot(80\,\Omega - j60\,\Omega)} \\
&= \frac{800\,\mathrm{V}\Omega - j600\,\mathrm{V}\Omega}{6\,400\,\Omega^2 + 3\,600\,\Omega^2} \\
&= \frac{800\,\mathrm{V}\Omega - j600\,\mathrm{V}\Omega}{10\,000\,\Omega^2} \\
&= \frac{800\,\mathrm{V}\Omega}{10\,000\,\Omega^2} - \frac{j600\,\mathrm{V}\Omega}{10\,000\,\Omega^2} \\
\underline{I} &= 80\,\mathrm{mA} - j60\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

Nimmt man ein Strommessgerät in die Hand, dann kann man natürlich keinen komlexen Strom ablesen. Angezeigt wird der **Betrag** des Stromes. Dieser wird nun berechnet.

$$I = \sqrt{(\mathrm{Re}\ \underline{I})^2 + (\mathrm{Im}\ \underline{I})^2} = \sqrt{(80\,\mathrm{mA})^2 + (-60\,\mathrm{mA})^2} = 100\,\mathrm{mA}$$

Als nächstes sollen die komplexen Teilspannungen $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_R$ bestimmt werden.

An X_L gilt das Ohmsche Gesetz:

$$\underline{U}_L = \underline{X}_L \cdot \underline{I} = j60\,\Omega \cdot (80\,\mathrm{mA} - j60\,\mathrm{mA}) = j4{,}8\,\mathrm{V} - j^2 3{,}6\,\mathrm{V} = j4{,}8\,\mathrm{V} + 3{,}6\,\mathrm{V}$$

Auch von dieser Spannung interessiert der Betrag:

$$U_L = \sqrt{(\mathrm{Re}\ \underline{U}_L)^2 + (\mathrm{Im}\ \underline{U}_L)^2} = \sqrt{(3{,}6\,\mathrm{V})^2 + (4{,}8\,\mathrm{V})^2} = 6\,\mathrm{V}$$

Auch an R gilt das Ohmsche Gesetz:

$$\underline{U}_R = \underline{R} \cdot \underline{I} = 80\,\Omega \cdot (80\,\mathrm{mA} - j60\,\mathrm{mA}) = 6{,}4\,\mathrm{V} - j4{,}8\,\mathrm{V}$$

Auch hier interessiert der Betrag der Spannung:

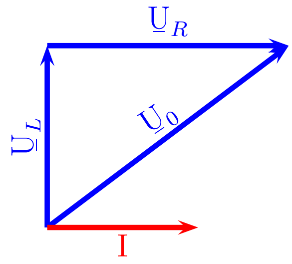
$$U_R = \sqrt{(\mathrm{Re}\ \underline{U}_R)^2 + (\mathrm{Im}\ \underline{U}_R)^2} = \sqrt{(6{,}4\,\mathrm{V})^2 + (-4{,}8\,\mathrm{V})^2} = 8\,\mathrm{V}$$

Zusammenfassung: Addiert man die **Beträge** U_L und U_R, dann erhalten wir für die Summe nicht $U_0 = 10\,\mathrm{V}$, sondern $14\,\mathrm{V}$. Wie zu Beginn dieses Kapitels behauptet gelten die Kirchhoffschen Regeln – hier die Maschenregel – **nicht für die Beträge**, sondern **nur für die komplexen Größen**. Wir überprüfen das:

$$\underline{U}_L + \underline{U}_R = j4{,}8\,\mathrm{V} + 3{,}6\,\mathrm{V} + 6{,}4\,\mathrm{V} - j4{,}8\,\mathrm{V} = 10\,\mathrm{V} = \underline{U}_0$$

[4]Einzelheiten dazu siehe hier auf Seite 7: http://www.dk4ek.de/mathematik/komplgl.pdf

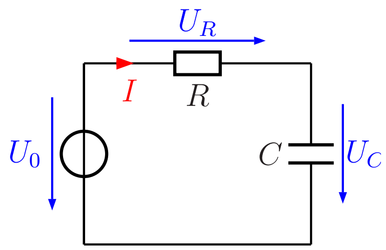
Zu diesem Zusammenhang kann man auch ein **Zeigerbild** darstellen. Für das Zeigerbild bietet es sich an, den Strom $\underline{I}$ als Bezugsgröße zu verwenden, da einerseits dieser Strom in beiden Bauelementen der gleiche ist und andererseits die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom in jedem Bauteil bekannt ist. Da an der Induktivität der Strom um 90° **nach**eilt, muss umgekehrt die Spannung dem Strom um diesen Winkel **voraus**eilen. Deshalb zeigt der Spannungspfeil für $\underline{U}_L$ nach oben. Die Spannung am Widerstand $\underline{U}_R$ hat zum Strom **keine** Phasenverschiebung, wird also **parallel** zum Strompfeil eingetragen. Die Gesamtspannung $\underline{U}_0$ ist die Summe der beiden Teilspannungen, wird dann diagonal eingezeichnet.



Diese Zusammenhänge sind oben dargestellt. Es ist gut ersichtlich, warum nicht einfach die Zeigerlängen von U_L und U_R addiert werden können, um U_0 zu erhalten.

3.1.2 R-C-Reihenschaltung

Die nebenstehende Schaltung soll an der Wechselspannung U_0 betrieben werden. Gesucht ist der Gesamtstrom I sowie die beiden Teilspannungen U_R am Widerstand und U_C am Kondensator.



R-C-Reihenschaltung

Bekannt sind folgende Werte:

$$U_0 = 33{,}8\,\mathrm{V} \quad R = 12\,\mathrm{k\Omega} \quad L = 200\,\mathrm{nF} \quad \omega = 1\,000\,\mathrm{s}^{-1}$$

Zunächst bestimme ich den Blindwiderstand der Kapazität.

$$\underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 1\,000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 200\,\mathrm{nF}} = -j5\,\mathrm{k\Omega}$$

Damit können R und X_C zu einem Gesamtwiderstand zusammengefasst werden. Den Ersatzwiderstand aus R und X_C nenne ich Z. Da R und X_C in Reihe geschaltet sind, kommt die Reihenschaltungsformel von Kirchhoff zur Anwendung.

$$\underline{Z} = \underline{R} + \underline{X}_C = 12\,\mathrm{k\Omega} - j5\,\mathrm{k\Omega}$$

Hiermit kann der komplexe Strom $\underline{I}$ bestimmt werden.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} = \frac{33{,}8\,\mathrm{V}}{12\,\mathrm{k\Omega} - j5\,\mathrm{k\Omega}}$$

Durch **Konjugiert Komplexes Ereitern** kann man diesen Bruch so umformen, dass $\underline{I}$ in einen Real- und einen Imaginärteil zerlegt werden kann.

$$\begin{aligned}
\underline{I} &= \frac{33{,}8\,\mathrm{V}}{12\,\mathrm{k\Omega} - j5\,\mathrm{k\Omega}} \\
&= \frac{33{,}8\,\mathrm{V} \cdot (12\,\mathrm{k\Omega} + j5\,\mathrm{k\Omega})}{(12\,\mathrm{k\Omega} - j5\,\mathrm{k\Omega}) \cdot (12\,\mathrm{k\Omega} + j5\,\mathrm{k\Omega})} \\
&= \frac{405{,}6\,\mathrm{Vk\Omega} + j169\,\mathrm{Vk\Omega}}{144\,\mathrm{k\Omega}^2 + 25\,\mathrm{k\Omega}^2} \\
&= \frac{405{,}6\,\mathrm{Vk\Omega} + j169\,\mathrm{Vk\Omega}}{169\,\mathrm{k\Omega}^2} \\
&= \frac{405{,}6\,\mathrm{Vk\Omega}}{169\,\mathrm{k\Omega}^2} + \frac{169\,\mathrm{Vk\Omega}}{169\,\mathrm{k\Omega}^2} \\
\underline{I} &= 2{,}4\,\mathrm{mA} + j1\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

An einem Strommessgerät kann man natürlich keinen komlexen Strom ablesen. Angezeigt wird der **Betrag** des Stromes. Dieser wird nun berechnet.

$$I = \sqrt{(\mathrm{Re}\ \underline{I})^2 + (\mathrm{Im}\ \underline{I})^2} = \sqrt{(2,4\,\mathrm{mA})^2 + (1\,\mathrm{mA})^2} = 2{,}6\,\mathrm{mA}$$

Als nächstes sollen die komplexen Teilspannungen $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_C$ bestimmt werden.

An R gilt das Ohmsche Gesetz:

$$\underline{U}_R = \underline{R} \cdot \underline{I} = 12\,\mathrm{k\Omega} \cdot (2{,}4\,\mathrm{mA} + j1\,\mathrm{mA}) = 28{,}8\,\mathrm{V} + j12\,\mathrm{V}$$

Von dieser Spannung interessiert der Betrag:

$$U_R = \sqrt{(\mathrm{Re}\ \underline{U}_R)^2 + (\mathrm{Im}\ \underline{U}_R)^2} = \sqrt{(28{,}8\,\mathrm{V})^2 + (12\,\mathrm{V})^2} = 31{,}2\,\mathrm{V}$$

An X_C gilt das Ohmsche Gesetz:

$$\underline{U}_C = \underline{X}_C \cdot \underline{I} = -j5\,\mathrm{k\Omega} \cdot (2{,}4\,\mathrm{mA} + j1\,\mathrm{mA}) = -j12\,\mathrm{V} + 5\,\mathrm{V}$$

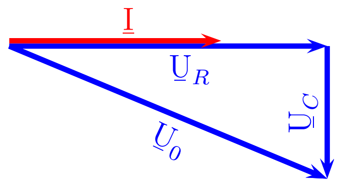
Auch von dieser Spannung interessiert der Betrag:

$$U_C = \sqrt{(\mathrm{Re}\ \underline{U}_C)^2 + (\mathrm{Im}\ \underline{U}_C)^2} = \sqrt{(-12\,\mathrm{V})^2 + (5\,\mathrm{V})^2} = 13\,\mathrm{V}$$

Zusammenfassung: Addiert man die **Beträge** U_R und U_C, dann erhalten wir für die Summe nicht $U_0 = 33{,}8\,\mathrm{V}$, sondern $44{,}2\,\mathrm{V}$. Wie zu Beginn dieses Kapitels behauptet gelten die Kirchhoffschen Regeln – hier die Maschenregel – **nicht für die Beträge**, sondern **nur für die komplexen Größen**. Wir überprüfen das:

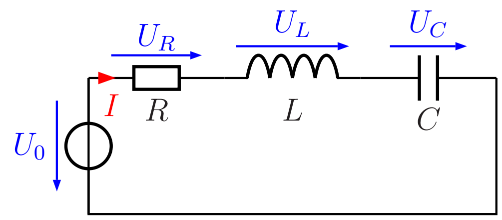
$$\underline{U}_R + \underline{U}_C = 28{,}8\,\mathrm{V} + j12\,\mathrm{V} - j12\,\mathrm{V} + 5\,\mathrm{V} = 33{,}8\,\mathrm{V} = \underline{U}_0$$

Zu diesem Zusammenhang kann man auch ein **Zeigerbild** darstellen. Für das Zeigerbild bietet es sich an, den Strom $\underline{I}$ als Bezugsgröße zu verwenden, da einerseits dieser Strom in beiden Bauelementen der gleiche ist und andererseits die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom in jedem Bauteil bekannt ist. Die Spannung am Widerstand $\underline{U}_R$ hat zum Strom **keine** Phasenverschiebung, wird also **parallel** zum Strompfeil eingetragen. Da an der Kapazität der Strom um 90° **vor**eilt, muss umgekehrt die Spannung dem Strom um diesen Winkel **nach**eilen. Deshalb zeigt der Spannungspfeil für $\underline{U}_C$ nach unten. Die Gesamtspannung $\underline{U}_0$ ist die Summe der beiden Teilspannungen, wird dann diagonal eingezeichnet.



3.1.3 R-L-C-Reihenschaltung

Nebenstehend ist eine Reihenschaltung aus Ohmschem Widerstand, einer Induktivität und einer Kapazität dargestellt. Hier teilt sich die Spannung U_0 auf drei Bauelemente auf.



R-L-C-Reihenschaltung

Betrachten wir auch hier zunächst ein Zahlenbeispiel. Gegeben seien folgende Werte:

$$U_0 = 15\,\mathrm{V} \qquad R = 300\,\Omega \qquad X_L = 900\,\Omega \qquad X_C = 500\,\Omega$$

Bestimmen wir zunächst die komplexen Größen.

Die Spannung U_0 ist die einzige gegebene Spannung. Daher ist es zweckmäßig, diese als Reelle Spannung festzulegen. Damit erhalten wir die Komplexen Größen:

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= 15\,\mathrm{V} \\ \underline{R} &= 300\,\Omega \\ \underline{X}_L &= j900\,\Omega \\ \underline{X}_C &= -j500\,\Omega \end{aligned}$$

Mit diesen Werten kann der Komplexe Ersatzwiderstand bestimmt werden, den ich Z nenne.

$$\underline{Z} = \underline{R} + \underline{X}_L + \underline{X}_C = 300\,\Omega + j900\,\Omega - j500\,\Omega = 300\,\Omega + j400\,\Omega$$

Hiermit kann nun $\underline{I}$ bestimmt werden. Nach dem Ansatz erfolgt das Konjugiert Komplexe Erweitern, damit der Strom nach Real- und Imaginärteil aufgspalten werden kann.

$$\begin{aligned}
\underline{I} &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} \\
&= \frac{15\,\text{V}}{300\,\Omega + j400\,\Omega} \\
&= \frac{15\,\text{V} \cdot (300\,\Omega - j400\,\Omega)}{(300\,\Omega + j400\,\Omega) \cdot (300\,\Omega - j400\,\Omega)} \\
&= \frac{4\,500\,\text{V}\Omega - j6\,000\,\text{V}\Omega}{90\,000\,\Omega^2 + 160\,000\,\Omega^2} \\
&= \frac{4\,500\,\text{V}\Omega - j6\,000\,\text{V}\Omega}{250\,000\,\Omega^2} \\
&= \frac{4\,500\,\text{V}\Omega}{250\,000\,\Omega^2} - \frac{j6\,000\,\text{V}\Omega}{250\,000\,\Omega^2} \\
\underline{I} &= 18\,\text{mA} - j24\,\text{mA}
\end{aligned}$$

Mit diesem Strom können nun alle Teilspannungen bestimmt werden. Beginnen wir mit der Spannung $\underline{U}_R$.

$$\underline{U}_R = \underline{R} \cdot \underline{I} = 300\,\Omega \cdot 18\,\text{mA} - j24\,\text{mA} = 5{,}4\,\text{V} - 7{,}2\,\text{V}$$

Hierzu kann sofort der Betrag berechnet werden:

$$U_R = \sqrt{(\text{Re } \underline{U}_R)^2 + (\text{Im } \underline{U}_R)^2} = \sqrt{(5{,}4\,\text{V})^2 + (7{,}2\,\text{V})^2} = 9\,\text{V}$$

Es folgt die Berechnung der Spannung $\underline{U}_L$.

$$\underline{U}_L = \underline{X}_L \cdot \underline{I} = j900\,\Omega \cdot 18\,\text{mA} - j24\,\text{mA} = j16{,}2\,\text{V} + 21{,}6\,\text{V}$$

Hierzu kann sofort der Betrag berechnet werden:

$$U_L = \sqrt{(\text{Re } \underline{U}_L)^2 + (\text{Im } \underline{U}_L)^2} = \sqrt{(21{,}6\,\text{V})^2 + (16{,}2\,\text{V})^2} = 27\,\text{V}$$

Zum Schluss kommt noch die Spannung $\underline{U}_C$ an die Reihe.

$$\underline{U}_C = \underline{X}_C \cdot \underline{I} = -j500\,\Omega \cdot 18\,\text{mA} - j24\,\text{mA} = -j9\,\text{V} + 12\,\text{V}$$

Hierzu kann sofort der Betrag berechnet werden:

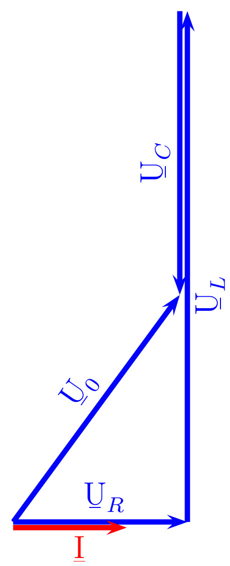
$$U_L = \sqrt{(\text{Re } \underline{U}_L)^2 + (\text{Im } \underline{U}_L)^2} = \sqrt{(12\,\text{V})^2 + (9\,\text{V})^2} = 15\,\text{V}$$

Schaun wir uns die Ergebnisse einmal genau an. Auch hier können wir nicht einfach die Beträge der Spannungen addieren, um auf die Gesamtspannung zu kommen. Schon am Kondensator liegt eine Spannung an, die genau so groß, wie die Gesamtspannung ist. Die Spannung U_L ist sogar deutlich größer, als U_0!

Hierin liegt **kein** Rechenfehler. **In einer R-L-C-Reihenschaltung kann es immer vorkommen, dass einzelne Teilspannungen größer als die Gesamtspannung sind.**

Zur Verdeutlichung kann das nebenstehende Zeigerbild dienen. Dadurch, dass die Zeiger für die Spannung an der Spule und die Spannung am Kondensator **entgegengerichtet** sind, heben sich diese teilweise auf. Nur deren **Differenz** geht in das eigentliche Spannungsdreieck ein.

Dieses Merkmal ist ein generelles Risiko für alle R-L-C-Reihenschaltungen. Teilspannungen können gefährlich hoch werden, obwohl die Betriebsspannung im Bereich der Schutzkleinspannung liegt!



(Dieses Dokument befindet sich noch im Aufbau und wird demnächst ergänzt.)