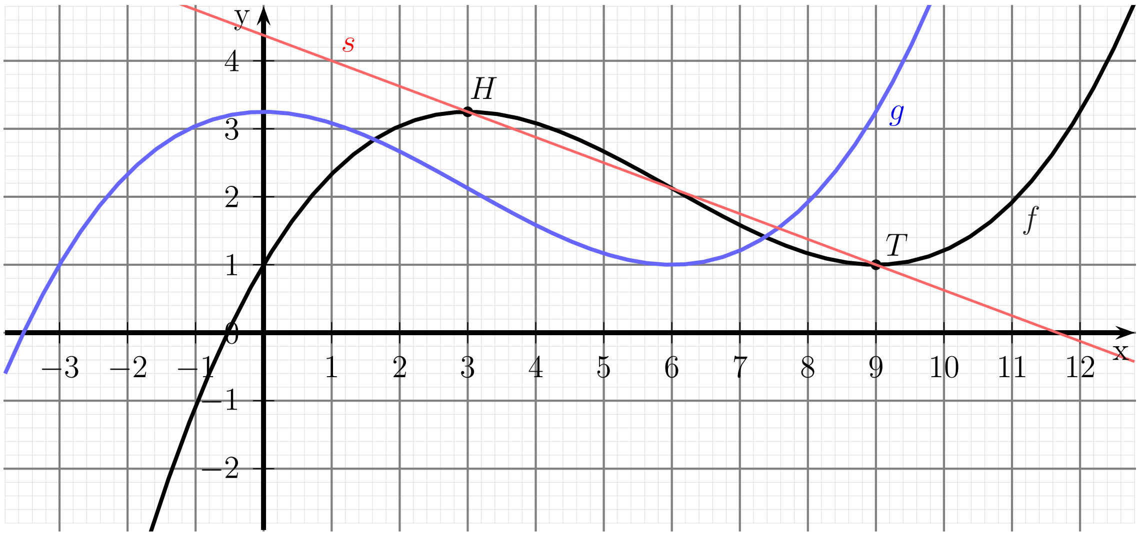
Zentralklausur 2016 Aufgabe 3, mit Hilfsmittel

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung: $f(x) = \frac{1}{48} \cdot x^3 - \frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{27}{16} \cdot x + 1$
Die nachfolgende Abbildung zeigt den Funktionsgraphen von f.



Teil 1a Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung der Geraden der Geraden s durch die Punkte $H\left(3|\frac{13}{4}\right)$ und $T(9|1)$.
[Zwischenergebnis: Die Gerade hat die Steigung $-\frac{3}{8}$.]

Lösung: Die gesuchte Gerade s ist in der Skizze eingezeichnet. Die zugehörige Geradengleichung hat die Form:

$$s(x) = mx + b$$

Als erstes kann die Steigung m berechnet werden.

$$\begin{aligned}
m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \frac{y_T - y_H}{x_T - x_H} \\
&= \frac{1 - \frac{13}{4}}{9 - 3} \\
&= \frac{-\frac{9}{4}}{6} \\
&= -\frac{9}{4 \cdot 6} \\
m &= -\frac{3}{8} \\
\text{alternativ:} \quad m &= -0{,}375
\end{aligned}$$

Damit hat die Geradengleichung diese Form:

$$s(x) = -\frac{3}{8}x + b$$

Zur Bestimmung des Parameters b können die Koordinaten von H oder T in diese Geradengleichung eingesetzt werden. Am bequemsten geht das mit den Koordinaten des Punktes T.

$$\begin{array}{lrcll}
 & s(x_T) & = & y_T & \\
 & -\frac{3}{8} \cdot 9 + b & = & 1 & \\
 & -\frac{27}{8} + b & = & 1 & \mid + \frac{27}{8} \\
 & b & = & 1 + \frac{27}{8} & \\
 & b & = & \frac{35}{8} & \\
\text{alternativ:} & b & = & 4{,}375 &
\end{array}$$

Damit lautet die Geradengleichung: $\boxed{s(x) = -\frac{3}{8}x + \frac{35}{8}}$ oder $\boxed{s(x) = -0{,}375x + 4{,}375}$

Teil 1b Es gibt zwei Stellen, an denen der Graph von f Tangenten hat, die parallel zur Geraden s verlaufen. Ermitteln Sie diese Stellen auf zwei Nachkommastellen genau.

Lösung: Gesucht sind damit die Stellen (x-Werte), bei denen die Steigung (also die erste Ableitung) den gleichen Wert hat wie die Steigung der Geraden.

$$\begin{array}{rcll}
f(x) & = & \frac{1}{48} \cdot x^3 - \frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{27}{16} \cdot x + 1 & \\
f'(x) & = & \frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{27}{16} & \\
f'(x) & = & m & \\
\frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{27}{16} & = & -\frac{3}{8} & \mid + \frac{3}{8} \\
\frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{33}{16} & = & 0 &
\end{array}$$

Die Anweisung „Ermitteln“ in der Aufgabenstellung bedeutet, dass die Art und Weise, wie man an die Ergebnisse kommt, gleichgültig ist. Die Ermittlung mit Hilfe des GTR ist also erlaubt. Man kann also über das Menü *Gleichung* → *Polynomgleichung* die Gleichung mit dem GTR lösen. Weil es aber auch sehr einfach analytisch mit Hilfe der p-q-Formel machbar ist, zeige ich diese Möglichkeit hier auch.

$$\begin{aligned} \frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{33}{16} &= 0 && | \cdot 16 \\ x^2 - 12x + 33 &= 0 \\ x_{1/2} &= 6 \pm \sqrt{36 - 33} \\ x_1 = 6 - \sqrt{3} \approx 4{,}27 & \qquad x_2 = 6 + \sqrt{3} \approx 7{,}73 \end{aligned}$$

Teil 2 Gegeben ist zusätzlich die Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{48} \cdot x^3 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{13}{4}$$

Teil 2a Zeichnen Sie den Graphen von g in die gegebene Abbindung ein.

Lösung: (siehe Skizze)

Teil 2b Der Graph der Funktion g geht durch eine Transformation aus dem Graphen der Funktion f hervor. Geben Sie diese Transformation an.

Lösung: Durch optischen Vergleich erkennt man, dass der Funktionsgraph von f nach links verschoben wurde, um g zu erhalten. An den beiden Tiefpunkten oder den Nullstellen kann man eine Verschiebung um 3 Einheiten nach links ablesen. Da in der Aufgabenstellung **kein Nachweis** – beispielsweise durch eine Rechnung – verlangt ist, reicht die einfache Angabe als Lösung hier vollkommen aus.

Teil 2c Geben Sie eine Funktionsgleichung von g an, aus der die Transformation deutlich wird, durch die der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.

Lösung: Auch hier ist nur eine einfache Angabe ohne Herleitung verlangt. Diese Gleichung ist damit die Antwort: $\boxed{g(x) = f(x + 3)}$

Teil 3 Die folgenden Abbildungen veranschaulichen, wie man den Wert der Ableitung $f'(2)$ näherungsweise ermitteln kann.

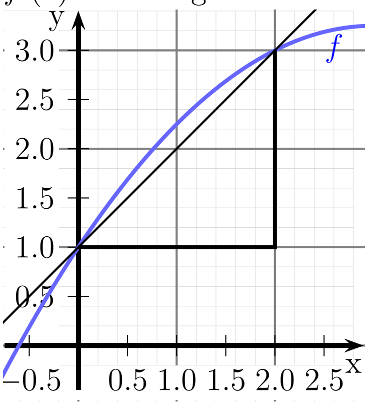


Abb. 1

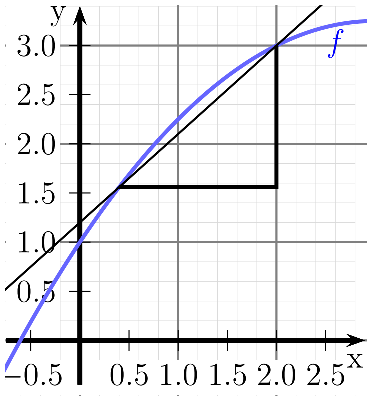


Abb. 2

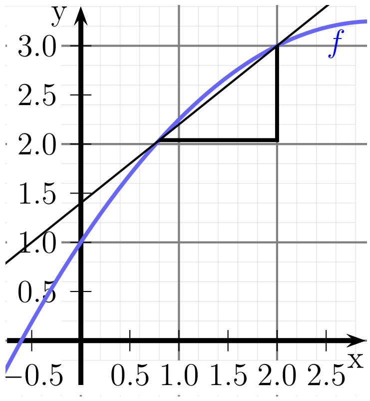


Abb. 3

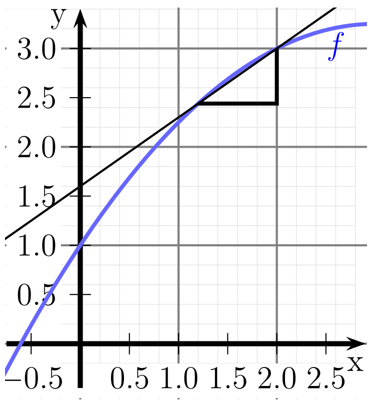


Abb. 4

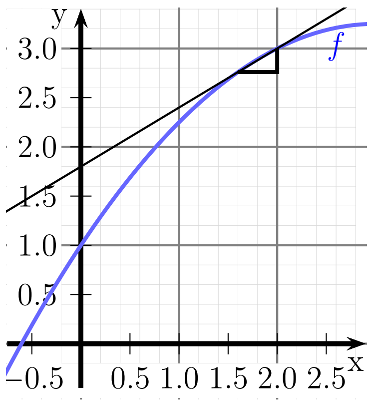


Abb. 5

Teil 3a Geben Sie an, welche Abbildung zum Differenzenquotienten $\frac{f(2)-f(0{,}8)}{2-0{,}8}$ gehört.

Lösung: Im Differenzenquotienten wird die Sekantensteigung $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ dargestellt. Sowohl im Zähler als auch im Nenner erkennt man die beiden x-Werte 2 und 0,8. Die kommen nur in Abb. 3 vor.

Anmerkung: Auch hier ist **keine Begründung** verlangt, die einfache Angabe genügt, auch wenn ich hier eine Begründung zum besseren Verständnis mit angegeben habe.

Teil 3b Geben Sie an, welche geometrische Bedeutung der Wert $f'(2)$ hat.
Erklären Sie, warum in den Abbildungen 1 bis 5 veranschaulicht wird, wie dieser Wert immer genauer ermittelt werden kann.

Lösung: Die Ableitung $f'(2)$ gibt die Steigung einer Tangente an den Funktionsgraphen an der Stelle $x = 2$ an.

Nennen wir den Punkt des Funktionsgraphen, an dem die Tangentensteigung (oder die Ableitung) bestimmt werden soll P. In diesem Fall hat er die Koordinaten $P(2|3)$. In der Abfolge der Abbildungen 1 bis 5 wird jeweils eine Sekante durch einen Hilfspunkt links von P und den Punkt P dargestellt. Je näher dieser Hilfspunkt an den Punkt P herankommt, desto genauer stimmt die **Sekantensteigung** durch diesen Hilfspunkt und P mit der **Tangentensteigung** im Punkt P überein. Die Sekantensteigung nähert sich also $f'(2)$ immer mehr an.