# Wurzelgleichungen

W. Kippels

16. August 2014

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Grundlagen

Beim Lösen mathematischer Probleme stößt man gelegentlich auch auf Gleichungen, die eine oder auch mehrere Quadratwurzeln enthalten. Diese Gleichungen nennt man ***Wurzelgleichungen***. Hier ein Beispiel:

$$5 + \sqrt{5x - 1} = x$$

Im folgenden möchte ich Strategien vorstellen, wie man solche Gleichungen lösen kann.

Die erste Idee, die mancher vielleicht hat, lautet:„Man müsste die Gleichung quadrieren, dann ist die Wurzel weg.“ Leider klappt das nur, wenn man auf diese Weise die Binomischen Formeln missachtet:

$$\begin{aligned} 5 + \sqrt{5x - 1} &= x \qquad |\ (\ )^2 \\ 25 + (5x - 1) &= x^2 \end{aligned}$$

Leider ist das falsch. Es gibt nämlich keine Formel, die lauten würde: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Richtig hingegen ist: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Beachtet man diese Formel, erhält man:

$$\begin{aligned} 5 + \sqrt{5x - 1} &= x \qquad |\ (\ )^2 \\ 25 + 10 \cdot \sqrt{5x - 1} + (5x - 1) &= x^2 \end{aligned}$$

Das hilft also nicht weiter. Es ist immer noch eine Wurzel da. Abhilfe ist jedoch möglich, wenn man vor dem Quadrieren dafür sorgt, dass die Wurzel allein auf einer Seite steht:

$$\begin{aligned} 5 + \sqrt{5x - 1} &= x && |-5 \\ \sqrt{5x - 1} &= x - 5 && |\ (\ )^2 \\ 5x - 1 &= x^2 - 10x + 25 \end{aligned}$$

Jetzt haben wir eine „normale“ Quadratische Gleichung[1] erhalten, die keine Wurzel mehr enthält. Diese kann nun gelöst werden:

$$\begin{aligned} 5x - 1 &= x^2 - 10x + 25 && |-5x+1 \\ 0 &= x^2 - 15x + 26 \\ x_{1/2} &= \frac{15}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{15}{2}\right)^2 - 26} \\ &= \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{104}{4}} \\ &= \frac{15}{2} \pm \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{26}{2} = 13$$

[1]Eine Anleitung zum Lösen Quadratischer Gleichungen (einschließlich Übungsaufgaben mit Lösungen) ist hier zu finden: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quad.pdf

Offenbar haben wir die Lösungsmenge $L = \{2; 13\}$.

Führen wir sicherheitshalber einmal eine Probe durch. Beginnen wir mit $x_1 = 2$.

$$\begin{array}{rcl} 5 + \sqrt{5x-1} & = & x \\ 5 + \sqrt{5 \cdot 2 - 1} & = & 2 \\ 5 + \sqrt{9} & = & 2 \\ 5 + 3 & \neq & 2 \end{array}$$

Nanu, was ist denn da passiert? Die Probe geht **nicht** auf! Haben wir etwa einen Rechenfehler gemacht? Führen wir vor weiteren Überlegungen erst noch die Probe mit $x_2 = 13$ durch.

$$\begin{array}{rcl} 5 + \sqrt{5x-1} & = & x \\ 5 + \sqrt{5 \cdot 13 - 1} & = & 13 \\ 5 + \sqrt{64} & = & 13 \\ 5 + 8 & = & 13 \end{array}$$

Erstaunlicherweise(?) geht diesmal die Probe auf, haben wir uns doch nicht verrechnet?

Sehen wir uns das Ergebnis der Probe mit $x_1 = 2$ einmal genau an. Wenn vor der Wurzel ein Minuszeichen gestanden hätte, dann würde die letzte Zeile lauten:

$$5 - 3 = 2$$

Das wäre richtig. Im Schritt 2, in dem wir die Gleichung (und damit auch die Wurzel) quadriert haben, wäre dieses Minuszeichen vor der Wurzel „wegquadriert“ worden. Zeile 3 hätten wir also sowohl mit einem Pluszeichen, als auch mit einem Minuszeichen vor der Wurzel erhalten. **Wir haben also durch das Quadrieren eine Gleichung erhalten, die *mehr Lösungen* als die Originalgleichung hat.** Dieser Schritt war nämlich keine sogenannte *Äquivalenzumformung*.

Was lernen wir daraus? Bei der Lösung von Wurzelgleichungen erhalten wir möglicherweise mehr Lösungen, als tatsächlich die Wurzelgleichung erfüllen. Daraus ergibt sich folgender Merksatz:

Man muss nach dem Lösen einer Wurzelgleichung **stets** eine Probe machen.

# 2 Übungsaufgaben

Hier sind einige Übungsaufgaben zu Wurzelgleichungen zusammengestellt. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungen! Denken Sie daran, dass vor Festlegung der Lösungsmenge die Proben erforderlich sind!

Die durchgerechneten Lösungen zu diesen Aufgaben finden Sie im nächsten Hauptkapitel.

## 2.1 Aufgabe 1

$$2 + \sqrt{3x - 2} = 5x - 6$$

## 2.2 Aufgabe 2

$$\sqrt{7x + 15} = \sqrt{2x - 5} + 5$$

## 2.3 Aufgabe 3

$$x + 2 + \sqrt{24x - 72} = 5 - x$$

## 2.4 Aufgabe 4

$$\sqrt{2x + 4} - \sqrt{5x + 1} = \sqrt{2x + 16} - \sqrt{5x + 9}$$

## 2.5 Aufgabe 5

$$\sqrt{5x + 1} + \sqrt{4x - 3} = \sqrt{2x - 5}$$

## 2.6 Aufgabe 6

$$4 \cdot \sqrt{3x + 4} - 4 \cdot \sqrt{4x + 1} = \frac{4 \cdot \sqrt{3x + 4} - 1}{\sqrt{3x + 4} + \sqrt{4x + 1}}$$

## 2.7 Aufgabe 7

$$x - \sqrt{33 - x^2 - 4x} = 5$$

## 2.8 Aufgabe 8

$$\sqrt{\sqrt{5x + 4} - \sqrt{2x - 1}} = 2$$

### 2.9 Aufgabe 9

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{6x+3}=\sqrt{11x+5}$$

### 2.10 Aufgabe 10

$$2x-26\cdot\sqrt{x}+72=0$$

### 2.11 Aufgabe 11

$$2x-3\cdot\sqrt{x}=2$$

### 2.12 Aufgabe 12

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+5}=2$$

### 2.13 Aufgabe 13

$$\sqrt{x+4}=\sqrt{2x-1}+6$$

### 2.14 Aufgabe 14

$$30x-16\cdot\sqrt{x}+2=0$$

### 2.15 Aufgabe 15

$$\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}=\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}$$

### 2.16 Aufgabe 16

$$\sqrt{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x-5}-1}=3$$

# 3 Musterlösungen zu den Übungsaufgaben

Hier finden Sie die durchgerechneten Lösungen zu allen Aufgaben.

## 3.1 Lösung Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
2+\sqrt{3x-2} &= 5x-6 && \mid -2\\
\sqrt{3x-2} &= 5x-8 && \mid (\;)^2\\
3x-2 &= 25x^2-80x+64 && \mid -3x+2\\
0 &= 25x^2-83x+66 && \mid :25\\
0 &= x^2-\frac{83}{25}x+\frac{66}{25} && \mid \text{p-q-Formel}\\
x_{1/2} &= \frac{83}{50}\pm\sqrt{\frac{6\,889}{2\,500}-\frac{6\,600}{2\,500}}\\
x_{1/2} &= \frac{83}{50}\pm\frac{17}{50}\\
x_1=\frac{66}{50}=1{,}32 & \qquad x_2=\frac{100}{50}=2
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1 = 1{,}32}$:**

$$\begin{aligned}
2+\sqrt{3x-2} &= 5x-6\\
2+\sqrt{3\cdot 1{,}32-2} &= 5\cdot 1{,}32-6\\
2+\sqrt{1{,}96} &= 0{,}6\\
2+1{,}4 &\neq 0{,}6
\end{aligned}$$

$x_1 = 1{,}32$ ist **keine** Lösung!

**Probe mit $\mathbf{x_2 = 2}$:**

$$\begin{aligned}
2+\sqrt{3x-2} &= 5x-6\\
2+\sqrt{3\cdot 2-2} &= 5\cdot 2-6\\
2+\sqrt{4} &= 4\\
2+2 &= 4
\end{aligned}$$

$x_2 = 2$ ist eine Lösung!

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \{2\}}$

## 3.2 Lösung Aufgabe 2

$$\sqrt{7x+15} = \sqrt{2x-5} + 5$$

In dieser Aufgae haben wir sogar **zwei** Wurzeln! Leider ist es nicht möglich, beide Wurzeln **gleichzeitig** in einem Schritt zu eliminieren. Da eine Wurzel allein auf einer Seite steht, kann jedoch quadriert werden, um die linke Wurzel loszuwerden.

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt{7x+15} & = & \sqrt{2x-5}+5 & \mid (\;)^2 \\
7x+15 & = & (2x-5)+10\cdot\sqrt{2x-5}+25 & \\
7x+15 & = & 2x+20+10\cdot\sqrt{2x-5} & \mid -2x-20 \\
5x-55 & = & 10\cdot\sqrt{2x-5} & \mid :5 \\
x-1 & = & 2\cdot\sqrt{2x-5} & \mid (\;)^2 \\
x^2-2x+1 & = & 4\cdot(2x-5) & \\
x^2-2x+1 & = & 8x-20 & \mid -8x+20 \\
x^2-10x+21 & = & 0 & \mid \text{p-q-Formel} \\
x_{1/2} & = & 5\pm\sqrt{25-21} & \\
x_{1/2} & = & 5\pm 2 & \\
x_1=3 & & x_2=7 &
\end{array}$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_1=3}$:</u>**

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{7x+15} & = & \sqrt{2x-5}+5 \\
\sqrt{7\cdot 3+15} & = & \sqrt{2\cdot 3-5}+5 \\
\sqrt{36} & = & \sqrt{1}+5 \\
6 & = & 1+5
\end{array}$$

$x_1 = 3$ ist eine Lösung.

**<u>Probe mit $\mathbf{x_2=7}$:</u>**

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{7x+15} & = & \sqrt{2x-5}+5 \\
\sqrt{7\cdot 7+15} & = & \sqrt{2\cdot 7-5}+5 \\
\sqrt{64} & = & \sqrt{9}+5 \\
8 & = & 3+5
\end{array}$$

$x_2 = 7$ ist (auch) eine Lösung.

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \{3; 7\}}$

## 3.3 Lösung Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
x + 2 + \sqrt{24x - 72} &= 5 - x && | - x - 2 \\
\sqrt{24x - 72} &= 3 - 2x && | \; (\;)^2 \\
24x - 72 &= 9 - 12x + 4x^2 && | - 24x + 72 \\
0 &= 4x^2 - 36x + 81 && | : 4 \\
0 &= x^2 - 9x + \frac{81}{4} && | \text{ p-q-Formel} \\
x_{1/2} &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{81}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{9}{2} \pm 0 \\
x &= 4{,}5
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x = 4{,}5}$:**

$$\begin{aligned}
x + 2 + \sqrt{24x - 72} &= 5 - x \\
4{,}5 + 2 + \sqrt{24 \cdot 4{,}5 - 72} &= 5 - 4{,}5 \\
6{,}5 + \sqrt{36} &= 0{,}5 \\
6{,}5 + 6 &\neq 0{,}5
\end{aligned}$$

Es gibt **keine** Lösung für die Gleichung, die Lösungsmenge lautet: $\boxed{L = \{\;\}}$

## 3.4 Lösung Aufgabe 4

$$\sqrt{2x+4} - \sqrt{5x+1} = \sqrt{2x+16} - \sqrt{5x+9}$$

Hier haben wir gleich 4 Wurzeln! Durch Quadrieren kann man aber deren Zahl auf 2 reduzieren.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+4} - \sqrt{5x+1} &= \sqrt{2x+16} - \sqrt{5x+9} \quad |\ (\ )^2 \\
2x+4-2\cdot\sqrt{2x+4}\cdot\sqrt{5x+1}+5x+1 &= 2x+16-2\cdot\sqrt{2x+16}\cdot\sqrt{5x+9}+5x+9 \\
7x+5-2\cdot\sqrt{(2x+4)\cdot(5x+1)} &= 7x+25-2\cdot\sqrt{(2x+16)\cdot(5x+9)} \\
7x+5-2\cdot\sqrt{10x^2+2x+20x+4} &= 7x+25-2\cdot\sqrt{10x^2+18x+80x+144} \quad |-7x-5 \\
-2\cdot\sqrt{10x^2+22x+4} &= 20-2\cdot\sqrt{10x^2+98x+144} \quad |\ (\ )^2 \\
4\cdot(10x^2+22x+4) &= 400-80\cdot\sqrt{10x^2+98x+144}+4\cdot(10x^2+98x+144) \\
40x^2+88x+16 &= 400-80\cdot\sqrt{10x^2+98x+144}+40x^2+392x+576 \quad |-40x^2 \\
88x+16 &= -80\cdot\sqrt{10x^2+98x+144}+392x+976 \quad |-392x-976 \\
-304x-960 &= -80\cdot\sqrt{10x^2+98x+144} \quad |:(-16) \\
19x+60 &= 5\cdot\sqrt{10x^2+98x+144} \quad |\ (\ )^2 \\
361x^2+2\,280x+3\,600 &= 25\cdot(10x^2+98x+144) \\
361x^2+2\,280x+3\,600 &= 250x^2+2\,450x+3\,600 \quad |-250x^2-2\,450x-3\,600 \\
111x^2-170x &= 0 \quad |:111 \\
x^2-\frac{170}{111}x &= 0 \\
x\cdot\left(x-\frac{170}{111}\right) &= 0 \\
x_1 = 0 & \qquad x_2 = \frac{170}{111}
\end{aligned}$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_1 = 0}$:</u>**

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\cdot 0+4} - \sqrt{5\cdot 0+1} &= \sqrt{2\cdot 0+16} - \sqrt{5\cdot 0+9} \\
\sqrt{4} - \sqrt{1} &= \sqrt{16} - \sqrt{9} \\
2-1 &= 4-3
\end{aligned}$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_2 = \frac{170}{111}}$:</u>**

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\cdot\frac{170}{111}+4} - \sqrt{5\cdot\frac{170}{111}+1} &= \sqrt{2\cdot\frac{170}{111}+16} - \sqrt{5\cdot\frac{170}{111}+9} \\
\sqrt{\frac{784}{111}} - \sqrt{\frac{961}{111}} &= \sqrt{\frac{2\,116}{111}} - \sqrt{\frac{1\,849}{111}} \\
\frac{28}{\sqrt{111}} - \frac{31}{\sqrt{111}} &= \frac{46}{\sqrt{111}} - \frac{43}{\sqrt{111}} \\
-\frac{3}{\sqrt{111}} &\neq \frac{3}{\sqrt{111}}
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \{0\}}$

## 3.5 Lösung Aufgabe 5

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{2x-5}$$

Hier kann sofort quadriert werden.

$$\begin{aligned}
\sqrt{5x+1}+\sqrt{4x-3} &= \sqrt{2x-5} && |(\ )^2\\
5x+1+2\cdot\sqrt{(5x+1)\cdot(4x-3)}+4x-3 &= 2x-5 && |-9x+2\\
2\cdot\sqrt{20x^2-15x+4x-3} &= -7x-3 && |(\ )^2\\
4\cdot(20x^2-11x-3) &= 49x^2+42x+9 &&\\
80x^2-44x-12 &= 49x^2+42x+9 && |-49x^2-42x-9\\
31x^2-86x-21 &= 0 && |:31\\
x^2-\frac{86}{31}x-\frac{21}{31} &= 0 &&\\
x_{1/2} &= \frac{43}{31}\pm\sqrt{\frac{1\,849}{961}+\frac{651}{961}} &&\\
x_{1/2} &= \frac{43}{31}\pm\sqrt{\frac{2\,500}{961}} &&\\
x_{1/2} &= \frac{43}{31}\pm\frac{50}{31} &&\\
x_1 = -\frac{7}{31} & \qquad x_2 = 3 &&
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1 = -\frac{7}{31}}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{5x+1}+\sqrt{4x-3} &= \sqrt{2x-5}\\
\sqrt{5\cdot\left(-\tfrac{7}{31}\right)+1}+\sqrt{4\cdot\left(-\tfrac{7}{31}\right)-3} &= \sqrt{2\cdot\left(-\tfrac{7}{31}\right)-5}\\
\sqrt{-\tfrac{4}{31}}+\sqrt{-\tfrac{121}{31}} &= \sqrt{-\tfrac{169}{31}}
\end{aligned}$$

Da die Wurzeln alle keine (reelle) Lösung haben, ist $x_1 = -\frac{7}{31}$ keine Lösung.

**Probe mit $\mathbf{x_2 = 3}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{5x+1}+\sqrt{4x-3} &= \sqrt{2x-5}\\
\sqrt{5\cdot 3+1}+\sqrt{4\cdot 3-3} &= \sqrt{2\cdot 3-5}\\
\sqrt{16}+\sqrt{9} &= \sqrt{1}\\
4+3 &\neq 1
\end{aligned}$$

Auch $x_2 = 3$ erfüllt nicht die Gleichung.

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \{\ \}}$

## 3.6 Lösung Aufgabe 6

$$4 \cdot \sqrt{3x+4} - 4 \cdot \sqrt{4x+1} = \frac{4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4x+1}}$$

Es sollt auffallen, dass der Nenner des Bruches annähernd identisch mit der linken Gleichungsseite ist. Nur das Rechenzeichen dazwischen ist anders. Multipliziert man nun die Gleichung mit dem (rechten) Nenner, dann löst die dritte Binomische Formel links alle Wurzeln auf.

$$\begin{aligned}
4 \cdot \sqrt{3x+4} - 4 \cdot \sqrt{4x+1} &= \frac{4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4x+1}} \\
4 \cdot \left(\sqrt{3x+4} - \sqrt{4x+1}\right) &= \frac{4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{4x+1}} && | \cdot \left(\sqrt{3x+4} + \sqrt{4x+1}\right) \\
4 \cdot \left((3x+4) - (4x+1)\right) &= 4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1 \\
4 \cdot (3x + 4 - 4x - 1) &= 4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1 \\
4 \cdot (-x+3) &= 4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1 \\
-4x + 12 &= 4 \cdot \sqrt{3x+4} - 1 && | + 1 \\
-4x + 13 &= 4 \cdot \sqrt{3x+4} && | \; (\;)^2 \\
16x^2 - 104x + 169 &= 16 \cdot (3x+4) \\
16x^2 - 104x + 169 &= 48x + 64 && | - 48x - 64 \\
16x^2 - 152x + 105 &= 0 && | : 16 \\
x^2 - \frac{19}{2} + \frac{105}{16} &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{19}{4} \pm \sqrt{\frac{361}{16} - \frac{105}{16}} \\
x_{1/2} &= \frac{19}{4} \pm \sqrt{\frac{256}{16}} \\
x_{1/2} &= \frac{19}{4} \pm \frac{16}{4} \\
x_1 = \frac{3}{4} &\qquad x_2 = \frac{35}{4}
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1 = \frac{3}{4}}$:**

$$\begin{aligned}
4\cdot\sqrt{3x+4}-4\cdot\sqrt{4x+1} &= \frac{4\cdot\sqrt{3x+4}-1}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4x+1}}\\
4\cdot\sqrt{3\cdot\frac{3}{4}+4}-4\cdot\sqrt{4\cdot\frac{3}{4}+1} &= \frac{4\cdot\sqrt{3\cdot\frac{3}{4}+4}-1}{\sqrt{3\cdot\frac{3}{4}+4}+\sqrt{4\cdot\frac{3}{4}+1}}\\
4\cdot\sqrt{\frac{25}{4}}-4\cdot\sqrt{4} &= \frac{4\cdot\sqrt{\frac{25}{4}}-1}{\sqrt{\frac{25}{4}}+\sqrt{4}}\\
4\cdot\frac{5}{2}-4\cdot 2 &= \frac{4\cdot\frac{5}{2}-1}{\frac{5}{2}+2}\\
10-8 &= \frac{9}{\frac{9}{2}}\\
2 &= 2
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2 = \frac{35}{4}}$:**

$$\begin{aligned}
4\cdot\sqrt{3x+4}-4\cdot\sqrt{4x+1} &= \frac{4\cdot\sqrt{3x+4}-1}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4x+1}}\\
4\cdot\sqrt{3\cdot\frac{35}{4}+4}-4\cdot\sqrt{4\cdot\frac{35}{4}+1} &= \frac{4\cdot\sqrt{3\cdot\frac{35}{4}+4}-1}{\sqrt{3\cdot\frac{35}{4}+4}+\sqrt{4\cdot\frac{35}{4}+1}}\\
4\cdot\sqrt{\frac{121}{4}}-4\cdot\sqrt{36} &= \frac{4\cdot\sqrt{\frac{121}{4}}-1}{\sqrt{\frac{121}{4}}+\sqrt{36}}\\
4\cdot\frac{11}{2}-4\cdot 6 &= \frac{4\cdot\frac{11}{2}-1}{\frac{11}{2}+6}\\
22-24 &= \frac{21}{\frac{23}{2}}\\
-2 &\neq \frac{42}{23}
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\left\{\frac{3}{4}\right\}}$

## 3.7 Lösung Aufgabe 7

$$\begin{aligned}
x-\sqrt{33-x^2-4x} &= 5 && \mid -x \\
-\sqrt{33-x^2-4x} &= 5-x && \mid (\ )^2 \\
33-x^2-4x &= 25-10x+x^2 && \mid -33+x^2+4x \\
0 &= 2x^2-6x-8 && \mid :2 \\
0 &= x^2-3x-4 && \\
x_{1/2} &= \frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}} && \\
x_{1/2} &= \frac{3}{2}\pm\frac{5}{2} && \\
x_1=-1 & \quad\quad x_2=4 &&
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1=-1}$:**

$$\begin{aligned}
x-\sqrt{33-x^2-4x} &= 5 \\
-1-\sqrt{33-(-1)^2-4\cdot(-1)} &= 5 \\
-1-6 &\neq 5
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2=4}$:**

$$\begin{aligned}
x-\sqrt{33-x^2-4x} &= 5 \\
4-\sqrt{33-4^2-4\cdot 4} &= 5 \\
4-1 &\neq 5
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{\ \}}$

## 3.8 Lösung Aufgabe 8

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}} &= 2 && |\ (\ )^2\\
\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1} &= 4 && |\ (\ )^2\\
5x+4-2\cdot\sqrt{(5x+4)\cdot(2x-1)}+2x-1 &= 16 &&\\
7x+3-2\cdot\sqrt{10x^2-5x+8x-4} &= 16 && |-7x-3\\
-2\cdot\sqrt{10x^2+3x-4} &= -7x+13 && |\ (\ )^2\\
4\cdot(10x^2+3x-4) &= 49x^2-182x+169 &&\\
40x^2+12x-16 &= 49x^2-182x+169 && |-40x^2-12x+16\\
0 &= 9x^2-194x+185 && |:9\\
0 &= x^2-\frac{194}{9}x+\frac{185}{9} &&\\
x_{1/2} &= \frac{97}{9}\pm\sqrt{\frac{9\,409}{81}-\frac{1\,665}{81}} &&\\
x_{1/2} &= \frac{97}{9}\pm\frac{88}{9} &&\\
x_1=\frac{185}{9} & \qquad x_2=1 &&
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1=\frac{185}{9}}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}} &= 2\\
\sqrt{\sqrt{5\cdot\frac{185}{9}+4}-\sqrt{2\cdot\frac{185}{9}-1}} &= 2\\
\sqrt{\sqrt{\frac{961}{9}}-\sqrt{\frac{361}{9}}} &= 2\\
\sqrt{\frac{31}{3}-\frac{19}{3}} &= 2\\
\sqrt{\frac{12}{3}} &= 2\\
\sqrt{4} &= 2
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2=1}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}} &= 2\\
\sqrt{\sqrt{5\cdot 1+4}-\sqrt{2\cdot 1-1}} &= 2\\
\sqrt{\sqrt{9}-\sqrt{1}} &= 2\\
\sqrt{3-1} &= 2\\
\sqrt{2} &\neq 2
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\left\{\frac{185}{9}\right\}}$

## 3.9 Lösung Aufgabe 9

$$
\begin{array}{rcll}
\sqrt{2x-1}+\sqrt{6x+3} &=& \sqrt{11x+5} & |\ (\ )^2\\
2x-1+2\cdot\sqrt{(2x-1)\cdot(6x+3)}+6x+3 &=& 11x+5 & \\
8x+2+2\cdot\sqrt{12x^2+6x-6x-3} &=& 11x+5 & |-8x-2\\
2\cdot\sqrt{12x^2-3} &=& 3x+3 & |\ (\ )^2\\
4\cdot(12x^2-3) &=& 9x^2+18x+9 & \\
48x^2-12 &=& 9x^2+18x+9 & |-9x^2-18x-9\\
39x^2-18x-21 &=& 0 & |:39\\
x^2-\frac{6}{13}x-\frac{7}{13} &=& 0 & \\
x_{1/2} &=& \frac{3}{13}\pm\sqrt{\frac{9}{169}+\frac{91}{169}} & \\
x_{1/2} &=& \frac{3}{13}\pm\frac{10}{13} & \\
x_1=-\frac{7}{13} & & x_2=1 &
\end{array}
$$

**Probe mit $\mathbf{x_1=-\frac{7}{13}}$:**

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{2x-1}+\sqrt{6x+3} &=& \sqrt{11x+5}\\
\sqrt{2\cdot(-\frac{7}{13})-1}+\sqrt{6\cdot(-\frac{7}{13})+3} &=& \sqrt{11\cdot(-\frac{7}{13})+5}\\
\sqrt{-\frac{27}{13}}+\sqrt{-\frac{3}{13}} &=& \sqrt{-\frac{12}{13}}
\end{array}
$$

Keine der Wurzeln hat eine (reelle) Lösung. Daher gehört $x_1$ **nicht** zur Lösungsmenge.

**Probe mit $\mathbf{x_2=1}$:**

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{2x-1}+\sqrt{6x+3} &=& \sqrt{11x+5}\\
\sqrt{2\cdot1-1}+\sqrt{6\cdot1+3} &=& \sqrt{11\cdot1+5}\\
\sqrt{1}+\sqrt{9} &=& \sqrt{16}\\
1+3 &=& 4
\end{array}
$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{1\}}$

## 3.10 Lösung Aufgabe 10

$$\begin{aligned}
2x - 26 \cdot \sqrt{x} + 72 &= 0 & &| + 26 \cdot \sqrt{x} \\
2x + 72 &= 26 \cdot \sqrt{x} & &| \; (\;)^2 \\
4x^2 + 288x + 5\,184 &= 676x & &| - 676x \\
4x^2 - 388x + 5\,184 &= 0 & &| : 4 \\
x^2 - 97x + 1\,296 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{97}{2} \pm \sqrt{\frac{9\,409}{4} - 1\,296} \\
x_{1/2} &= \frac{97}{2} \pm \sqrt{\frac{9\,409}{4} - \frac{5\,184}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{97}{2} \pm \sqrt{\frac{4\,255}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{97}{2} \pm \frac{65}{2} \\
x_1 = 16 & \quad x_2 = 81
\end{aligned}$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_1 = 16}$:</u>**

$$\begin{aligned}
2x - 26 \cdot \sqrt{x} + 72 &= 0 \\
2 \cdot 16 - 26 \cdot \sqrt{16} + 72 &= 0 \\
32 - 26 \cdot 4 + 72 &= 0 \\
32 - 104 + 72 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_2 = 81}$:</u>**

$$\begin{aligned}
2x - 26 \cdot \sqrt{x} + 72 &= 0 \\
2 \cdot 81 - 26 \cdot \sqrt{81} + 72 &= 0 \\
162 - 26 \cdot 9 + 72 &= 0 \\
162 - 234 + 72 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \{16; 81\}}$

## 3.11 Lösung Aufgabe 11

$$\begin{aligned}
2x - 3\cdot\sqrt{x} &= 2 && \mid +3\cdot\sqrt{x} - 2\\
2x - 2 &= 3\cdot\sqrt{x} && \mid (\ )^2\\
4x^2 - 8x + 4 &= 9\cdot x && \mid -9x\\
4x^2 - 17x + 4 &= 0 && \mid :4\\
x^2 - \frac{17}{4}x + 1 &= 0\\
x_{1/2} &= \frac{17}{8} \pm \sqrt{\frac{289}{64} - 1}\\
x_{1/2} &= \frac{17}{8} \pm \sqrt{\frac{289}{64} - \frac{64}{64}}\\
x_{1/2} &= \frac{17}{8} \pm \sqrt{\frac{225}{64}}\\
x_{1/2} &= \frac{17}{8} \pm \frac{15}{8}\\
x_1 = \frac{1}{4} & \qquad x_2 = 4
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1 = \frac{1}{4}}$:**

$$\begin{aligned}
2x - 3\cdot\sqrt{x} &= 2\\
2\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\sqrt{\frac{1}{4}} &= 2\\
\frac{1}{2} - \frac{3}{2} &\neq 2
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2 = 4}$:**

$$\begin{aligned}
2x - 3\cdot\sqrt{x} &= 2\\
2\cdot 4 - 3\cdot\sqrt{4} &= 2\\
8 - 6 &= 2
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \{4\}}$

## 3.12 Lösung Aufgabe 12

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+5} &= 2 && |\ (\ )^2\\
x+3+2\cdot\sqrt{(x+3)\cdot(2x+5)}+2x+5 &= 4 &&\\
3x+8+2\cdot\sqrt{2x^2+5x+6x+15} &= 4 &&\\
3x+8+2\cdot\sqrt{2x^2+11x+15} &= 4 && |-3x-8\\
2\cdot\sqrt{2x^2+11x+15} &= -3x-4 && |\ (\ )^2\\
4\cdot(2x^2+11x+15) &= 9x^2+24x+16 &&\\
8x^2+44x+60 &= 9x^2+24x+16 && |-8x^2-44x-60\\
0 &= x^2-20x-44 &&\\
x_{1/2} &= 10\pm\sqrt{100+44} &&\\
x_{1/2} &= 10\pm 12 &&\\
x_1=-2 & \qquad x_2=22 &&
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1=-2}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+5} &= 2\\
\sqrt{-2+3}+\sqrt{2\cdot(-2)+5} &= 2\\
1+1 &= 2
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2=22}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+5} &= 2\\
\sqrt{22+3}+\sqrt{2\cdot 22+5} &= 2\\
5+7 &\neq 2
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{-2\}}$

## 3.13 Lösung Aufgabe 13

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+4} &= \sqrt{2x-1}+6 && |\ (\ )^2 \\
x+4 &= 2x-1+12\cdot\sqrt{2x-1}+36 && |-2x-35 \\
-x-31 &= 12\cdot\sqrt{2x-1} && |\ (\ )^2 \\
x^2+62x+961 &= 144\cdot(2x-1) && \\
x^2+62x+961 &= 288x-144 && |-288x+144 \\
x^2+226x+1\,105 &= 0 && \\
x_{1/2} &= -113\pm\sqrt{12\,769-1\,105} && \\
x_{1/2} &= 113\pm 108 && \\
x_1=5 & \quad x_2=221 &&
\end{aligned}$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_1=5}$:</u>**

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+4} &= \sqrt{2x-1}+6 \\
\sqrt{5+4} &= \sqrt{2\cdot 5-1}+6 \\
3 &\neq 3+6
\end{aligned}$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_2=221}$:</u>**

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+4} &= \sqrt{2x-1}+6 \\
\sqrt{221+4} &= \sqrt{2\cdot 221-1}+6 \\
15 &\neq 21+6
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{\ \}}$

## 3.14 Lösung Aufgabe 14

$$\begin{aligned}
30x - 16\cdot\sqrt{x} + 2 &= 0 && \mid +16\cdot\sqrt{x}\\
30x + 2 &= 16\cdot\sqrt{x} && \mid (\ )^2\\
900x^2 + 120x + 4 &= 256x && \mid -256x\\
900x^2 - 136x + 4 &= 0 && \mid :900\\
x^2 - \frac{34}{225} + \frac{1}{225} &= 0\\
x_{1/2} &= \frac{17}{225} \pm \sqrt{\frac{289}{50\,625} - \frac{1}{225}}\\
x_{1/2} &= \frac{17}{225} \pm \sqrt{\frac{289}{50\,625} - \frac{225}{50\,625}}\\
x_{1/2} &= \frac{17}{225} \pm \frac{8}{225}\\
x_1 = \frac{1}{25} & \qquad x_2 = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_1 = \frac{1}{25}}$:</u>**

$$\begin{aligned}
30x - 16\cdot\sqrt{x} + 2 &= 0\\
30\cdot\frac{1}{25} - 16\cdot\sqrt{\frac{1}{25}} + 2 &= 0\\
\frac{30}{25} - \frac{16}{5} + 2 &= 0\\
\frac{6}{5} - \frac{16}{5} + \frac{10}{5} &= 0
\end{aligned}$$

**<u>Probe mit $\mathbf{x_2 = \frac{1}{9}}$:</u>**

$$\begin{aligned}
30x - 16\cdot\sqrt{x} + 2 &= 0\\
30\cdot\frac{1}{9} - 16\cdot\sqrt{\frac{1}{9}} + 2 &= 0\\
\frac{30}{9} - \frac{16}{3} + 2 &= 0\\
\frac{10}{3} - \frac{16}{3} + \frac{6}{3} &= 0
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \left\{\frac{1}{25}; \frac{1}{9}\right\}}$

## 3.15 Lösung Aufgabe 15

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x} & = & \sqrt{3-x}-\sqrt{3+x} & |\ (\ )^2 \\
5+x-2\cdot\sqrt{(5+x)(5-x)}+5-x & = & 3-x-2\cdot\sqrt{(3-x)(3+x)}+3+x & \\
10-2\cdot\sqrt{25-x^2} & = & 6-2\cdot\sqrt{9-x^2} & |-6 \\
4-2\cdot\sqrt{25-x^2} & = & -2\cdot\sqrt{9-x^2} & |:2 \\
2-\sqrt{25-x^2} & = & -\sqrt{9-x^2} & |\ (\ )^2 \\
4-4\cdot\sqrt{25-x^2}+25-x^2 & = & 9-x^2 & |+x^2 \\
-4\cdot\sqrt{25-x^2}+29 & = & 9 & |-29 \\
-4\cdot\sqrt{25-x^2} & = & -20 & |\ (\ )^2 \\
16\cdot(25-x^2) & = & 400 & \\
400-64x^2 & = & 400 & |-400 \\
-64x^2 & = & 0 & |:(-64) \\
x^2 & = & 0 & |\ \sqrt{\ } \\
x & = & 0 &
\end{array}$$

**Probe mit x = 0:**

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x} & = & \sqrt{3-x}-\sqrt{3+x} \\
\sqrt{5+0}-\sqrt{5-0} & = & \sqrt{3-0}-\sqrt{3+0} \\
\sqrt{5}-\sqrt{5} & = & \sqrt{3}-\sqrt{3} \\
0 & = & 0
\end{array}$$

Aus dem Ergebnis der Probe ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L = \{0\}}$

## 3.16 Lösung Aufgabe 16

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x-5}-1} &= 3 && |\ (\ )^2\\
\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x-5}-1 &= 9 && |+1\\
\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x-5} &= 10 && \\
5x+1+2\cdot\sqrt{(5x+1)\cdot(3x-5)}+3x-5 &= 100 && \\
8x-4+2\cdot\sqrt{15x^2-25x+3x-5} &= 100 && |-8x+4\\
2\cdot\sqrt{15x^2-22x-5} &= -8x+104 && |:2\\
\sqrt{15x^2-22x-5} &= -4x+52 && |\ (\ )^2\\
15x^2-22x-5 &= 16x^2-416x+2\,704 && |-15x^2+22x+5\\
0 &= x^2-394x+2\,709 && \\
x_{1/2} &= 197\pm\sqrt{38\,809-2\,709} && \\
x_{1/2} &= 197\pm\sqrt{36\,100} && \\
x_{1/2} &= 197\pm 190 && \\
x_1=7 & \quad x_2=387 &&
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_1 = 7}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x-5}-1} &= 3\\
\sqrt{\sqrt{5\cdot 7+1}+\sqrt{3\cdot 7-5}-1} &= 3\\
\sqrt{\sqrt{36}+\sqrt{16}-1} &= 3\\
\sqrt{6+4-1} &= 3\\
\sqrt{9} &= 3
\end{aligned}$$

**Probe mit $\mathbf{x_2 = 387}$:**

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{5x+1}+\sqrt{3x-5}-1} &= 3\\
\sqrt{\sqrt{5\cdot 387+1}+\sqrt{3\cdot 387-5}-1} &= 3\\
\sqrt{\sqrt{1\,936}+\sqrt{1\,156}-1} &= 3\\
\sqrt{44+34-1} &= 3\\
\sqrt{77} &\neq 3
\end{aligned}$$

Aus dem Ergebnis der Proben ergibt sich die Lösungsmenge: $\boxed{L=\{7\}}$