

Grundlagen der Wechselstromtechnik

W. Kippels

6. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Grundgrößen der Wechselstromtechnik	2
1.1	Definitionen einiger Grundgrößen	2
1.2	Mittelwert und Effektivwert	4
1.2.1	Mittelwert	4
1.2.2	Effektivwert	5
1.3	Übungsfragen zu Grundgrößen der Wechselspannung	7
1.3.1	Frage 1:	7
1.3.2	Frage 2:	8
1.3.3	Frage 3:	8
1.3.4	Frage 4:	8
1.3.5	Frage 5:	8
2	Wechselstromwiderstände	9
2.1	Wechselstromwiderstand eines Kondensators	9
2.2	Wechselstromwiderstand einer Spule	12
2.3	Übungsfragen zu Wechselstromwiderständen	13
2.3.1	Frage 1:	13
2.3.2	Frage 2:	13
2.3.3	Frage 3:	13
2.3.4	Frage 4:	14
2.3.5	Frage 5:	14
2.3.6	Frage 6:	14
3	Schaltnetze mit Wechselstromwiderständen	15
3.1	Reihenschaltungen	15
3.1.1	R-L-Reihenschaltung	15
3.1.2	R-C-Reihenschaltung	17
3.1.3	R-L-C-Reihenschaltung	19
3.1.4	Resonanz bei R-L-C-Reihenschaltungen	21

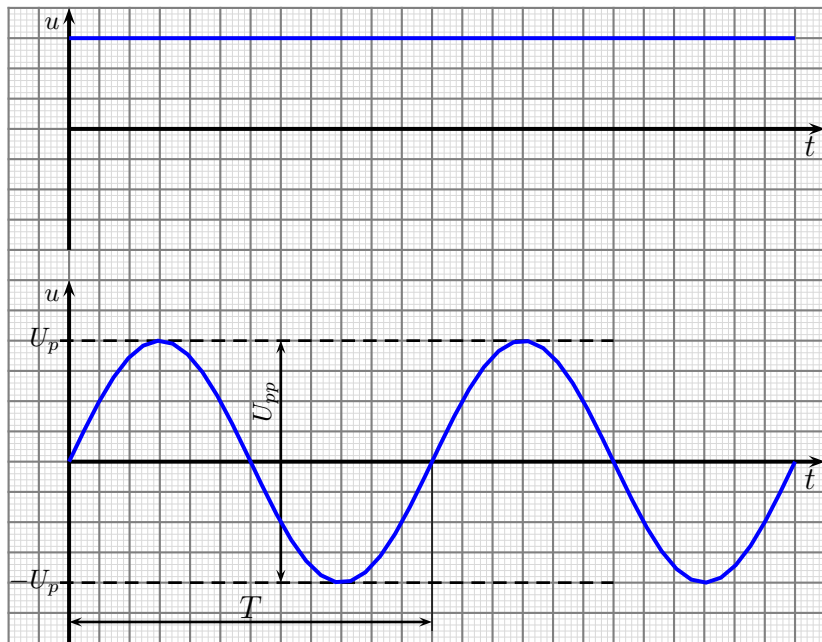
3.2	Parallelschaltungen	22
3.2.1	R-L-Parallelschaltung	22
3.2.2	R-C-Parallelschaltung	26
3.2.3	R-L-C-Parallelschaltung	27
3.2.4	Resonanz bei R-L-C-Parallelschaltungen	29
3.3	Gemischte Schaltungen	30
3.4	Kompliziertere gemischte Schaltungen	33
3.4.1	Lösung mit Maschenstromverfahren	33
3.4.2	Lösung mit Überlagerungssatz	36
3.5	Übungsaufgaben zu Schaltnetzen	40
3.5.1	Aufgabe 1	40
3.5.2	Aufgabe 2	40
3.5.3	Aufgabe 3	40
3.5.4	Aufgabe 4	40
3.5.5	Aufgabe 5	41
3.5.6	Aufgabe 6	41
3.5.7	Aufgabe 7	41
4	Kompensation	42
4.1	Berechnung der Kompensation	42
4.1.1	Berechnung durch Nullsetzen des Imaginärteils	43
4.1.2	Berechnung durch Aufspaltung in Komponentengleichungen	44
4.2	Übungsaufgaben zur Kompensation	46
4.2.1	Aufgabe 1	46
4.2.2	Aufgabe 2	46
4.2.3	Aufgabe 3	46
4.2.4	Aufgabe 4	46
4.2.5	Aufgabe 5	47

1 Grundgrößen der Wechselstromtechnik

1.1 Definitionen einiger Grundgrößen

Ein Gleichstrom fließt immer in der gleichen Richtung. Die zugehörige Gleichspannung ist immer gleich groß und verändert sich nicht. Der zugehörige zeitliche Verlauf ist im nebenstehenden Diagramm oben dargestellt.

Darunter ist der zeitliche Verlauf einer Wechselspannung dargestellt. Die Spannung ist zu jedem Zeitpunkt eine andere. Nicht nur die Spannungshöhe ändert sich, sondern auch die Spannungsrichtung.



Der zeitliche Verlauf der hier gezeigten Wechselspannung hat Sinusform. Daher spricht man von „Sinusförmiger Wechselspannung“. Wenn auch nicht jede Wechselspannung diese Form hat, ist jedoch diese Wechselspannung bei weitem die bedeutendste. Im Verlauf dieses Artikels soll daher immer die Sinusform vorausgesetzt werden, solange nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

Jede Wechselspannung hat bestimmte Kenngrößen. Dazu gehören unter anderem der **Scheitelwert** \hat{U} oder U_p , die **Spitze-Spitze-Spannung** U_{ss} oder U_{pp} und die **Periodendauer** T . Diese drei Größen sind im Diagramm eingetragen.

Anmerkung: Die Bezeichnungen U_p für den Spitzenwert der Spannung (auf englisch: peak) und U_{pp} für den Spitze-Spitze-Wert (peak to peak) sind die neueren heute genormten Bezeichnungen. Weil die alten Bezeichnungen \hat{U} für den Scheitelwert und U_{ss} für den Spitze-Spitze-Wert aber auch noch verwendet werden, möchte ich diese hier ebenfalls vorstellen.

Unter dem **Scheitelwert** U_p versteht man den Betrag des maximal (und minimal) auftretenden Momentanwertes der Spannung. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Spannung gleich weit in den positiven wie in den negativen Bereich verläuft. Man nennt den Schei-

telwert der Spannung auch „*Amplitude*“. Die Einheit des Scheitelwertes einer Spannung ist natürlich das Volt, denn auch er ist eine Spannung.

$$[U_p] = 1 \text{ V}$$

Wenn man eine Wechselspannung mit dem Oszilloskop misst, dann kann man am einfachsten den **Spitze-Spitze-Wert** U_{pp} bestimmen. Darunter versteht man den Potentialunterschied zwischen der untersten und der obersten Spitze. Bei einer symmetrischen Wechselspannung ist der Wert das Doppelte der Amplitude.

$$U_{pp} = 2 \cdot U_p$$

Die **Periodendauer** T ist die Zeitspanne, die abläuft, bis die Spannung wieder den gleichen Zustand erreicht. Eingezeichnet ist im Diagramm die Zeit von einem Nulldurchgang in positiver Richtung bis zum nächsten. Alternativ könnte man aber auch die Zeit von einem Spannungsmaximum bis zum nächsten Maximum messen. Der zugehörige Teil der Kennlinie wird **Periode** genannt. Die Einheit der Periodendauer ist die Sekunde.

$$[T] = 1 \text{ s}$$

Eine weitere wichtige Größe ist die **Frequenz** f . Darunter versteht man die Anzahl der Schwingungen je Zeiteinheit. Die Einheit der Frequenz ist Hz (gesprochen: Hertz¹), eine Abkürzung von 1 s^{-1} .

$$[f] = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$$

Aufgrund der Definition für die Frequenz gilt der formelmäßige Zusammenhang:

$$f = \frac{1}{T}$$

Eine weitere wichtige Größe ist die sogenannte **Kreisfrequenz** ω ². Auf den ersten Blick ist ω durchaus verzichtbar, denn ω ist nur ein Vielfaches von f , genauer:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Die Kreisfrequenz wird jedoch benötigt, wenn man den Spannungsverlauf mathematisch in den Griff bekommen will. Da ein Vollwinkel im Bogenmaß (bekanntlich) $2 \cdot \pi$ beträgt und die Winkelfunktionen in der Technik immer in diesem Winkelmaßsystem berechnet werden, kommt dieser Faktor zustande.

Für die Einheit der Kreisfrequenz, die ja auch 1 s^{-1} beträgt, wird im Gegensatz zur Frequenz f nicht die Einheit 1 Hz verwendet. Es bleibt bei 1 s^{-1} oder $\frac{1}{\text{s}}$.

Mit der Kreisfrequenz ω können wir die Funktionsgleichung einer sinusförmigen Wechselspannung angeben. Hierbei ist zu beachten, dass man für **zeitveränderliche** Größen Kleinbuchstaben verwendet, wie hier das u für die zeitveränderliche Spannung. (Ähnliches gilt auch für einen zeitveränderlichen Strom, der dann mit i bezeichnet wird.)

$$u(t) = U_p \cdot \sin \omega t$$

¹Nach *Heinrich Hertz*, dem Entdecker der Elektromagnetischen Wellen, *1857, †1894

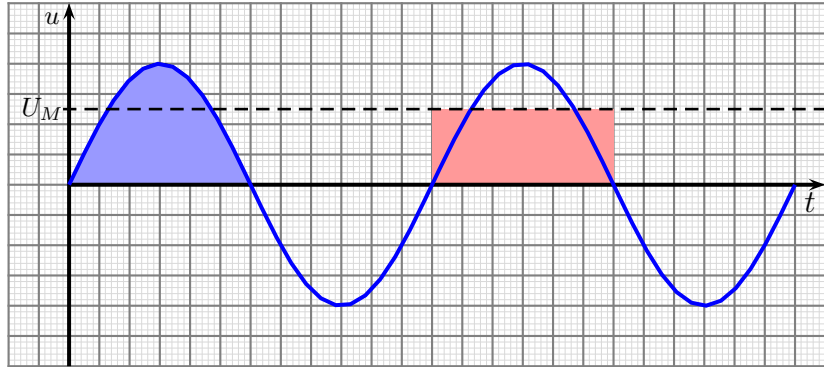
² ω ist ein griechischer Buchstabe, gesprochen: Omega

1.2 Mittelwert und Effektivwert

1.2.1 Mittelwert

Als Nenngröße für eine Wechselspannung wird der **Effektivwert** verwendet. Da er gern mit dem **Mittelwert** verwechselt wird, möchte ich diesen zuerst erklären.

Würde man über eine ganze Periode einen Mittelwert der Spannung bilden, dann käme wegen der Symmetrie Null heraus. Damit kann man wenig anfangen. Daher bildet man den Mittelwert nur über eine Halbwelle. Wenn die Fläche unter der Sinuskurve für eine Halbwelle (blau markiert, links)



genau so groß ist, wie die Rechteckfläche unter einer Geraden in der Höhe U_M für eine Halbwelle (rot markiert, rechts), dann stellt U_M den Mittelwert der Wechselspannung dar. Dies wollen wir nun mit mathematischen Mitteln untersuchen.

Berechnen wir zunächst die linke Fläche unter der Kurve. Das geht mit dem bestimmten Integral von 0 bis $\frac{T}{2}$ von der Spannungsfunktion.

$$\begin{aligned} A_{\text{Kurve}} &= \int_0^{\frac{T}{2}} U_p \cdot \sin \omega t \, dt \\ &= \left[-\frac{U_p}{\omega} \cdot \cos \omega t \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \left[-\frac{U_p}{2\pi f} \cdot \cos 2\pi f t \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \left[-\frac{U_p}{2\pi \frac{1}{T}} \cdot \cos 2\pi \frac{1}{T} \cdot t \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \left[-\frac{U_p \cdot T}{2\pi} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{U_p \cdot T}{2\pi} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} + \frac{U_p \cdot T}{2\pi} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \\ &= -\frac{U_p \cdot T}{2\pi} \cdot \cos \pi + \frac{U_p \cdot T}{2\pi} \cdot \cos 0 \\ A_{\text{Kurve}} &= \frac{U_p \cdot T}{\pi} \end{aligned}$$

Die (rechte rote) Rechteckfläche hat die Höhe U_M und die Breite $\frac{T}{2}$. Damit ist die Rechteckfläche schnell bestimmt:

$$A_{\text{Rechteck}} = U_M \cdot \frac{T}{2}$$

Da beide Fläche gleich sein sollen, kann ich sie mathematisch gleichsetzen.

$$\begin{aligned} A_{\text{Rechteck}} &= A_{\text{Kurve}} \\ U_M \cdot \frac{T}{2} &= \frac{U_p \cdot T}{\pi} \quad | \cdot \frac{2}{T} \\ U_M &= \frac{2}{\pi} \cdot U_p \end{aligned}$$

Die Konstante $\frac{2}{\pi}$ kann auch durch eine dezimale Näherung ausgedrückt werden. Damit erhält man die Formel:

$$U_M = \frac{2}{\pi} \cdot U_p \approx 0,6366 \cdot U_p$$

1.2.2 Effektivwert

Kommen wir nun zum Begriff „Effektivwert“. Die Definition lautet:

Eine Gleichspannung, die in gleichen Zeiträumen die gleiche Wärmeleistung in einem Ohmschen Widerstand zur Folge hat, wie eine Wechselspannung, heißt: *Effektivwert* der Wechselspannung.

Auch hier gibt es einen Umrechnungsfaktor, der den Effektivwert U_{RMS} ³ mit dem Scheitelwert U_p verknüpft. Diesen Wert wollen wir nun herleiten.

Die Formel zur Berechnung der Arbeit *bei konstanter Leistung* lautet:

$$W = P \cdot t$$

Ist die Leistung *zeitabhängig*, also nicht konstant, dann muss die Arbeit über das Integral bestimmt werden. Die Arbeit, die vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt t_2 verrichtet wird, ist dann:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$$

Ich wähle genau die Zeit für eine Periode (also die Periodendauer T) zur Bestimmung der Arbeit. Damit erhalten wir:

$$W = \int_0^T p(t) dt$$

³*RMS* steht für „Root Mean Square“, auf Deutsch: Quadratischer Mittelwert. Warum das so heißt, wird etwas später in diesem Skript deutlich. Im deutschsprachlichen Raum war hier früher die Bezeichnung U_{eff} gebräuchlich.

Als nächstes müssen wir uns die Funktion $p(t)$ ansehen. Aus der Gleichstromtechnik bekannt ist die Formel, mit deren Hilfe die Leistung P in einem Widerstand R bestimmt werden kann, wenn man eine Spannung U anlegt:

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Ist die Spannung U eine Wechselspannung $u(t) = U_p \cdot \sin \omega t$, dann muss dieser Term anstelle von U eingesetzt werden. Wir erhalten dann $p(t)$:

$$p(t) = \frac{(U_p \cdot \sin \omega t)^2}{R}$$

Hiermit kann nun die Arbeit W für eine Periode berechnet werden:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T p(t) dt \\ W &= \int_0^T \frac{(U_p \cdot \sin \omega t)^2}{R} dt \\ W &= \frac{U_p^2}{R} \cdot \int_0^T \sin^2 \omega t dt \end{aligned}$$

Um das Integral auflösen zu können, forme ich $\sin^2 \omega t$ mit Hilfe des folgenden *Additionstheorems* um:

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\varphi)$$

Das wenden wir nun an und können weiterrechnen:

$$\begin{aligned} W &= \frac{U_p^2}{R} \cdot \int_0^T \sin^2 \omega t dt \\ &= \frac{U_p^2}{R} \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\omega t) dt \\ &= \frac{U_p^2}{2R} \cdot \left(\int_0^T 1 dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right) \\ &= \frac{U_p^2}{2R} \cdot \left([t]_0^T - [\omega \cdot \sin 2\omega t]_0^T \right) \\ &= \frac{U_p^2}{2R} \cdot \left((T - 0) - (\omega \cdot \sin 0 - \omega \cdot \sin 4\pi) \right) \\ W &= \frac{U_p^2}{2R} \cdot T \end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir die Arbeit, wenn am Widerstand R eine Gleichspannung der Größe U_{RMS} für die Zeit T anliegt:

$$W = P \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t = \frac{U_{RMS}^2}{R} \cdot T$$

Da die Arbeit mit der Gleichspannung und die Arbeit mit Wechselspannung gleich sein sollen, kann ich sie gleichsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{U_{RMS}^2}{R} \cdot T &= \frac{U_p^2}{2R} \cdot T & | \cdot \frac{R}{T} \\ U_{RMS}^2 &= \frac{U_p^2}{2} & | \sqrt{} \\ U_{RMS} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_p \end{aligned}$$

Die Konstante $\frac{1}{\sqrt{2}}$ lässt sich – ähnlich, wie zuvor beim Mittelwert – durch eine dezimale Näherung beschreiben. Damit erhalten wir die Formel zur Bestimmung des Effektivwertes der Spannung:

$$U_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_p \approx 0,7071 \cdot U_p$$

Vergleicht man die Umrechnungsfaktoren für den Mittel- und den Effektivwert miteinander, dann kann man erkennen, dass sie zwar grob näherungsweise gleich sind, sich aber doch um etwa 10% unterscheiden. Deshalb darf man sie nicht miteinander verwechseln.

Man nennt den Effektivwert auch den „*Quadratischen Mittelwert*“. Damit ist gemeint, dass die Momentanwerte alle quadriert werden, bevor ein Mittelwert gebildet wird. Das spiegelt sich in der Leistungsformel $P = \frac{U^2}{R}$ wieder, in der die Spannung im Quadrat vorkommt. Aus diesem Grund verwendet man in neuerer Literatur anstelle von U_{RMS} auch die Bezeichnung U_{RMS} für den Effektivwert. Die Buchstaben *RMS* stehen für „*Root Mean Square*“, was auf deutsch nichts anderes als *Quadratischer Mittelwert* bedeutet.

1.3 Übungsfragen zu Grundgrößen der Wechselspannung

Musterlösungen zu den Übungsfragen sind hier zu finden:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/wechsel.pdf>

1.3.1 Frage 1:

Die Netz-Wechselspannung hat eine Frequenz von $f = 50$ Hz. Bestimmen Sie:

1. die Periodendauer
2. die Kreisfrequenz

1.3.2 Frage 2:

Die Netz-Wechselspannung hat einen Effektivwert von $U_{RMS} = 230 \text{ V}$. Wie groß ist der Scheitelwert U_p ?

1.3.3 Frage 3:

Eine Wechselspannung hat einen Effektivwert von $U_{RMS} = 10 \text{ V}$. Wie groß ist der Mittelwert U_M ?

1.3.4 Frage 4:

Mit Hilfe eines Oszilloskopes wird der Spitze-Spitze-Wert einer sinusförmigen Wechselspannung mit $U_{pp} = 30 \text{ V}$ gemessen. Wie groß ist der Effektivwert U_{RMS} der Spannung?

1.3.5 Frage 5:

Mit Hilfe eines Oszilloskopes wird die Periodendauer einer sinusförmigen Wechselspannung mit $T = 200 \mu\text{s}$ gemessen. Wie groß ist die Frequenz f der Spannung?

2 Wechselstromwiderstände

Schließt man eine Wechselspannung an einen Ohmschen Widerstand an, so ergibt sich ein Strom, dessen Momentanwerte zu jedem Zeitpunkt proportional zu den Momentanwerten der Spannung sind. Es gilt das Ohmsche Gesetz:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

Gehen wir von einer sinusförmigen Spannung gemäß

$$u(t) = U_p \cdot \sin \omega t$$

aus, dann erhält man für den Strom:

$$i(t) = \frac{U_p \cdot \sin \omega t}{R} = \frac{U_p}{R} \cdot \sin \omega t \quad \text{Spannungs- und Stromverlauf im Ohmschen Widerstand}$$

Der Wert für $\frac{U_p}{R}$ kann dabei als Scheitelwert des Stromes mit I_p bezeichnet werden:

$$I_p = \frac{U_p}{R}$$

Oben sind Spannung und Strom untereinander dargestellt. Die Maxima und die Nulldurchgänge sind auf der Zeitachse an den gleichen Stellen. Bei einem Kondensator oder einer Spule sieht es anders aus.

2.1 Wechselstromwiderstand eines Kondensators

An einem Kondensator gilt der Zusammenhang zwischen Spannung und Strom:

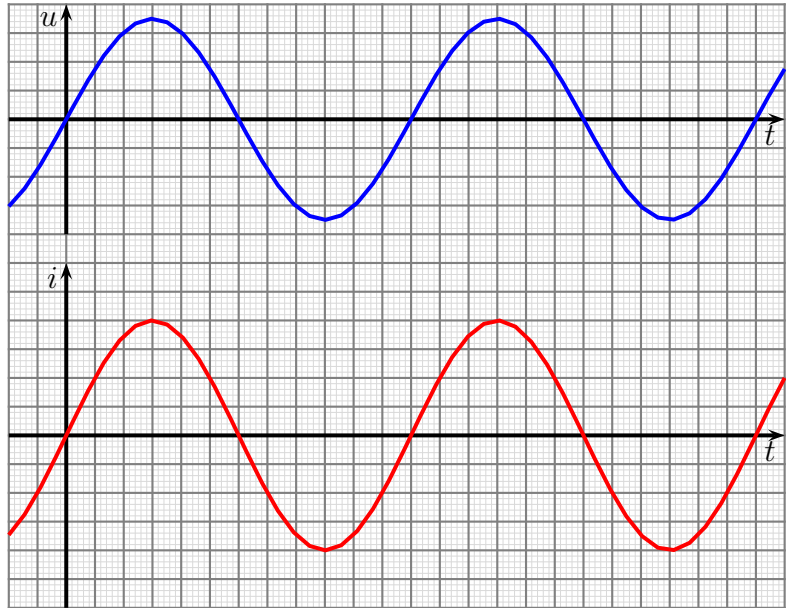
$$i(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$$

Die **Ableitung** der Spannung, also die **Änderung** der Spannung innerhalb einer bestimmten Zeit bestimmt zusammen mit der Kapazität die Größe des Stromes. Setzen wir nun die bekannte Funktion für die Spannung

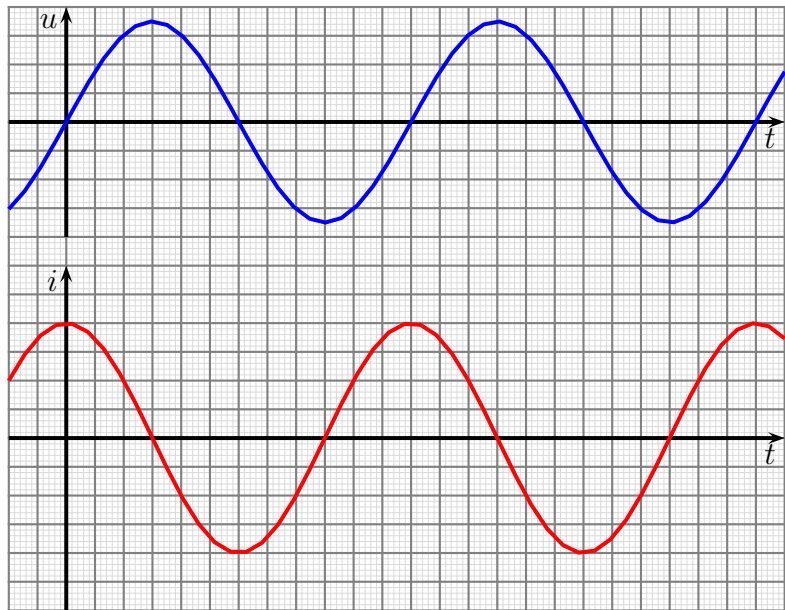
$$u(t) = U_p \cdot \sin \omega t$$

in diese Stromfunktion ein, muss die Ableitung gebildet werden.

$$i(t) = C \cdot \frac{d U_p \cdot \sin \omega t}{dt} = C \cdot U_p \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$



Nebenstehend ist der Verlauf von Spannung und Strom in einem Kondensator dargestellt. Man kann erkennen, dass der Strom keinesfalls proportional zur Spannung ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Spannung noch 0. Da sie sich aber hier recht schnell **ändert**, hat der Strom hier seinen Maximalwert. Erreicht die Spannung ihren Scheitelwert, ändert sie sich kaum noch, der Strom wird zu Null. Nach dem Spannungsmaximum verringert sich die Spannung wieder, der Strom fließt nun aus dem Kondensator heraus, er entlädt sich. Der Strom ist also hier schon negativ. Man sagt: **Es gibt eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom, der Strom eilt der Spannung um 90° voraus.**



Spannungs- und Stromverlauf im Kondensator

Merksatz: **Am Kondensator der Strom eilt vor.**

Ähnlich zum Widerstand kann auch hier der Scheitelwert des Stromes angegeben werden. Berücksichtigt man, dass der Kosinus immer nur Werte zwischen $+1$ und -1 annehmen kann, erhalten wir:

$$I_p = U_p \cdot \omega C$$

Da für die **Scheitelwerte** eine Proportionalität zwischen Spannung und Strom besteht, liegt es nahe, hier auch von einem Widerstand zu sprechen. Da der Zusammenhang hier jedoch **nicht** für die Momentanwerte gilt, bekommt er einen eigenen Namen und ein anderes Formelzeichen. Man nennt diesen Wechselstromwiderstand eines Kondensators **Blindwiderstand** und gibt ihm das Formelzeichen X_C .

Wir können X_C berechnen:

$$X_C = \frac{U_p}{I_p} = \frac{U_p}{U_p \cdot \omega C} = \frac{1}{\omega C}$$

Hierbei ist immer zu beachten, dass hierdurch nur ein Betrag angegeben wird, die Phasenverschiebung wird **nicht** erfasst! Um diese mit zu berücksichtigen, bietet sich die **Komplexe Rechnung**⁴ an. Legt man die Spannung U_C am Kondensator als **reelle**

⁴Die Grundlagen zu Komplexen Rechnungen sind hier zu finden:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/komplgl.pdf>

Größe fest, dann erhält man für den Kondensatorstrom I_C eine positiv imaginäre Größe, da der Strom der Spannung in der Phase um 90° vorseilt.

$$\underline{U}_C = U_C \quad \text{und} \quad \underline{I}_C = jI_C$$

Hiermit kann der Komplexe Widerstand des Kondensators bestimmt werden:

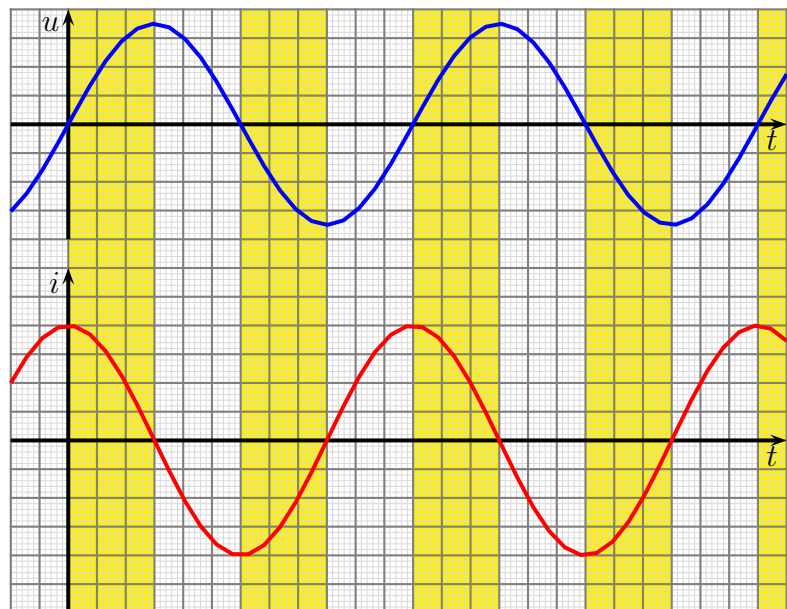
$$\underline{X}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}_C} = \frac{U_C}{jI_C} = \frac{U_C}{jU_C \cdot \omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$

Zusammengefasst:

$$\underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Achtung! Ein Blindwiderstand nimmt keine Wirkleistung (Formelzeichen P) auf. Man spricht hier von **Blindleistung**, Formelzeichen Q . Was bedeutet das?

Schaut man sich die Liniendiagramme von Spannung und Strom an, dann stellt man fest, dass bei diesen nur die Hälfte der Zeit die Vorzeichen übereinstimmen. Während dieser (kurzen) Zeitspanne entnimmt der Kondensator tatsächlich Leistung aus dem Netz und lädt sich damit auf. Diese Zeitspannen sind nebenstehend gelb markiert. Die andere Hälfte der Zeit sind die Polaritäten von Spannung und Strom unterschiedlich. Das bedeutet, dass der Kondensator in dieser Zeitspanne seine gespeicherte Energie wieder ins Netz zurückspeist. Er gibt dann Leistung ab. Die abgegebene Leistung ist identisch mit der zuvor aufgenommenen Leistung, im Mittel wird also keine Leistung aufgenommen. Eine Leistung, die ständig zwischen Erzeuger und Verbraucher hin- und herpendelt, nennt man **Blindleistung**. Sie ist nicht nutzbar, belastet aber das Stromnetz.



Leistungsaufnahme und -abgabe am Kondensator

Nimmt eine Schaltung teilweise Wirkleistung und Blindleistung auf, oder ist nicht bekannt, um welche Art Leistung es sich handelt, dann spricht man von **Scheinleistung**,

Formelzeichen **Z**. Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom liegt dabei irgendwo im Bereich $\pm 90^\circ$. Scheinleistung kann in einen Wirkleistungsanteil P (Realteil von Z) und einen Blindleistungsanteil Q (Imaginärteil von Z) aufgespalten werden.

2.2 Wechselstromwiderstand einer Spule

An einer idealen Spule – besser: an einer **Induktivität** – gilt der Zusammenhang zwischen Spannung und Strom:

$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u(t) dt$$

Das **unbestimmte Integral** über der Spannung nach der Zeit bestimmt zusammen mit der Induktivität die Größe des Stromes. Setzen wir nun die bekannte Funktion für die Spannung

$$u(t) = U_p \cdot \sin \omega t$$

in diese Stromfunktion ein, muss das Integral gebildet werden.

$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int U_p \cdot \sin \omega t dt = \frac{1}{L} \cdot \frac{U_p}{\omega} \cdot (-\cos \omega t) + i_0 = -\frac{U_p}{\omega L} \cdot \cos \omega t + i_0$$

Ähnlich zum kapazitiven Blindwiderstand kann auch hier der Scheitelwert des Stromes angegeben werden. Berücksichtigt man, dass der Kosinus immer nur Werte zwischen $+1$ und -1 annehmen kann, erhalten wir:

$$I_p = \frac{U_p}{\omega L}$$

Wir können den Blindwiderstand X_L der Induktivität brechnen:

$$X_L = \frac{U_p}{I_p} = \frac{U_p}{\frac{U_p}{\omega L}} = \omega L$$

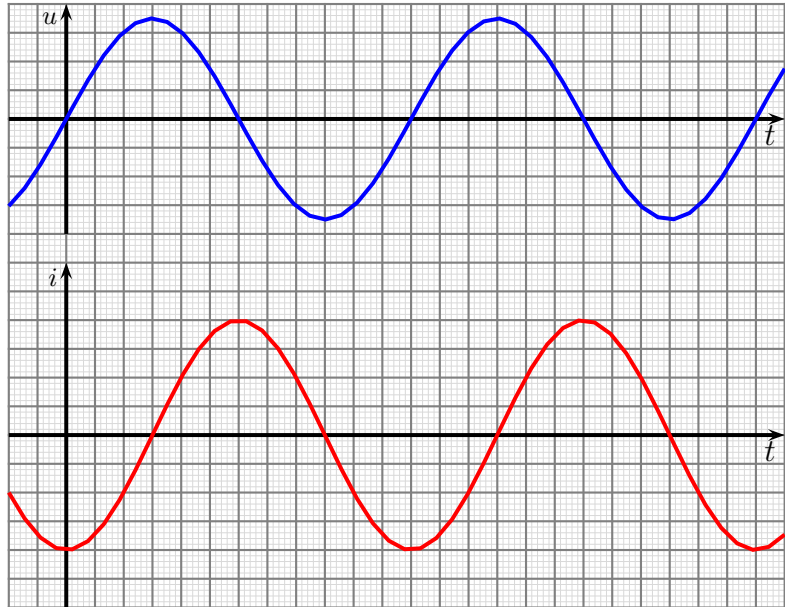
Nachfolgend ist der Verlauf von Spannung und Strom in einer idealen Spule dargestellt. Man kann erkennen, dass der Strom keinesfalls proportional zur Spannung ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Spannung noch 0. Es fließt hier ein negativer Strom. Mit steigender Spannung wird dieser Strom schwächer und wird im Spannungsmaximum schließlich zu Null. Dann kehrt sich die Stromrichtung um, und es beginnt ein positiver Strom zu fließen, während die Spannung schon wieder kleiner wird. Die Stromkurve wird zusehens flacher, je kleiner die Spannung geworden ist. Wenn dann die Spannung negativ wird, fließt der Strom zunächst in der alten Richtung weiter, wird aber langsam wieder kleiner. Wie bei dem Kondensator haben wir auch hier eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom, jedoch in der anderen Richtung. Der Strom eilt der Spannung in der Phase um 90° nach.

Merksatz: Bei Induktivitäten die Ströme sich verspäten.

Wie bei der Kapazität kann man auch bei der Induktivität sinnvoll mit der Komplexen Rechnung arbeiten. Legt man die Spannung U_L an der Induktivität als **reelle** Größe fest, dann erhält man für den Spulenstrom I_L eine negativ imaginäre Größe, da der Strom der Spannung in der Phase um 90° nacheilt.

$$\underline{U}_L = U_L \quad \text{und} \quad \underline{I}_L = -jI_L$$

Hiermit kann der Komplexe Widerstand der Induktivität bestimmt werden:



Spannungs- und Stromverlauf in der Spule

$$\underline{X}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} = \frac{U_L}{-jI_L} = \frac{U_L}{-j \frac{U_L}{\omega L}} = \frac{\omega L}{-j} = j\omega L$$

Zusammengefasst:

$$\underline{X}_L = j\omega L$$

2.3 Übungsfragen zu Wechselstromwiderständen

Musterlösungen zu den Übungsfragen sind hier zu finden:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/wechsel.pdf>

2.3.1 Frage 1:

Ergänzen Sie den Satz:

Der Strom in einer Induktivität eilt der Spannung in der Phase um ...

2.3.2 Frage 2:

Ergänzen Sie den Satz:

Je größer die Frequenz ist, desto ... ist der Wechselstromwiderstand einer Induktivität.

2.3.3 Frage 3:

Ergänzen Sie den Satz:

Der Strom in einer Kapazität eilt der Spannung in der Phase um ...

2.3.4 Frage 4:

Ergänzen Sie den Satz:

Je größer die Frequenz ist, desto ... ist der Wechselstromwiderstand einer Kapazität.

2.3.5 Frage 5:

Wie groß ist der Strom I in einer Induktivität mit $L = 10 \text{ H}$, die an eine Wechselspannung von $U = 12 \text{ V}$ mit einer Frequenz von $f = 50 \text{ Hz}$ angeschlossen ist? Wie groß ist der komplexe Strom \underline{I} , wenn die Spannung \underline{U} als reelle Spannung vorausgesetzt ist?

2.3.6 Frage 6:

Bei welcher Frequenz f hat ein Kondensator mit einer Kapazität von $C = 1 \mu\text{F}$ einen Wechselstromwiderstand von $X_C = 318 \Omega$?

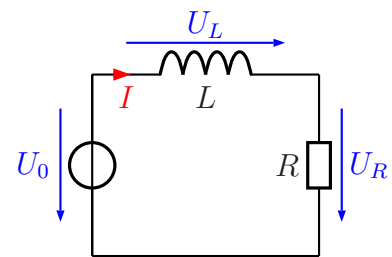
3 Schaltnetze mit Wechselstromwiderständen

Achtung! Für alle Berechnungen ist es wichtig zu wissen, dass in der Wechselstromtechnik nur unter Verwendung der Komplexen Rechnung⁵ die Kirchhoffschen Regeln gültig sind! Das liegt daran, dass Phasenverschiebungen zwischen Spannungen und Strömen berücksichtigt werden müssen.

3.1 Reihenschaltungen

3.1.1 R-L-Reihenschaltung

Nebenstehend ist eine Reihenschaltung aus einer Induktivität und einem Ohmschen Widerstand dargestellt. Die Teilspannungen sind mit U_L und U_R bezeichnet, die Gesamtspannung heißt U_0 . Da der Strom überall gleich ist, heißt er schlicht I .



R-L-Reihenschaltung

Als Beispiel möchte ich die Schaltung mit folgenden Werten durchrechnen:

$$U_0 = 10 \text{ V} \quad R = 80 \Omega \quad L = 60 \text{ mH} \quad \omega = 1\,000 \text{ s}^{-1}$$

Zunächst bestimme ich den Blindwiderstand der Induktivität.

$$\underline{X}_L = j\omega L = j \cdot 1\,000 \text{ s}^{-1} \cdot 60 \text{ mH} = j60 \Omega$$

Damit können R und X_L zu einem Gesamtwiderstand zusammengefasst werden. Für Widerstände, die weder reine Ohmsche Widerstände noch reine Blindwiderstände sind, verwendet man weder den Buchstaben R noch X als Formelzeichen. Man nennt Widerstände mit unbekannter Phasenverschiebung **Scheinwiderstände**, die mit dem Formelzeichen Z gekennzeichnet werden. Den Ersatzwiderstand aus X_L und R nenne ich daher Z . Da X_L und R in Reihe geschaltet sind, kommt die Reihenschaltungsformel von Kirchhoff zur Anwendung.

$$\underline{Z} = \underline{X}_L + \underline{R} = j60 \Omega + 80 \Omega$$

Dieser Widerstandswert mit Real- und Imaginärteil kann nicht weiter zusammengefasst werden.

Hiermit kann der komplexe Strom \underline{I} bestimmt werden. Dabei gehen wir davon aus, dass die gegebene Spannung eine Reelle Größe ist: $\underline{U}_0 = 10 \text{ V}$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} = \frac{10 \text{ V}}{80 \Omega + j60 \Omega}$$

⁵Die Grundlagen zu Komplexen Rechnung sind hier zu finden:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/komplgl.pdf>

Durch **Konjugiert Komplexes Erweitern**⁶ kann man diesen Bruch so umformen, dass \underline{I} mit Real- und Imaginärteil angegeben werden kann.

$$\begin{aligned}
 \underline{I} &= \frac{10 \text{ V}}{80 \Omega + j60 \Omega} \\
 &= \frac{10 \text{ V} \cdot (80 \Omega - j60 \Omega)}{(80 \Omega + j60 \Omega) \cdot (80 \Omega - j60 \Omega)} \\
 &= \frac{800 \text{ V}\Omega - j600 \text{ V}\Omega}{800 \text{ V}\Omega - j600 \text{ V}\Omega} \\
 &= \frac{6\,400 \Omega^2 + 3\,600 \Omega^2}{800 \text{ V}\Omega - j600 \text{ V}\Omega} \\
 &= \frac{10\,000 \Omega^2}{800 \text{ V}\Omega - j600 \text{ V}\Omega} \\
 &= \frac{10\,000 \Omega^2}{800 \text{ V}\Omega - j600 \text{ V}\Omega} \\
 \underline{I} &= 80 \text{ mA} - j60 \text{ mA}
 \end{aligned}$$

Nimmt man ein Strommessgerät in die Hand, dann kann man natürlich keinen komplexen Strom ablesen. Angezeigt wird der **Betrag** des Stromes. Dieser wird nun berechnet.

$$I = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{I})^2 + (\operatorname{Im} \underline{I})^2} = \sqrt{(80 \text{ mA})^2 + (-60 \text{ mA})^2} = 100 \text{ mA}$$

Als nächstes sollen die komplexen Teilspannungen \underline{U}_L und \underline{U}_R bestimmt werden.

An X_L gilt das Ohmsche Gesetz:

$$\underline{U}_L = \underline{X}_L \cdot \underline{I} = j60 \Omega \cdot (80 \text{ mA} - j60 \text{ mA}) = j4,8 \text{ V} - j^2 3,6 \text{ V} = j4,8 \text{ V} + 3,6 \text{ V}$$

Auch von dieser Spannung interessiert der Betrag:

$$U_L = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{U}_L)^2 + (\operatorname{Im} \underline{U}_L)^2} = \sqrt{(3,6 \text{ V})^2 + (4,8 \text{ V})^2} = 6 \text{ V}$$

Auch an R gilt das Ohmsche Gesetz:

$$\underline{U}_R = \underline{R} \cdot \underline{I} = 80 \Omega \cdot (80 \text{ mA} - j60 \text{ mA}) = 6,4 \text{ V} - j4,8 \text{ V}$$

Auch hier interessiert der Betrag der Spannung:

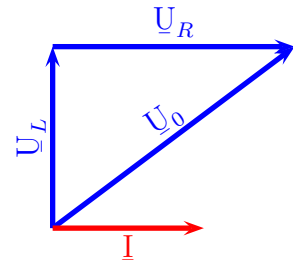
$$U_R = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{U}_R)^2 + (\operatorname{Im} \underline{U}_R)^2} = \sqrt{(6,4 \text{ V})^2 + (-4,8 \text{ V})^2} = 8 \text{ V}$$

Zusammenfassung: Addiert man die **Beträge** U_L und U_R , dann erhalten wir für die Summe nicht $U_0 = 10 \text{ V}$, sondern 14 V . Wie zu Beginn dieses Kapitels behauptet gelten die Kirchhoffschen Regeln – hier die Maschenregel – **nicht für die Beträge**, sondern **nur für die komplexen Größen**. Wir überprüfen das:

$$\underline{U}_L + \underline{U}_R = j4,8 \text{ V} + 3,6 \text{ V} + 6,4 \text{ V} - j4,8 \text{ V} = 10 \text{ V} = \underline{U}_0$$

⁶Einzelheiten dazu siehe hier auf Seite 7: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/komplgl.pdf>

Zu diesem Zusammenhang kann man auch ein **Zeigerbild** darstellen. Für das Zeigerbild bietet es sich an, den Strom \underline{I} als Bezugsgröße zu verwenden, da einerseits dieser Strom in beiden Bauelementen der gleiche ist und andererseits die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom in jedem Bauteil bekannt ist. Da an der Induktivität der Strom um 90° **nacheilt**, muss umgekehrt die Spannung dem Strom um diesen Winkel **voraus**eilen. Deshalb zeigt der Spannungspfeil für \underline{U}_L nach oben. Die Spannung am Widerstand \underline{U}_R hat zum Strom **keine** Phasenverschiebung, wird also **parallel** zum Strompfeil eingetragen. Die Gesamtspannung \underline{U}_0 ist die Summe der beiden Teilspannungen, wird dann diagonal eingezeichnet.



Diese Zusammenhänge sind oben dargestellt. Es ist gut ersichtlich, warum nicht einfach die Zeigerlängen von U_L und U_R addiert werden können, um U_0 zu erhalten.

3.1.2 R-C-Reihenschaltung

Die nebenstehende Schaltung soll an der Wechselspannung U_0 betrieben werden. Gesucht ist der Gesamtstrom I sowie die beiden Teilspannungen U_R am Widerstand und U_C am Kondensator.

Bekannt sind folgende Werte:

$$U_0 = 33,8 \text{ V} \quad R = 12 \text{ k}\Omega \quad C = 200 \text{ nF} \quad \omega = 1000 \text{ s}^{-1}$$

Zunächst bestimme ich den Blindwiderstand der Kapazität.

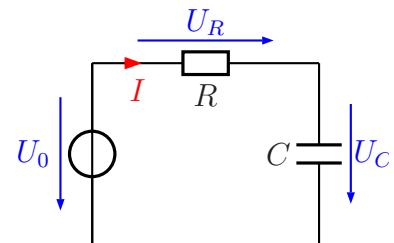
$$\underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 1000 \text{ s}^{-1} \cdot 200 \text{ nF}} = -j5 \text{ k}\Omega$$

Damit können R und X_C zu einem Gesamtwiderstand zusammengefasst werden. Den Ersatzwiderstand aus R und X_C nenne ich Z . Da R und X_C in Reihe geschaltet sind, kommt die Reihenschaltungsformel von Kirchhoff zur Anwendung.

$$\underline{Z} = \underline{R} + \underline{X}_C = 12 \text{ k}\Omega - j5 \text{ k}\Omega$$

Hiermit kann der komplexe Strom \underline{I} bestimmt werden.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} = \frac{33,8 \text{ V}}{12 \text{ k}\Omega - j5 \text{ k}\Omega}$$



R-C-Reihenschaltung

Durch **Konjugiert Komplexes Ereitern** kann man diesen Bruch so umformen, dass \underline{I} in einen Real- und einen Imaginärteil zerlegt werden kann.

$$\begin{aligned}
 \underline{I} &= \frac{33,8 \text{ V}}{12 \text{ k}\Omega - j5 \text{ k}\Omega} \\
 &= \frac{33,8 \text{ V} \cdot (12 \text{ k}\Omega + j5 \text{ k}\Omega)}{(12 \text{ k}\Omega - j5 \text{ k}\Omega) \cdot (12 \text{ k}\Omega + j5 \text{ k}\Omega)} \\
 &= \frac{405,6 \text{ V k}\Omega + j169 \text{ V k}\Omega}{144 \text{ k}\Omega^2 + 25 \text{ k}\Omega^2} \\
 &= \frac{405,6 \text{ V k}\Omega + j169 \text{ V k}\Omega}{169 \text{ k}\Omega^2} \\
 &= \frac{405,6 \text{ V k}\Omega}{169 \text{ k}\Omega^2} + j \frac{169 \text{ V k}\Omega}{169 \text{ k}\Omega^2} \\
 \underline{I} &= 2,4 \text{ mA} + j1 \text{ mA}
 \end{aligned}$$

An einem Strommessgerät kann man natürlich keinen komplexen Strom ablesen. Anzeigt wird der **Betrag** des Stromes. Dieser wird nun berechnet.

$$I = \sqrt{(\text{Re } \underline{I})^2 + (\text{Im } \underline{I})^2} = \sqrt{(2,4 \text{ mA})^2 + (1 \text{ mA})^2} = 2,6 \text{ mA}$$

Als nächstes sollen die komplexen Teilspannungen \underline{U}_R und \underline{U}_C bestimmt werden.

An R gilt das Ohmsche Gesetz:

$$\underline{U}_R = \underline{R} \cdot \underline{I} = 12 \text{ k}\Omega \cdot (2,4 \text{ mA} + j1 \text{ mA}) = 28,8 \text{ V} + j12 \text{ V}$$

Von dieser Spannung interessiert der Betrag:

$$U_R = \sqrt{(\text{Re } \underline{U}_R)^2 + (\text{Im } \underline{U}_R)^2} = \sqrt{(28,8 \text{ V})^2 + (12 \text{ V})^2} = 31,2 \text{ V}$$

An X_C gilt das Ohmsche Gesetz:

$$\underline{U}_C = \underline{X}_C \cdot \underline{I} = -j5 \text{ k}\Omega \cdot (2,4 \text{ mA} + j1 \text{ mA}) = -j12 \text{ V} + 5 \text{ V}$$

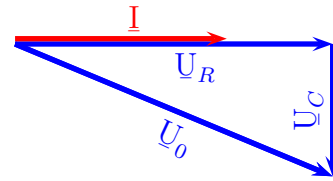
Auch von dieser Spannung interessiert der Betrag:

$$U_C = \sqrt{(\text{Re } \underline{U}_C)^2 + (\text{Im } \underline{U}_C)^2} = \sqrt{(-12 \text{ V})^2 + (5 \text{ V})^2} = 13 \text{ V}$$

Zusammenfassung: Addiert man die **Beträge** U_R und U_C , dann erhalten wir für die Summe nicht $U_0 = 33,8 \text{ V}$, sondern $44,2 \text{ V}$. Wie zu Beginn dieses Kapitels behauptet gelten die Kirchhoffschen Regeln – hier die Maschenregel – **nicht für die Beträge**, sondern **nur für die komplexen Größen**. Wir überprüfen das:

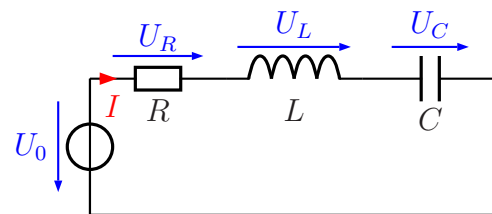
$$\underline{U}_R + \underline{U}_C = 28,8 \text{ V} + j12 \text{ V} - j12 \text{ V} + 5 \text{ V} = 33,8 \text{ V} = \underline{U}_0$$

Zu diesem Zusammenhang kann man auch ein **Zeigerbild** darstellen. Für das Zeigerbild bietet es sich an, den Strom \underline{I} als Bezugsgröße zu verwenden, da einerseits dieser Strom in beiden Bauelementen der gleiche ist und andererseits die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom in jedem Bauteil bekannt ist. Die Spannung am Widerstand \underline{U}_R hat zum Strom **keine** Phasenverschiebung, wird also **parallel** zum Strompfeil eingetragen. Da an der Kapazität der Strom um 90° **voreilt**, muss umgekehrt die Spannung dem Strom um diesen Winkel **nacheilen**. Deshalb zeigt der Spannungspfeil für \underline{U}_C nach unten. Die Gesamtspannung \underline{U}_0 ist die Summe der beiden Teilspannungen, wird dann diagonal eingezeichnet.



3.1.3 R-L-C-Reihenschaltung

Nebenstehend ist eine Reihenschaltung aus Ohmschem Widerstand, einer Induktivität und einer Kapazität dargestellt. Hier teilt sich die Spannung U_0 auf drei Bauelemente auf.



R-L-C-Reihenschaltung

Betrachten wir auch hier zunächst ein Zahlenbeispiel. Gegeben seien folgende Werte:

$$U_0 = 15 \text{ V} \quad R = 300 \Omega \quad X_L = 900 \Omega \quad X_C = 500 \Omega$$

Bestimmen wir zunächst die komplexen Größen.

Die Spannung U_0 ist die einzige gegebene Spannung. Daher ist es zweckmäßig, diese als Reelle Spannung festzulegen. Damit erhalten wir die Komplexen Größen:

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= 15 \text{ V} \\ \underline{R} &= 300 \Omega \\ \underline{X}_L &= j900 \Omega \\ \underline{X}_C &= -j500 \Omega \end{aligned}$$

Mit diesen Werten kann der Komplexe Ersatzwiderstand bestimmt werden, den ich Z nenne.

$$\underline{Z} = \underline{R} + \underline{X}_L + \underline{X}_C = 300 \Omega + j900 \Omega - j500 \Omega = 300 \Omega + j400 \Omega$$

Hiermit kann nun \underline{I} bestimmt werden. Nach dem Ansatz erfolgt das Konjugiert Komplexe Erweitern, damit der Strom nach Real- und Imaginärteil aufgespalten werden kann.

$$\begin{aligned}
 \underline{I} &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} \\
 &= \frac{15 \text{ V}}{300 \Omega + j400 \Omega} \\
 &= \frac{15 \text{ V} \cdot (300 \Omega - j400 \Omega)}{(300 \Omega + j400 \Omega) \cdot (300 \Omega - j400 \Omega)} \\
 &= \frac{4500 \text{ V}\Omega - j6000 \text{ V}\Omega}{90000 \Omega^2 + 160000 \Omega^2} \\
 &= \frac{4500 \text{ V}\Omega - j6000 \text{ V}\Omega}{250000 \Omega^2} \\
 &= \frac{4500 \text{ V}\Omega}{250000 \Omega^2} - \frac{j6000 \text{ V}\Omega}{250000 \Omega^2} \\
 \underline{I} &= 18 \text{ mA} - j24 \text{ mA}
 \end{aligned}$$

Mit diesem Strom können nun alle Teilspannungen bestimmt werden. Beginnen wir mit der Spannung \underline{U}_R .

$$\underline{U}_R = \underline{R} \cdot \underline{I} = 300 \Omega \cdot (18 \text{ mA} - j24 \text{ mA}) = 5,4 \text{ V} - j7,2 \text{ V}$$

Hierzu kann sofort der Betrag berechnet werden:

$$U_R = \sqrt{(\text{Re } \underline{U}_R)^2 + (\text{Im } \underline{U}_R)^2} = \sqrt{(5,4 \text{ V})^2 + (-7,2 \text{ V})^2} = 9 \text{ V}$$

Es folgt die Berechnung der Spannung \underline{U}_L .

$$\underline{U}_L = \underline{X}_L \cdot \underline{I} = j900 \Omega \cdot (18 \text{ mA} - j24 \text{ mA}) = j16,2 \text{ V} + 21,6 \text{ V}$$

Hierzu kann sofort der Betrag berechnet werden:

$$U_L = \sqrt{(\text{Re } \underline{U}_L)^2 + (\text{Im } \underline{U}_L)^2} = \sqrt{(21,6 \text{ V})^2 + (16,2 \text{ V})^2} = 27 \text{ V}$$

Zum Schluss kommt noch die Spannung \underline{U}_C an die Reihe.

$$\underline{U}_C = \underline{X}_C \cdot \underline{I} = -j500 \Omega \cdot (18 \text{ mA} - j24 \text{ mA}) = -j9 \text{ V} - 12 \text{ V}$$

Hierzu kann sofort der Betrag berechnet werden:

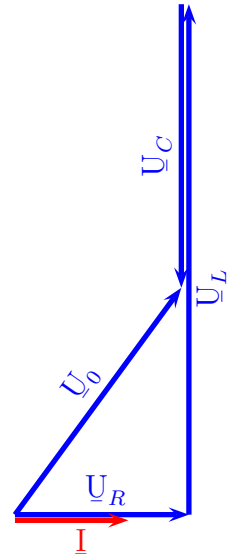
$$U_L = \sqrt{(\text{Re } \underline{U}_L)^2 + (\text{Im } \underline{U}_L)^2} = \sqrt{(-12 \text{ V})^2 + (-9 \text{ V})^2} = 15 \text{ V}$$

Schaun wir uns die Ergebnisse einmal genau an. Auch hier können wir nicht einfach die Beträge der Spannungen addieren, um auf die Gesamtspannung zu kommen. Schon am Kondensator liegt eine Spannung an, die genau so groß, wie die Gesamtspannung ist. Die Spannung U_L ist sogar deutlich größer, als U_0 !

Hierin liegt **kein** Rechenfehler. **In einer R-L-C-Reihenschaltung kann es immer vorkommen, dass einzelne Teilspannungen größer als die Gesamtspannung sind.**

Zur Verdeutlichung kann das nebenstehende Zeigerbild dienen. Dadurch, dass die Zeiger für die Spannung an der Spule und die Spannung am Kondensator **entgegengerichtet** sind, heben sich diese teilweise auf. Nur deren **Differenz** geht in das eigentliche Spannungsdreieck ein.

Merke: Dieses Merkmal ist ein generelles Risiko für alle R-L-C-Reihenschaltungen. Teilspannungen können gefährlich hoch werden, obwohl die Betriebsspannung im Bereich der Schutzkleinspannung liegt!

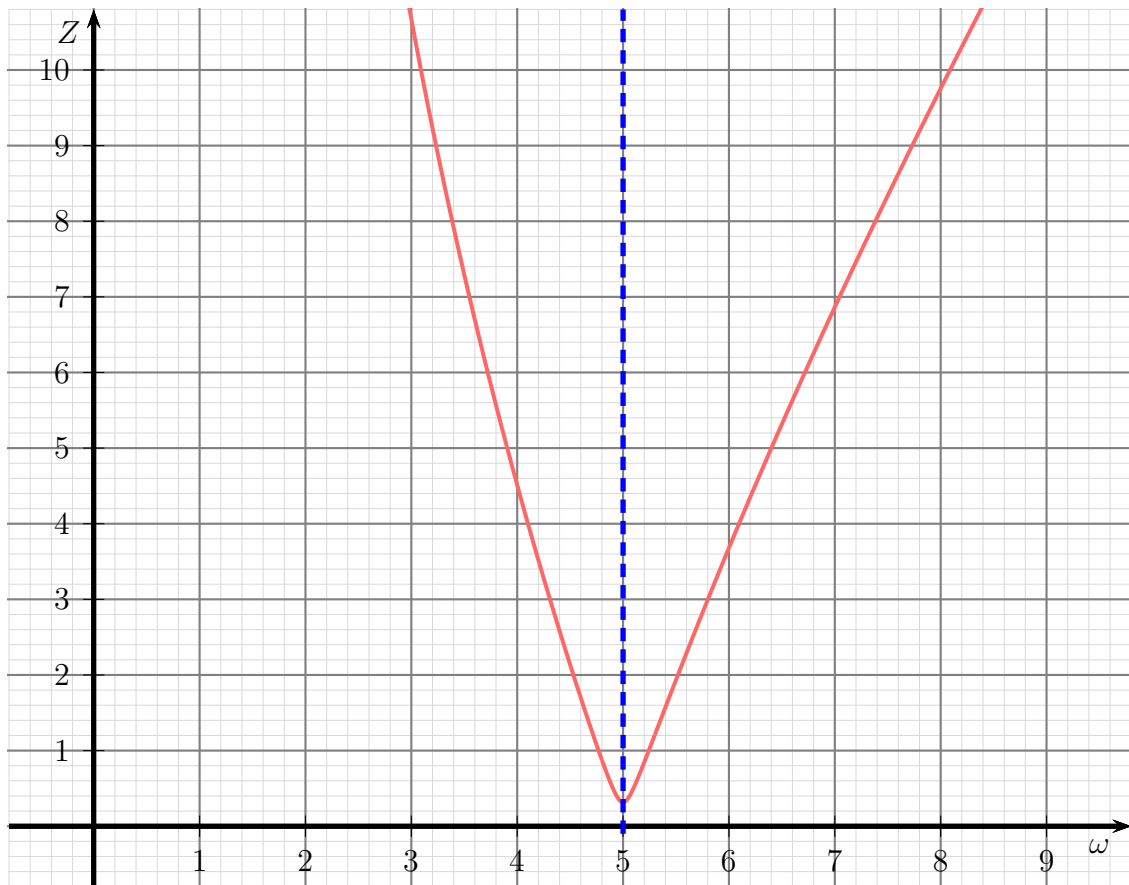


3.1.4 Resonanz bei R-L-C-Reihenschaltungen

Von *Resonanz* spricht man, wenn der Ersatzwiderstand der Schaltung ein rein Reeller Widerstand ist. In der R-L-C-Reihenschaltung ist das der Fall, wenn die Beträge X_L und X_C gleich sind. Im Spannungszeigerdiagramm (siehe oben) sind die Zeiger \underline{U}_L und \underline{U}_C dann gleich lang, aber entgegengesetzt. Sie heben sich gegenseitig auf. Damit ergibt sich $U_L = U_C$ oder genauer $\underline{U}_L = -\underline{U}_C$. Bei der Berechnung von Z heben sich \underline{X}_L und \underline{X}_C gegenseitig auf, übrig bleibt $Z = R$.

Was hat das für Konsequenzen? Nehmen wir einmal an, wir könnten $R = 0 \Omega$ machen. Dann stellt die Schaltung einen **Kurzschluss** dar. In der Praxis ist dies nicht ganz erreichbar, weil es immer irgendwelche Widerstände gibt, wie beispielsweise den Wicklungswiderstand der Spule, aber wir können durchaus **R sehr klein** machen. Beim Anschluss an eine feste Spannung fließt dann ein **sehr großer Strom** durch die Schaltung. Auch die **Teilspannungen** an Spule und Kondensator werden **sehr groß!**

Ein anderer Effekt ist eigentlich noch wichtiger. Der Blindwiderstand X_L der Spule und X_C des Kondensators hängen bekanntlich von der Frequenz f ab. X_L steigt mit der Frequenz und X_C wird mit steigender Frequenz kleiner. Deshalb gilt die Resonanzbedingung $X_L = X_C$ nur für **eine ganz bestimmte Frequenz**. Wenn R sehr klein ist, dann stellt die Schaltung ja (nahezu) einen Kurzschluss dar. Verändert man die Frequenz ein wenig nach oben oder unten, dann steigt der Betrag von Z sofort stark an, weil sich die Teilspannungen \underline{U}_L und \underline{U}_C dann nicht mehr gegenseitig aufheben. Bei kleineren Frequenzen überwiegt der kapazitive und bei größeren Frequenzen der induktive Anteil. Nachfolgendes Diagramm zeigt einen typischen Verlauf des Ersatzwiderstandes Z der Schaltung in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω . Bei $\omega = 5$ liegt in diesem Diagramm Resonanz vor. Einheiten wurden weggelassen, weil es sich hier nur um eine typische Kurve handelt.



Typischer Verlauf für $Z = f(\omega)$

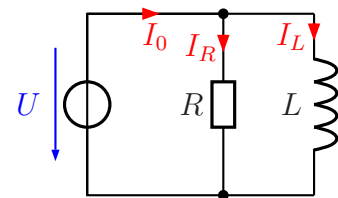
In der Nachrichtentechnik findet dieser dort so genannte *Reihenschwingkreis* beim Bearbeiten eines Frequenzspektrums Anwendung. Man kann damit aus dem Spektrum eine bestimmte Frequenz entfernen, indem die Schaltung für genau diese Frequenz einen Kurzschluss darstellt. Man spricht dann auch von einem „Notchfilter“ oder „Lochfilter“.

3.2 Parallelschaltungen

3.2.1 R-L-Parallelschaltung

Nebenstehend ist eine Parallelschaltung aus einem Ohmschen Widerstand und einer Induktivität dargestellt. Die Spannung U liegt an jedem Bauelement an, die Teilströme sind mit I_R und I_L bezeichnet, der Gesamtstrom heißt I_0 .

Als Beispiel möchte ich die Schaltung mit folgenden Werten durchrechnen:



R-L-Parallelschaltung

$$U_0 = 12 \text{ V} \quad R = 30 \, \Omega \quad L = 40 \text{ mH} \quad \omega = 1000 \text{ s}^{-1}$$

Zunächst bestimme ich den Blindwiderstand der Induktivität.

$$\underline{X}_L = j\omega L = j \cdot 1\,000\text{ s}^{-1} \cdot 40\text{ mH} = j40\ \Omega$$

Am einfachsten ist es jetzt, die Teilströme zu berechnen. Auch hier müssen wir darauf achten, dass wir es mit Komplexen Größen zu tun haben.

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{R}} = \frac{12\text{ V}}{30\ \Omega} = 0,4\text{ A}$$

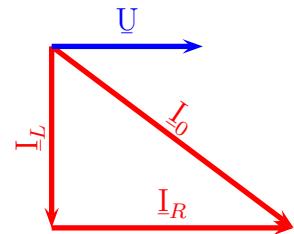
$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{X}_L} = \frac{12\text{ V}}{j40\ \Omega} = \frac{0,3\text{ A}}{j} = \frac{j0,3\text{ A}}{j^2} = -j0,3\text{ A}$$

Nun kann der Gesamtstrom \underline{I}_0 mit der Kirchhoffschen Knotenregel bestimmt werden.

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_R + \underline{I}_L = 0,4\text{ A} - j0,3\text{ A}$$

Dieser Strom mit Real- und Imaginärteil kann nicht weiter zusammengefasst werden.

Man kann hierzu auch ein Stromzeigerdiagramm angeben, wie hier nebenstehend dargestellt. In einer Parallelschaltung ist es zweckmäßig, wenn man den Spannungszeiger als Bezugsgröße verwendet, weil die Spannung in einer Parallelschaltung überall gleich groß ist. Der Strom \underline{I}_R ist in Phase zur Spannung \underline{U} , die beiden Zeiger verlaufen also parallel. Man kann auch sagen, dass der Stromzeiger \underline{I}_R eine Reelle Größe ist und deshalb parallel zur waagerechten Reellen Achse eingezeichnet werden muss. Der Strom \underline{I}_L eilt der Spannung \underline{U} um 90° in der Phase nach, daher zeigt der zugehörige Zeiger nach unten. Oder anders ausgedrückt: Der Stromzeiger \underline{I}_L ist eine Negativ-Imaginäre Größe und zeigt deshalb nach unten.



Stromzeiger-Diagramm

Man kann auch für die R-L-Parallelschaltung einen Komplexen Ersatzwiderstand bestimmen, allerdings ist das nicht ganz so simpel, wie bei der Reihenschaltung. Dazu haben wir zwei Möglichkeiten.

1. Man bestimmt den Scheinwiderstand \underline{Z} über die Spannung \underline{U} und den Gesamtstrom \underline{I}_0 mit dem Ohmsche Gesetz in Komplexer Form: $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_0}$
2. Man verwendet die Parallelschaltungsformel für Widerstände $\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ und passt sie für die Komplexen Widerstände \underline{R} und \underline{X}_L als Teilwiderstände an. Das sieht dann so aus: $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{R}} + \frac{1}{\underline{X}_L}$

Ich möchte beide Varianten einmal vorrechnen. Beginnen wir mit Variante 1:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= \frac{\underline{U}}{\underline{I}_0} \\
 &= \frac{12 \text{ V}}{0,4 \text{ A} - j0,3 \text{ A}} && \text{Konjugiert Komplex erweitern} \\
 &= \frac{12 \text{ V} \cdot (0,4 \text{ A} + j0,3 \text{ A})}{(0,4 \text{ A} - j0,3 \text{ A}) \cdot (0,4 \text{ A} + j0,3 \text{ A})} \\
 &= \frac{4,8 \text{ VA} + j3,6 \text{ VA}}{0,16 \text{ A}^2 + 0,09 \text{ A}^2} \\
 &= \frac{4,8 \text{ VA} + j3,6 \text{ VA}}{0,25 \text{ A}^2} \\
 &= 19,2 \Omega + j14,4 \Omega
 \end{aligned}$$

Es folgt Variante 2. Hier muss zunächst die Formel nach \underline{Z} umgestellt werden. Damit diese Umstellung allgemein weiter verwendbar ist, verwende ich zunächst die Variablen \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 anstelle von \underline{R} und \underline{X}_L .

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\underline{Z}_E} &= \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \\
 \frac{1}{\underline{Z}_E} &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2} \\
 \frac{1}{\underline{Z}_E} &= \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2} && | \text{ Kehrwerte} \\
 \underline{Z}_E &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}
 \end{aligned}$$

Möglicherweise kennt der eine oder andere die Parallelschaltungsformel für zwei Widerstände R_1 und R_2 in dieser Form:

$$R_E = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Dann wird ihm diese eben nach \underline{Z}_E umgestellte Formel bekannt vorkommen.

Anmerkung: Es lohnt sich, in der Komplexen Rechnung immer mit dieser nach \underline{Z}_E umgestellten Formel zu arbeiten.

Wir machen den Ansatz und setzen die bekannten Werte ein:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_E &= \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \\
 \underline{Z} &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_L}{\underline{R} + \underline{X}_L} \\
 \underline{Z} &= \frac{30 \Omega \cdot j40 \Omega}{30 \Omega + j40 \Omega} \\
 \underline{Z} &= \frac{j1200 \Omega^2}{30 \Omega + j40 \Omega} \\
 \underline{Z} &= \frac{j1200 \Omega^2}{30 \Omega + j40 \Omega} \cdot \frac{30 \Omega - j40 \Omega}{30 \Omega - j40 \Omega} \\
 \underline{Z} &= \frac{j36000 \Omega^3 + 48000 \Omega^3}{900 \Omega^2 + 1600 \Omega^2} \\
 \underline{Z} &= \frac{j36000 \Omega^3 + 48000 \Omega^3}{2500 \Omega^2} \\
 \underline{Z} &= j14,4 \Omega + 19,2 \Omega
 \end{aligned}$$

Ähnlich wie bei den Reihenschaltungen können wir auch hier den Betrag des Gesamtstromes I_0 berechnen. Das ist der Strom, den ein Strommesser anzeigen würde. Das ist gleichzeitig auch der Strom, nach dem ggf. der Leiterquerschnitt der Zuleitung ausgelegt werden muss.

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{(\operatorname{Re} I)^2 + (\operatorname{Im} I)^2} \\
 &= \sqrt{(0,4 \text{ A})^2 + (-0,3 \text{ A})^2} \\
 I &= 0,5 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Auch der Betrag des Ersatzwiderstandes kann berechnet werden. Hierfür haben wir jetzt zwei verschiedene Möglichkeiten.

Bestimmen wir zunächst den Betrag Z aus dem Komplexen \underline{Z} .

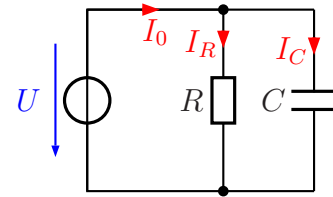
$$\begin{aligned}
 Z &= \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{Z})^2 + (\operatorname{Im} \underline{Z})^2} \\
 &= \sqrt{(19,2 \Omega)^2 + (14,4 \Omega)^2} \\
 Z &= 24 \Omega
 \end{aligned}$$

Der Betrag von Z kann auch mit dem Ohmschen Gesetz über die Beträge von U und I_0 bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{U}{I_0} \\
 &= \frac{12 \text{ V}}{0,5 \text{ A}} \\
 Z &= 24 \Omega
 \end{aligned}$$

3.2.2 R-C-Parallelschaltung

Nebenstehend ist eine Parallelschaltung aus einem Ohmschen Widerstand und einem Kondensator dargestellt. Die Spannung U liegt an jedem Bauelement an, die Teilströme sind mit I_R und I_C bezeichnet, der Gesamtstrom heißt I_0 .



R-C-Parallelschaltung

Als Beispiel möchte ich die Schaltung mit folgenden Werten durchrechnen:

$$U_0 = 39 \text{ V} \quad R = 12 \Omega \quad C = 100 \mu\text{F} \quad \omega = 2000 \text{ s}^{-1}$$

Zunächst bestimme ich den Blindwiderstand der Kapazität.

$$X_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 2000 \text{ s}^{-1} \cdot 100 \mu\text{F}} = -j5 \Omega$$

Auch hier ist es jetzt sinnvoll, die Teilströme zu berechnen. Immer noch müssen wir darauf achten, dass wir es mit Komplexen Größen zu tun haben.

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{R}} = \frac{39 \text{ V}}{12 \Omega} = 3,25 \text{ A}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{X}_C} = \frac{39 \text{ V}}{-j5 \Omega} = \frac{7,8 \text{ A}}{-j} = \frac{j7,8 \text{ A}}{-j^2} = j7,8 \text{ A}$$

Nun kann der Gesamtstrom \underline{I}_0 mit der Kirchhoffschen Knotenregel bestimmt werden.

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_R + \underline{I}_C = 3,25 \text{ A} + j7,8 \text{ A}$$

Dieser Strom mit Real- und Imaginärteil kann nicht weiter zusammengefasst werden. Wir können jedoch noch den **Betrag** dieses Stromes berechnen. Das ist der Wert, den ein Strommesser anzeigen würde.

$$I_0 = \sqrt{(\text{Re } \underline{I}_0)^2 + (\text{Im } \underline{I}_0)^2} = \sqrt{(3,25 \text{ A})^2 + (7,8 \text{ A})^2} = 8,45 \text{ A}$$

Ein Zeigerbild dazu möchte ich mir ersparen, es sieht fast genau so aus, wie bei der R-L-Parallelschaltung. Es ist nur vertikal gespiegelt, weil das Vorzeichen des Blindwiderstandes einer Kapazität anders ist, als bei einer Induktivität.

Wir können auch für diese Schaltung den Komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} bestimmen. Hier soll die Berechnung aus \underline{R} und \underline{X}_C aber ausreichen. Ich verwende die zuvor bereits **umgestellte** Formel.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_C}{\underline{R} + \underline{X}_C} \\
&= \frac{12 \Omega \cdot (-j5 \Omega)}{12 \Omega - j5 \Omega} \\
&= \frac{-j60 \Omega^2}{12 \Omega - j5 \Omega} \\
&= \frac{-j60 \Omega^2 \cdot (12 \Omega + j5 \Omega)}{(12 \Omega - j5 \Omega) \cdot (12 \Omega + j5 \Omega)} \\
&= \frac{-j720 \Omega^3 + 300 \Omega^3}{144 \Omega^2 + 25 \Omega^2} \\
&= \frac{-j720 \Omega^3 + 300 \Omega^3}{169 \Omega^2} \\
&\approx -j4,26 \Omega + 1,76 \Omega
\end{aligned}$$

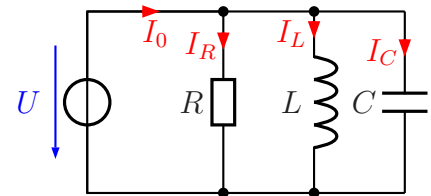
Zum Schluss können wir noch den Betrag des Ersatzwiderstandes berechnen.

$$Z = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{Z})^2 + (\operatorname{Im} \underline{Z})^2} = \sqrt{(1,76 \Omega)^2 + (-4,26 \Omega)^2} = 4,61 \Omega$$

Wie man sieht, gilt auch hier noch die Regel aus der Gleichstromtechnik, dass der Ersatzwiderstand einer Parallelschaltung stets kleiner als der kleinste Einzelwiderstand ist.

3.2.3 R-L-C-Parallelschaltung

Nebenstehend ist eine Parallelschaltung aus einem Ohmschen Widerstand, einer Induktivität und einer Kapazität dargestellt. Die Spannung U liegt an jedem Bauelement an, die Teilströme sind mit I_R , I_L und I_C bezeichnet, der Gesamtstrom heißt I_0 .



R-L-C-Parallelschaltung

Als Beispiel möchte ich die Schaltung mit folgenden Werten durchrechnen:

$$U_0 = 12 \text{ V} \quad R = 4 \text{ k}\Omega \quad L = 1,2 \text{ H} \quad C = 500 \text{ nF} \quad \omega = 1000 \text{ s}^{-1}$$

Zuerst werden die Blindwiderstände berechnet, zunächst \underline{X}_L :

$$\underline{X}_L = j\omega L = j1000 \text{ s}^{-1} \cdot 1,2 \text{ H} = j1,2 \text{ k}\Omega$$

Es folgt die Berechnung von \underline{X}_C :

$$\underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j1000 \text{ s}^{-1} \cdot 500 \text{ nF}} = \frac{2 \text{ k}\Omega}{j} = \frac{j2 \text{ k}\Omega}{j^2} = -j2 \text{ k}\Omega$$

Die Teilströme können berechnet werden. Beginnen wir mit \underline{I}_R :

$$\underline{I}_R = \frac{U}{R} = \frac{12 \text{ V}}{4 \text{ k}\Omega} = 3 \text{ mA}$$

Weiter geht es mit \underline{I}_L :

$$\underline{I}_L = \frac{U}{\underline{X}_L} = \frac{12 \text{ V}}{j1,2 \text{ k}\Omega} = \frac{10 \text{ mA}}{j} = \frac{j10 \text{ mA}}{j^2} = -j10 \text{ mA}$$

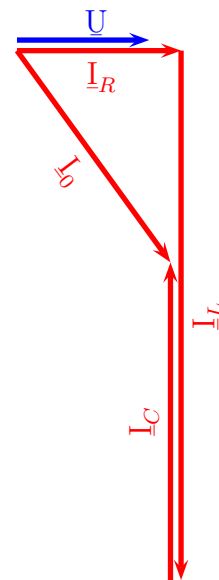
Es folgt \underline{I}_C :

$$\underline{I}_C = \frac{U}{\underline{X}_C} = \frac{12 \text{ V}}{-j2 \text{ k}\Omega} = \frac{6 \text{ mA}}{-j} = \frac{j6 \text{ mA}}{-j^2} = j6 \text{ mA}$$

Mit Hilfe der Kirchhoffschen Knotenregel kann hiermit der Gesamtstrom \underline{I}_0 bestimmt werden.

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = 3 \text{ mA} - j10 \text{ mA} + j6 \text{ mA} = 3 \text{ mA} - j4 \text{ mA}$$

Nebenstehend ist das Stromzeigerbild dieser Schaltung dargestellt. Da die Spannung \underline{U} an jedem Bauelement anliegt, wurde \underline{U} als Bezugsgröße (zur Festlegung der Richtungen) gewählt. An den Pfeillängen kann man erkennen, dass in dieser Schaltung die Teilströme \underline{I}_L in der Induktivität und \underline{I}_C in der Kapazität vom Betrag her größer sind, als der Gesamtstrom \underline{I}_0 . Das muss nicht immer so sein, aber das kann je nach den vorhandenen Werten durchaus so sein.



Um das prüfen zu können, berechnen wir noch den Betrag von \underline{I}_0 .

$$I_0 = \sqrt{(\text{Re } \underline{I})^2 + (\text{Im } \underline{I})^2} = \sqrt{(3 \text{ mA})^2 + (-4 \text{ mA})^2} = 5 \text{ mA}$$

Die Beträge von \underline{I}_L und \underline{I}_C sind ohne weitere Berechnung $I_L = 10 \text{ mA}$ und $I_C = 6 \text{ mA}$. Diese Werte sind tatsächlich – wie schon aus dem Zeigerbild gesehen – größer als I_0 . Aus dem Zeigerbild können wir auch erkennen, **warum** das möglich ist. Da die Zeiger von \underline{I}_L und \underline{I}_C entgegengesetzt gerichtet sind, heben sich diese Ströme teilweise auf.

Wir können noch den Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung berechnen. Dies geht am einfachsten mit dem Ohmschen Gesetz am Ersatzwiderstand \underline{Z} .

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{U}{\underline{I}_0} \\
&= \frac{12 \text{ V}}{3 \text{ mA} - j4 \text{ mA}} \\
&= \frac{12 \text{ V} \cdot (3 \text{ mA} + j4 \text{ mA})}{(3 \text{ mA} - j4 \text{ mA}) \cdot (3 \text{ mA} + j4 \text{ mA})} \\
&= \frac{36 \text{ mAV} + j48 \text{ mAV}}{9 \text{ mA}^2 + 16 \text{ mA}^2} \\
&= \frac{36 \text{ V} + j48 \text{ V}}{25 \text{ mA}} \\
&= 1,44 \text{ k}\Omega + j1,92 \text{ k}\Omega
\end{aligned}$$

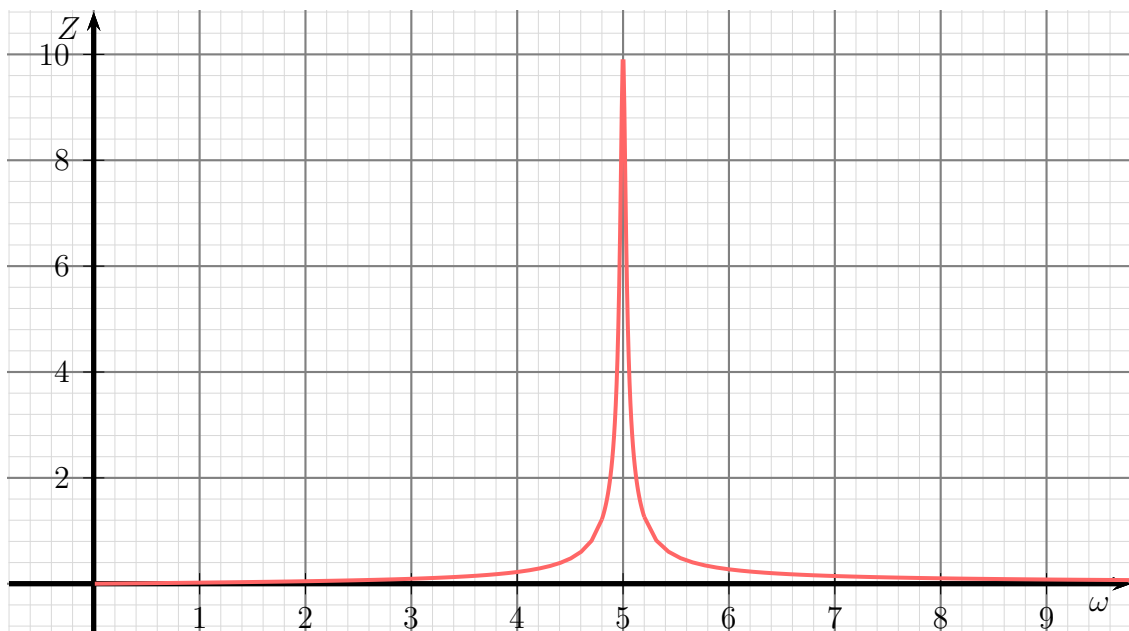
Zum Schluss können wir auch noch den Betrag des Ersatzwiderstandes Z bestimmen.

$$Z = \sqrt{(\text{Re } \underline{Z})^2 + (\text{Im } \underline{Z})^2} = \sqrt{(1,44 \text{ k}\Omega)^2 + (1,92 \text{ k}\Omega)^2} = 2,4 \text{ k}\Omega$$

3.2.4 Resonanz bei R-L-C-Parallelschaltungen

Auch bei R-L-C-Parallelschaltungen gibt es gegebenenfalls Resonanz. Diese ist gegeben, wenn die Bedingung $X_L = X_C$ erfüllt ist, die Beträge also gleich sind. Dann heben sich die Ströme \underline{I}_L und \underline{I}_C genau auf. Als Strom \underline{I}_0 bleibt dann nur der Strom \underline{I}_R übrig. Wie man leicht erkennen kann, ist dann auch der Ersatzwiderstand der Schaltung $\underline{Z} = \underline{R}$.

Bildet man den Betrag des Ersatzwiderstand Z als Funktion der Kreisfrequenz ω , erhält man sinngemäß den nachfolgend dargestellten Funktionsverlauf.



Typischer Verlauf für $Z = f(\omega)$

Wie man gut erkennen kann, ist die R-L-C-Parallelschaltung hochohmig für die Resonanzfrequenz und niederohmig für alle anderen Frequenzen. Der Parallelschwingkreis – so nennt man diese Schaltung in der Nachrichtentechnik – wird dort gern verwendet, um aus einem Frequenzspektrum eine einzelne Frequenz herauszufiltern. Das kann beispielsweise der eine Rundfunksender sein, den man hören möchte. Die anderen Frequenzen werden mehr oder weniger kurzgeschlossen.

3.3 Gemischte Schaltungen

Mit diesen Grundkenntnissen können nun auch kompliziertere Schaltungen berechnet werden. Betrachten wir dazu dieses Beispiel.

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Folgende Daten sind gegeben:

$$U_0 = 10 \text{ V}$$

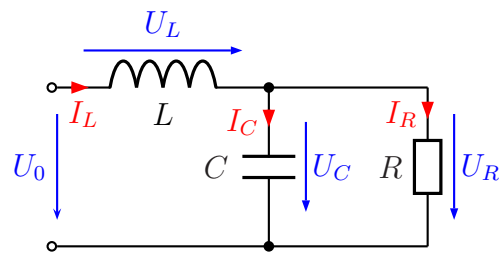
$$R = 50 \Omega$$

$$\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$$

$$L = 20 \text{ mH}$$

$$C = 40 \mu\text{F}$$

Gesucht sind die Teilspannungen U_L und U_R sowie die Ströme I_L , I_C und I_R . (Damit sind die **Beträge** dieser Größen gemeint.)



Lösung:

Zu beachten ist, dass die Kirchhoffschen Regeln **nur bei Verwendung der Komplexen Rechnung**⁷ angewendet werden können. Bestimmen wir daher zunächst die Komplexen Größen \underline{X}_L und \underline{X}_C .

$$\underline{X}_L = j\omega L = j1000 \text{ s}^{-1} \cdot 20 \text{ mH} = j20 \Omega$$

$$\underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j1000 \text{ s}^{-1} \cdot 40 \mu\text{F}} = -j25 \Omega$$

Als Bezugsgröße wird die Spannung U_0 verwendet, weil ja keine andere Spannung bekannt ist. Der Einfachheit halber legt man diese Spannung als Reelle Größe fest.

$$U_0 = 10 \text{ V} \Rightarrow \underline{U}_0 = 10 \text{ V}$$

Der Ohmsche Widerstand ist eine Reelle Größe.

$$R = 50 \Omega \Rightarrow \underline{R} = 50 \Omega$$

Damit können wir in die Berechnung einsteigen.

⁷Grundlagen zur Komplexen Rechnung sind hier zu finden:
<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/komplgl.pdf>

Bestimmung von Z : Die Zusammenfassung der Parallelschaltung aus R und X_C nenne ich Z_{RC} . Nach der Formel zur Parallelschaltung erhalte ich:

$$\begin{aligned} Z_{RC} &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_C}{\underline{R} + \underline{X}_C} \\ &= \frac{50 \Omega \cdot (-j25 \Omega)}{50 \Omega - j25 \Omega} \\ &= \frac{-j1250 \Omega^2}{50 \Omega - j25 \Omega} \end{aligned}$$

Da ich keine Lust habe, mit so großen Zahlen und unhandlichen Einheiten zu rechnen, klammere ich zunächst so viel wie möglich (hier: 25Ω) aus, damit ich kürzen kann. Anschließend wird **Kongugiert Komplex** erweitert und zusammengefasst.

$$\begin{aligned} Z_{RC} &= \frac{-j1250 \Omega^2}{50 \Omega - j25 \Omega} \\ &= \frac{25 \Omega \cdot (-j50 \Omega)}{25 \Omega \cdot (2 - j)} \\ &= \frac{-j50 \Omega}{2 - j} \\ &= \frac{(-j50 \Omega) \cdot (2 + j)}{(2 - j) \cdot (2 + j)} \\ &= \frac{-j100 \Omega + 50 \Omega}{4 + 1} \\ &= -j \frac{100 \Omega}{5} + \frac{50 \Omega}{5} \\ Z_{RC} &= -j20 \Omega + 10 \Omega \end{aligned}$$

Damit kann ich den gesamten Ersatzwiderstand der Schaltung Z bestimmen:

$$Z = \underline{X}_L + Z_{RC} = j20 \Omega + (-j20 \Omega + 10 \Omega) = 10 \Omega$$

Die gesamte Schaltung verhält sich also wie ein reeller 10Ω -Widerstand. Damit bestimme ich den Strom \underline{I}_L .

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_0}{Z} = \frac{10 \text{ V}}{10 \Omega} = 1 \text{ A}$$

Als nächstes berechne ich die Spannung \underline{U}_L an der Induktivität.

$$\underline{U}_L = \underline{X}_L \cdot \underline{I} = j20 \Omega \cdot 1 \text{ A} = j20 \text{ V}$$

Gesucht ist der Betrag dieser Spannung. Das ist ohne großartige Rechnung:

$$U_L = 20 \text{ V}$$

Aus \underline{U}_0 und \underline{U}_L kann ich \underline{U}_R berechnen.

$$\underline{U}_R = \underline{U}_0 - \underline{U}_L = 10 \text{ V} - j20 \text{ V}$$

Gesucht ist der Betrag dieser Spannung. Die berechne ich über die Grundformel für Beträge:

$$U_R = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{U}_R)^2 + (\operatorname{Im} \underline{U}_R)^2} = \sqrt{(10 \text{ V})^2 + (-20 \text{ V})^2} = \sqrt{500 \text{ V}^2} \approx 22,36 \text{ V}$$

Anmerkung: Es ist **kein** Rechenfehler, dass sowohl U_L als auch U_R größer sind als die Ursprungsspannung U_0 .

Jetzt müssen noch die Ströme I_R und I_C bestimmt werden.

Den Komplexen Strom \underline{I}_R erhalten wir über das Ohmsche Gesetz an R .

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_R}{\underline{R}} = \frac{10 \text{ V} - j20 \text{ V}}{50 \Omega} = 200 \text{ mA} - j400 \text{ mA}$$

Der zugehörige Betrag wird bestimmt.

$$I_R = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{I}_R)^2 + (\operatorname{Im} \underline{I}_R)^2} = \sqrt{(200 \text{ mA})^2 + (-400 \text{ mA})^2} \approx 447,2 \text{ mA}$$

Der Komplexe Strom \underline{I}_C kann nun entweder aus \underline{U}_R und \underline{X}_C mit dem Ohmschen Gesetz an C oder über die Kirchhoffsche Knotenregel aus \underline{I}_R und \underline{I}_L bestimmt werden. Ich wähle die zweite Variante.

$$\begin{aligned} \underline{I}_R + \underline{I}_C &= \underline{I}_L \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_L - \underline{I}_R \\ &= 1 \text{ A} - (200 \text{ mA} - j400 \text{ mA}) \\ &= 1000 \text{ mA} - 200 \text{ mA} + j400 \text{ mA} \\ \underline{I}_C &= 800 \text{ mA} + j400 \text{ mA} \end{aligned}$$

Der zugehörige Betrag wird bestimmt.

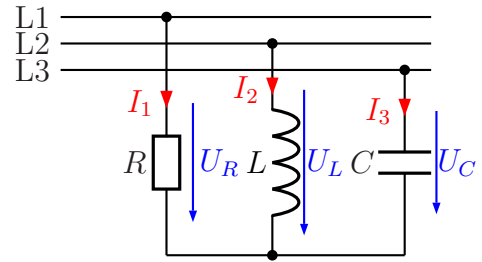
$$I_C = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{I}_C)^2 + (\operatorname{Im} \underline{I}_C)^2} = \sqrt{(800 \text{ mA})^2 + (400 \text{ mA})^2} \approx 894,4 \text{ mA}$$

Ohne weitere Rechnung folgt aus $\underline{I}_L = 1 \text{ A}$ sofort: $I_L = 1 \text{ A}$

Damit sind alle gesuchten Größen bestimmt.

3.4 Kompliziertere gemischte Schaltungen

Es gibt Schaltungen, die sind so kompliziert aufgebaut, dass man zur Schaltungsanalyse Verfahren wie den Überlagerungssatz oder das Maschenstromverfahren⁸ verwendet. Beispielsweise kann eine „Schiefe Last“ am Dreiphasenwechselspannungsnetz so einen Fall darstellen.

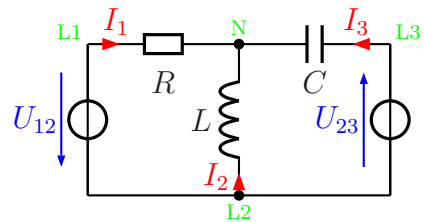


Nebenstehend ist eine solche Schaltung für das 50-Hz-Netz dargestellt. Die Außenleiterspannung betrage $U = 400\text{ V}$. Bekannt sind außerdem noch diese Werte:

$$R = 200\ \Omega \quad C = 10\ \mu\text{F} \quad L = 500\ \text{mH}$$

Es sollen alle Außenleiterströme I_1 bis I_3 sowie die Spannungen U_R , U_L und U_C an den drei Bauelementen bestimmt werden.

Um einen besseren Überblick zu erhalten, wird die Schaltung zunächst etwas umgezeichnet. Dabei werden aus dem Dreiphasen-Wechselspannungsnetz nur die Spannungen U_{12} und U_{23} verwendet; mit diesen wird aber trotzdem das komplette Netz vollständig beschrieben. Zur besseren Orientierung habe ich die Punkte, die die Außenleiter **L1**, **L2** und **L3** sowie den Sternpunkt **N** bezeichnen, mit in die Schaltung eingetragen. Wenn ich festlege: $\underline{U}_{12} = 400\text{ V} \cdot e^{j0^\circ}$, dann erhalte ich $\underline{U}_{23} = 400\text{ V} \cdot e^{-j120^\circ}$, weil \underline{U}_{23} um 120° in der Phase nacheilt.



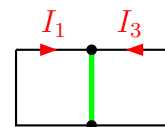
Zur Lösung müssen zunächst die Blindwiderstände berechnet werden.

$$\underline{X}_L = j\omega L = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50\text{ Hz} \cdot 500\text{ mH} = j157\ \Omega$$

$$\underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{-j}{2 \cdot \pi \cdot 50\text{ Hz} \cdot 10\ \mu\text{F}} = -j318\ \Omega$$

3.4.1 Lösung mit Maschenstromverfahren

Nebenstehend ist das Gerippe der Schaltung dargestellt, mit dem ich die Schaltung analysieren möchte. Da ich mit dem **Maschenstromverfahren** arbeiten möchte, wähle ich zunächst einen „**Vollständigen Baum**“, der alle Knoten (hier allerdings nur zwei) auf einem eindeutigen Weg miteinander verbindet. Dieser auf einen einzigen Strich „verkümmerte“ Baum ist in **grüner** Farbe dargestellt. Damit ergeben sich die Maschenströme I_1 und I_3 , mit denen das Gleichungssystem aufgestellt wird. Die Masche 1 verläuft



⁸Einzelheiten siehe z. B. hier: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/netzwerk.pdf>

über R , X_L und U_{12} , Masche 3 entsprechend über X_C , X_L und U_{23} .

Jetzt können wir einen Maschenumlauf für Masche 1 und Masche 3 aufstellen. Dies muss natürlich in Komplexer Rechnung geschehen.

$$\begin{aligned} (1) \quad R \cdot I_1 + X_L \cdot (I_1 + I_3) - U_{12} &= 0 \\ (3) \quad X_C \cdot I_3 + X_L \cdot (I_1 + I_3) + U_{23} &= 0 \end{aligned}$$

Vor dem Einsetzen der Werte bringe ich das Gleichungssystem in die Normalform.

$$\begin{aligned} (1) \quad R \cdot I_1 + X_L \cdot I_1 + X_L \cdot I_3 &= U_{12} \\ (3) \quad X_C \cdot I_3 + X_L \cdot I_1 + X_L \cdot I_3 &= -U_{23} \\ \hline (1) \quad (R + X_L) \cdot I_1 + X_L \cdot I_3 &= U_{12} \\ (3) \quad X_L \cdot I_1 + (X_C + X_L) \cdot I_3 &= -U_{23} \end{aligned}$$

Nun können die Werte in die Gleichung eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} (1) \quad (R + X_L) \cdot I_1 + X_L \cdot I_3 &= U_{12} \\ (3) \quad X_L \cdot I_1 + (X_C + X_L) \cdot I_3 &= -U_{23} \\ \hline (1) \quad (200 \Omega + j157 \Omega) \cdot I_1 + j157 \Omega \cdot I_3 &= 400 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ} \\ (3) \quad j157 \Omega \cdot I_1 + (-j318 \Omega + j157 \Omega) \cdot I_3 &= -400 \text{ V} \cdot e^{-j120^\circ} \end{aligned}$$

Fasst man noch ein wenig zusammen, dann erhält man dieses Gleichungssystem:

$$\boxed{\begin{aligned} (1) \quad (200 \Omega + j157 \Omega) \cdot I_1 + j157 \Omega \cdot I_3 &= 400 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ} \\ (3) \quad j157 \Omega \cdot I_1 - j161 \Omega \cdot I_3 &= -400 \text{ V} \cdot e^{-j120^\circ} \end{aligned}}$$

Spätestens jetzt sollte man die Spannungen in die Komponentenform umwandeln.

$$U_{12} = 400 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ} = 400 \text{ V}$$

$$U_{23} = 400 \text{ V} \cdot e^{-j120^\circ} = 400 \text{ V} \cdot \cos(-120^\circ) + j400 \text{ V} \cdot \sin(-120^\circ) = -200 \text{ V} - j346 \text{ V}$$

Diese Werte können in das Gleichungssystem eingesetzt werden.

$$\boxed{\begin{aligned} (1) \quad (200 \Omega + j157 \Omega) \cdot I_1 + j157 \Omega \cdot I_3 &= 400 \text{ V} \\ (3) \quad j157 \Omega \cdot I_1 - j161 \Omega \cdot I_3 &= 200 \text{ V} + j346 \text{ V} \end{aligned}}$$

Dieses Gleichungssystem kann mit jedem beliebigen Verfahren gelöst werden. Ich wähle das Additionsverfahren. Multipliziert man Gleichung (1) mit 161 und Gleichung (3) mit 157, dann sind die Koeffizienten von I_3 gleich. Die Gleichungen können dann addiert werden.

$$\begin{aligned} (1) \quad (200 \Omega + j157 \Omega) \cdot I_1 + j157 \Omega \cdot I_3 &= 400 \text{ V} & | \cdot 161 \\ (3) \quad j157 \Omega \cdot I_1 - j161 \Omega \cdot I_3 &= 200 \text{ V} + j346 \text{ V} & | \cdot 157 \\ \hline (1) \quad (32\,200 \Omega + j25\,277 \Omega) \cdot I_1 + j25\,277 \Omega \cdot I_3 &= 64\,400 \text{ V} & | \\ (3) \quad j24\,649 \Omega \cdot I_1 - j25\,277 \Omega \cdot I_3 &= 31\,400 \text{ V} + j54\,322 \text{ V} & | + \\ \hline (32\,200 \Omega + j49\,926 \Omega) \cdot I_1 &= 95\,800 \text{ V} + j54\,322 \text{ V} \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nun nach \underline{I}_1 aufgelöst werden.

$$\begin{aligned}
 (32\,200\ \Omega + j49\,926\ \Omega) \cdot \underline{I}_1 &= 95\,800\ \text{V} + j54\,322\ \text{V} \\
 \underline{I}_1 &= \frac{95\,800\ \text{V} + j54\,322\ \text{V}}{32\,200\ \Omega + j49\,926\ \Omega} \\
 &= \frac{(95\,800\ \text{V} + j54\,322\ \text{V}) \cdot (32\,200\ \Omega - j49\,926\ \Omega)}{(32\,200\ \Omega + j49\,926\ \Omega) \cdot (32\,200\ \Omega - j49\,926\ \Omega)} \\
 &= \frac{3\,084\,760\,000\ \text{V}\Omega - j4\,782\,910\,800\ \text{V}\Omega + j1\,749\,168\,400\ \text{V}\Omega + 2\,712\,080\,172\ \text{V}\Omega}{1\,036\,840\,000\ \Omega^2 + 2\,492\,605\,476\ \Omega^2} \\
 &= \frac{5\,796\,840\,172\ \text{V}\Omega - j3\,033\,742\,400\ \text{V}\Omega}{3\,529\,445\,476\ \Omega^2} \\
 &= \frac{5\,796\,840\,172\ \text{V}\Omega}{3\,529\,445\,476\ \Omega^2} - j \frac{3\,033\,742\,400\ \text{V}\Omega}{3\,529\,445\,476\ \Omega^2} \\
 \underline{I}_1 &= 1,642\ \text{A} - j0,860\ \text{A}
 \end{aligned}$$

Dieser Wert für \underline{I}_1 kann nun in (1) oder (3) eingesetzt werden, um \underline{I}_3 zu berechnen. Gleichung (3) erscheint günstiger, weil der Koeffizient von \underline{I}_3 rein imaginär ist.

$$\begin{aligned}
 j157\ \Omega \cdot \underline{I}_1 - j161\ \Omega \cdot \underline{I}_3 &= 200\ \text{V} + j346\ \text{V} \\
 j157\ \Omega \cdot (1,642\ \text{A} - j0,860\ \text{A}) - j161\ \Omega \cdot \underline{I}_3 &= 200\ \text{V} + j346\ \text{V} \\
 j258\ \text{V} + 135\ \text{V} - j161\ \Omega \cdot \underline{I}_3 &= 200\ \text{V} + j346\ \text{V} & | - j258\ \text{V} - 135\ \text{V} \\
 -j161\ \Omega \cdot \underline{I}_3 &= 65\ \text{V} + j88\ \text{V} & | : (-j161\ \Omega) \\
 \underline{I}_3 &= \frac{65\ \text{V} + j88\ \text{V}}{-j161\ \Omega} \\
 &= \frac{65\ \text{V}}{-j161\ \Omega} + \frac{j88\ \text{V}}{-j161\ \Omega} \\
 &= \frac{j65\ \text{V}}{161\ \Omega} - \frac{88\ \text{V}}{161\ \Omega} \\
 \underline{I}_3 &= j0,404\ \text{A} - 0,547\ \text{A}
 \end{aligned}$$

Aus der ursprünglichen Schaltung ergibt sich aus der Kirchhoffschen Knotenregel am Sternpunkt: $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$. Hiermit kann \underline{I}_2 berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= 0 & | - \underline{I}_1 - \underline{I}_3 \\
 \underline{I}_2 &= -\underline{I}_1 - \underline{I}_3 \\
 &= -(1,642\ \text{A} - j0,860\ \text{A}) - (j0,404\ \text{A} - 0,547\ \text{A}) \\
 &= -1,642\ \text{A} + j0,860\ \text{A} - j0,404\ \text{A} + 0,547\ \text{A} \\
 \underline{I}_2 &= -1,095\ \text{A} + j0,456\ \text{A}
 \end{aligned}$$

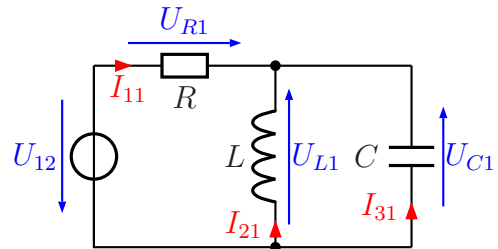
Nun fehlen noch die Spannungen. Sie können jeweils durch das Ohmsche Gesetz am jeweiligen Widerstand berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_R &= \underline{R} \cdot \underline{I}_1 = 200\ \Omega \cdot (1,642\ \text{A} - j0,860\ \text{A}) = 328\ \text{V} - j172\ \text{V} \\
 \underline{U}_L &= \underline{X}_L \cdot \underline{I}_2 = j157\ \Omega \cdot (-1,095\ \text{A} + j0,456\ \text{A}) = -j172\ \text{V} - 72\ \text{V} \\
 \underline{U}_C &= \underline{X}_C \cdot \underline{I}_3 = -j318\ \Omega \cdot (j0,404\ \text{A} - 0,547\ \text{A}) = 128\ \text{V} + j174\ \text{V}
 \end{aligned}$$

3.4.2 Lösung mit Überlagerungssatz

Alternativ zu dieser Lösung ist es auch möglich, die Ströme mit dem **Überlagerungssatz**⁹ zu bestimmen. Dazu muss im ersten Schritt nur U_{12} in Betrieb sein und im zweiten Schritt nur U_{23} . Danach werden die jeweils berechneten Teilströme addiert. Führen wir das nun durch.

Schritt 1: Zur besseren Unterscheidung bekommen alle Größen, die unterschiedlich sein können, in Schritt 1 zusätzlich den Index 1 und in Schritt 2 den Index 2 angehängt. Nebenstehend ist die sich ergebende Schaltung zu Schritt 1 dargestellt.



Hier ist nur U_{12} in Betrieb, U_{23} muss durch einen Kurzschluss ersetzt werden. Dann sind L und C parallel geschaltet. Ich kann den zugehörigen Ersatzwiderstand \underline{X}_{LC} bestimmen:

$$\begin{aligned} \underline{X}_{LC} &= \frac{\underline{X}_L \cdot \underline{X}_C}{\underline{X}_L + \underline{X}_C} \\ &= \frac{j157 \Omega \cdot (-j318 \Omega)}{j157 \Omega - j318 \Omega} \\ &= \frac{49\,926 \Omega^2}{-j161 \Omega} \\ \underline{X}_{LC} &= j310 \Omega \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Gesamtwiderstandes, den ich \underline{Z}_1 nenne, muss zu \underline{X}_{LC} noch R in Reihe geschaltet werden:

$$\underline{Z}_1 = R + \underline{X}_{LC} = 200 \Omega + j310 \Omega$$

Hiermit kann nun der Strom \underline{I}_{11} bestimmt werden, denn der fließt durch \underline{Z}_1 .

$$\begin{aligned} \underline{I}_{11} &= \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1} \\ &= \frac{400 \text{ V}}{200 \Omega + j310 \Omega} \\ &= \frac{400 \text{ V} \cdot (200 \Omega - j310 \Omega)}{(200 \Omega + j310 \Omega) \cdot (200 \Omega - j310 \Omega)} \\ &= \frac{80\,000 \text{ V}\Omega - j124\,000 \text{ V}\Omega}{80\,000 \Omega^2 + 96\,100 \Omega^2} \\ &= \frac{136\,100 \Omega^2}{80\,000 \text{ V}\Omega - j124\,000 \text{ V}\Omega} \\ \underline{I}_{11} &= 0,588 \text{ A} - j0,911 \text{ A} \end{aligned}$$

⁹Einzelheiten siehe z. B. hier: <http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/netzwerk.pdf>

Zur Brechnung der beiden anderen Ströme wird die Spannung \underline{U}_{L1} bzw. \underline{U}_{C1} benötigt. Diese kann kann auf zweierlei Wegen berechnet werden:

1. Man berechnet zunächst \underline{U}_{R1} über \underline{I}_{11} und \underline{R} mit dem Ohmschen Gesetz und bestimmt dann die Spannung \underline{U}_{L1} bzw. \underline{U}_{C1} mit einem Maschenumlauf.
2. Man kann \underline{U}_{L1} bzw. \underline{U}_{C1} direkt aus \underline{I}_{11} und \underline{X}_{LC} mit dem Ohmschen Gesetz.

Methode 2 erscheint mir günstiger. Es ist jedoch darauf zu achten, dass Strom- und Spannungspfeile **entgegengesetzt** gerichtet sind!

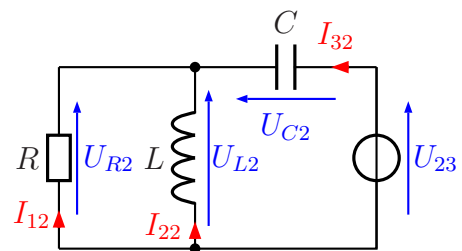
$$\underline{U}_{L1} = \underline{U}_{C1} = -\underline{X}_{LC} \cdot \underline{I}_{11} = -j310 \Omega \cdot (0,588 \text{ A} - j0,911 \text{ A}) = -j182 \text{ V} - 282 \text{ V}$$

Damit kann \underline{I}_{21} und \underline{I}_{31} berechnet werden.

$$\underline{I}_{21} = \frac{\underline{U}_{L1}}{\underline{X}_L} = \frac{-j182 \text{ V} - 282 \text{ V}}{j157 \Omega} = -1,159 \text{ A} + j1,796 \text{ A}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{C1}}{\underline{X}_C} = \frac{-j182 \text{ V} - 282 \text{ V}}{-j318 \Omega} = 0,572 \text{ A} - j0,887 \text{ A}$$

Schritt 2: Für Schritt 2 wird die Spannung U_{12} außer Betrieb genommen, also kurzgeschlossen. In Betrieb ist hier nur die Spannung U_{23} . Für alle Größen, die in Schritt 2 anders als in Schritt 1 sein können, wird nun der zusätzliche Index 2 verwendet.



Nebenstehend ist die sich ergebende Schaltung dargestellt. Hier sind jetzt R und L parallelgeschaltet. Den Ersatzwiderstand dieser Parallelschaltung nenne ich Z_{RL} .

$$\begin{aligned} Z_{RL} &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_L}{\underline{R} + \underline{X}_L} \\ &= \frac{200 \Omega \cdot j157 \Omega}{200 \Omega + j157 \Omega} \\ &= \frac{j31\,400 \Omega^2}{200 \Omega + j157 \Omega} \\ &= \frac{j31\,400 \Omega^2 \cdot (200 \Omega - j157 \Omega)}{(200 \Omega + j157 \Omega) \cdot (200 \Omega - j157 \Omega)} \\ &= \frac{40\,000 \Omega^2 + 24\,649 \Omega^2}{j6\,280\,000 \Omega^3 + 4\,929\,800 \Omega^3} \\ &= \frac{64\,649 \Omega^2}{j6\,280\,000 \Omega^3 + 4\,929\,800 \Omega^3} \\ Z_{RL} &= j97 \Omega + 76 \Omega \end{aligned}$$

Damit kann der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung als Reihenschaltung aus Z_{RL} und X_C berechnet werden. Ich nenne ihn Z_2 .

$$Z_2 = Z_{RL} + X_C = j97 \Omega + 76 \Omega - j318 \Omega = 76 \Omega - j221 \Omega$$

Hiermit kann nun über das Ohmsche Gesetz an Z_2 der Strom I_{32} berechnet werden. Hierbei ist jedoch auf die Polung von U_{23} zu achten!

$$\begin{aligned} I_{32} &= \frac{-U_{23}}{Z_2} \\ &= \frac{-(-200 \text{ V} - j346 \text{ V})}{76 \Omega - j221 \Omega} \\ &= \frac{(200 \text{ V} + j346 \text{ V}) \cdot (76 \Omega + j221 \Omega)}{(76 \Omega - j221 \Omega) \cdot (76 \Omega + j221 \Omega)} \\ &= \frac{15\,200 \text{ V}\Omega + j44\,200 \Omega^2 + j26\,296 \text{ V}\Omega - 76\,466 \text{ V}\Omega}{5\,776 \Omega^2 + 48\,841 \Omega^2} \\ &= \frac{-61\,266 \text{ V}\Omega + j70\,496 \text{ V}\Omega}{54\,617 \Omega^2} \\ I_{32} &= -1,122 \text{ A} + j1,291 \text{ A} \end{aligned}$$

Mit diesem Strom und Z_{RL} kann über das Ohmsche Gesetz die Spannung U_{R2} bzw. U_{L2} bestimmt werden. Es ist auf die umgekehrte Polung (Pfeilrichtung) von Spannung und Strom zu achten!

$$\begin{aligned} U_{R2} &= U_{L2} = Z_{RL} \cdot (-I_{32}) \\ &= (j97 \Omega + 76 \Omega) \cdot (1,122 \text{ A} - j1,291 \text{ A}) \\ &= j109 \text{ V} + 125 \text{ V} + 85 \text{ V} - j98 \text{ V} \\ U_{R2} &= U_{L2} = 210 \text{ V} + j11 \text{ V} \end{aligned}$$

Hiermit können die Ströme I_{12} und I_{22} über das Ohmsche Gesetz an R bzw. L berechnet werden. Hier stimmen Strom- und Spannungsrichtungen überein.

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{U_{R2}}{R} = \frac{210 \text{ V} + j11 \text{ V}}{200 \Omega} = 1,05 \text{ A} + j0,05 \text{ A} \\ I_{22} &= \frac{U_{L2}}{X_L} = \frac{210 \text{ V} + j11 \text{ V}}{j157 \Omega} = 0,07 \text{ A} - j1,338 \text{ A} \end{aligned}$$

Zusammenfassung: Jetzt können die Teilströme aus beiden Schritten zu den jeweiligen Gesamtlösungen addiert werden.

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} + I_{12} = 0,588 \text{ A} - j0,911 \text{ A} + 1,05 \text{ A} + j0,05 \text{ A} = 1,638 \text{ A} - j0,861 \text{ A} \\ I_2 &= I_{21} + I_{22} = -1,159 \text{ A} + j1,796 \text{ A} + 0,07 \text{ A} - j1,338 \text{ A} = -1,089 \text{ A} + j0,458 \text{ A} \\ I_3 &= I_{31} + I_{32} = 0,572 \text{ A} - j0,887 \text{ A} - 1,122 \text{ A} + j1,291 \text{ A} = -0,550 \text{ A} + j0,404 \text{ A} \end{aligned}$$

Die noch fehlenden Spannungen können entweder wie beim ersten Lösungsweg beschrieben oder durch Addition der Teilspannungen aus den beiden Schritten des zweiten Lösungsweges bestimmt werden.

Fazit: Bis auf kleine Unterschiede, die durch Rundungsfehler entstanden sind, stimmen die Ergebnisse beider Lösungswege überein. Der Aufwand ist ähnlich. Wer welche Lösungsmethode bevorzugt, ist daher Geschmackssache.

3.5 Übungsaufgaben zu Schaltnetzen

Musterlösungen zu den Übungsfragen sind hier zu finden:

<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/wechsel.pdf>

3.5.1 Aufgabe 1

Nebenstehende Schaltung ist an eine Wechselspannung von $U = 100\text{V}$ mit $\omega = 100\text{s}^{-1}$ angeschlossen.

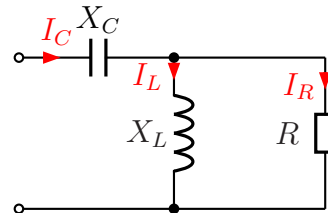
Die Bauteilwerte sind:

$$C = 500\ \mu\text{F}$$

$$L = 250\ \text{mH}$$

$$R = 50\ \Omega$$

Gesucht sind die Ströme I_C im Kondensator, I_L in der Spule und I_R im ohmschen Widerstand.



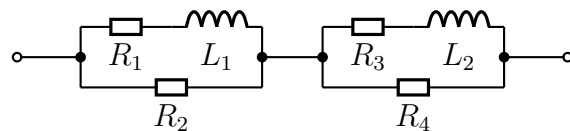
3.5.2 Aufgabe 2

Gegeben ist nebenstehende Schaltung.

Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung sowie seinen Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ . Folgende Werte sind bekannt:

$$R_1 = 100\ \Omega \quad R_2 = 200\ \Omega \quad R_3 = 200\ \Omega$$

$$R_4 = 100\ \Omega \quad L_1 = 0,1\ \text{H} \quad L_2 = 0,1\ \text{H} \quad \omega = 1000\ \text{s}^{-1}$$



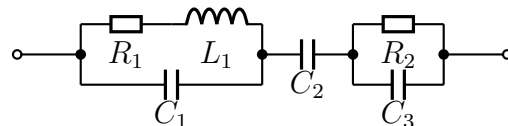
3.5.3 Aufgabe 3

Gegeben ist nebenstehende Schaltung.

Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung sowie seinen Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ . Folgende Werte sind bekannt:

$$R_1 = 100\ \Omega \quad R_2 = 200\ \Omega \quad L_1 = 200\ \text{mH} \quad C_1 = 2\ \mu\text{F} \quad C_2 = 10\ \mu\text{F} \quad C_3 = 2\ \mu\text{F}$$

$$\omega = 1000\ \text{s}^{-1}$$



3.5.4 Aufgabe 4

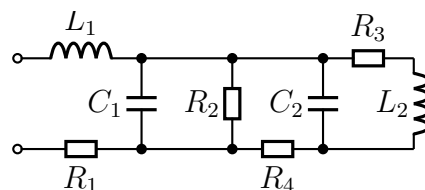
Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen

Sie den Komplexen Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung! Bekannt sind folgende Werte:

$$\omega = 100\ \text{s}^{-1} \quad L_1 = 0,5\ \text{H} \quad L_2 = 1\ \text{H}$$

$$C_1 = 500\ \mu\text{F} \quad C_2 = 100\ \mu\text{F} \quad R_1 = 20\ \Omega$$

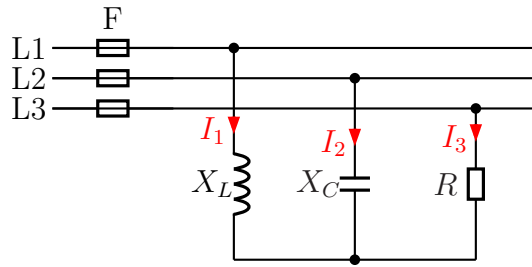
$$R_2 = 50\ \Omega \quad R_3 = 50\ \Omega \quad R_4 = 30\ \Omega$$



3.5.5 Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Ströme I_1 , I_2 und I_3 in den Außenleitern des nebenstehend dargestellten Dreiphasenwechselstromnetzes mit $U_L = 400\text{V}$! Stellen Sie dazu ein Lineargleichungssystem für die drei komplexen Ströme \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und \underline{I}_3 auf und lösen Sie das Gleichungssystem. Berechnen Sie anschließend die gesuchten Beträge der Ströme I_1 , I_2 und I_3 . Bekannt sind die Werte:

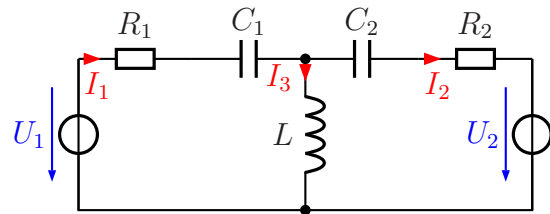
$$X_L = 100\ \Omega; \quad X_C = 200\ \Omega; \quad R = 50\ \Omega$$



3.5.6 Aufgabe 6

Die Ströme in nebenstehende Schaltung können durch ein Lineargleichungssystem beschrieben werden. Stellen Sie das Gleichungssystem auf und berechnen Sie die komplexen Ströme \underline{I}_1 , \underline{I}_2 und \underline{I}_3 . Bekannt sind die Werte:

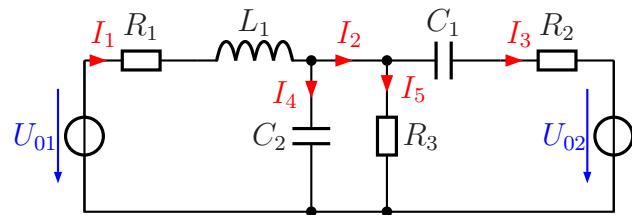
$$\begin{aligned} R_1 &= 1\ \text{k}\Omega; & X_{C1} &= 3\ \text{k}\Omega \\ R_2 &= 2\ \text{k}\Omega; & X_{C2} &= 4\ \text{k}\Omega \\ X_L &= 2\ \text{k}\Omega; & \underline{U}_1 &= j4\ \text{V}; & \underline{U}_2 &= 4\ \text{V} \end{aligned}$$



3.5.7 Aufgabe 7

Nebenstehende Schaltung ist an zwei Spannungsquellen U_{01} und U_{02} mit einer Spannung von je $60\ \text{V}$ angeschlossen. Die Phasenverschiebung zwischen diesen beiden Spannungen beträgt 0° . Berechnen Sie die komplexen Ströme \underline{I}_1 bis \underline{I}_5 . Bekannt sind diese Werte:

$$\begin{aligned} R_1 &= 6\ \Omega; & R_2 &= 3\ \Omega; & R_3 &= 10\ \Omega; \\ X_{C1} &= 6\ \Omega & X_{C2} &= 15\ \Omega & X_{L1} &= 12\ \Omega \end{aligned}$$



4 Kompensation

4.1 Berechnung der Kompensation

Manchmal hat man eine Schaltung (beispielsweise eine Industrieanlage mit Motoren), die insgesamt einen Scheinwiderstand mit (meist) induktivem oder auch kapazitiven Anteil darstellt. Möchte man diese ans Wechselspannungsnetz anschließen, dann kann es sinnvoll sein, das so zu tun, dass die Schaltung für die Spannungsquelle als reiner Wirkwiderstand erscheint. Industriebetriebe müssen beispielsweise auch für Blindleistung zahlen, wenn sie vom EVU einen günstigen Tarif bekommen möchten. Baut man einen passenden Blindwiderstand – meist einen Kondensator – ein, der den Blindleistungsanteil ausgleicht, so spricht man von **Kompensation**. Die Gesamtschaltung stellt dann einen reinen Wirkwiderstand dar.

Theoretisch sind mehrere Schaltungsmöglichkeiten gegeben, in der Praxis wird jedoch in der Regel immer ein Kondensator parallel zur Last ans Netz – also an die Spannungsquelle – angeschlossen. Dies hat zwei Vorteile:

- Am komplexen Lastwiderstand liegt weiterhin genau die Netzspannung an.
- Die Kapazität ist relativ einfach zu berechnen.

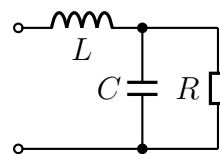
Ein parallelgeschalteter Kondensator kann jedoch andere Probleme verursachen und ist damit manchmal unerwünscht. Beispielsweise wird der Betrieb von Rundsteueranlagen beeinträchtigt, weil die höherfrequenten Steuersignale durch den Kondensator mehr oder weniger kurzgeschlossen werden.

Aus diesen Gründen und auch, weil ich in diesem Skript die Grundlagen breit darstellen möchte, werde ich hier an verschiedenartigen Schaltungen die Berechnung einer Kompensation vorstellen.

Es gibt grundsätzlich zwei verschiedene Methoden für die Berechnung. Diese möchte ich nacheinander an der nebenstehenden Beispielschaltung vorführen.

Gegeben sind diese Werte:

$$R = 10 \text{ k}\Omega, L = 50 \text{ H}, \omega = 100 \text{ s}^{-1}$$



Gesucht ist die Kapazität C für Kompensation.

Lösung: Der Anfang des Lösungsweges ist für beide Lösungsmethoden gleich. Zunächst muss der induktive Blindwiderstand \underline{X}_L berechnet werden.

$$\underline{X}_L = j\omega L = j \cdot 100 \text{ s}^{-1} \cdot 50 \text{ H} = j5 \text{ k}\Omega$$

Anschließend bekommt der kapazitive Blindwiderstand einen Namen. Seinen Betrag nenne ich der Einfachheit halber X . Damit erhalte ich für den komplexen kapazitiven Blindwiderstand:

$$\underline{X}_C = -jX$$

Nun wird der komplexe Ersatzwiderstand der Parallelschaltung $R \parallel C$ bestimmt. Ich nenne ihn \underline{Z}_{RC} .

$$\underline{Z}_{RC} = \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_C}{\underline{R} + \underline{X}_C} = \frac{10 \text{ k}\Omega \cdot (-jX)}{10 \text{ k}\Omega - jX} = \frac{-j10 \text{ k}\Omega X}{10 \text{ k}\Omega - jX}$$

Zu \underline{Z}_{RC} ist L in Reihe geschaltet. Damit kann der komplexe Gesamt-Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung bestimmt werden.

$$\underline{Z} = \underline{X}_L + \underline{Z}_{RC} = j5 \text{ k}\Omega + \frac{-j10 \text{ k}\Omega X}{10 \text{ k}\Omega - jX}$$

Ab hier teilen sich nun die beiden Lösungswege.

4.1.1 Berechnung durch Nullsetzen des Imaginärteils

Die Lösungsidee ist die folgende: Man spaltet \underline{Z} auf in seinen Real- und seinen Imaginärteil. Dann setzt man den Imaginärteil gleich 0 und erhält eine Gleichung, die nach X aufgelöst werden kann.

Um \underline{Z} aufspalten zu können muss zunächst der Nenner des Bruches reell werden. Das geschieht durch *Konjugiert Komplexes Erweitern*.

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= j5 \text{ k}\Omega + \frac{-j10 \text{ k}\Omega X}{10 \text{ k}\Omega - jX} \\ &= j5 \text{ k}\Omega + \frac{-j10 \text{ k}\Omega X \cdot (10 \text{ k}\Omega - jX)}{(10 \text{ k}\Omega - jX) \cdot (10 \text{ k}\Omega - jX)} \\ &= j5 \text{ k}\Omega + \frac{-j100 \text{ k}\Omega^2 X + 10 \text{ k}\Omega X^2}{100 \text{ k}\Omega^2 + X^2} \\ &= j5 \text{ k}\Omega - j \frac{100 \text{ k}\Omega^2 X}{100 \text{ k}\Omega^2 + X^2} + \frac{10 \text{ k}\Omega X^2}{100 \text{ k}\Omega^2 + X^2} \\ &= \frac{10 \text{ k}\Omega X^2}{100 \text{ k}\Omega^2 + X^2} + j \left(5 \text{ k}\Omega - \frac{100 \text{ k}\Omega^2 X}{100 \text{ k}\Omega^2 + X^2} \right) \end{aligned}$$

Der erste Bruch stellt den Realteil und der Term in den Klammern hinter dem j den Imaginärteil von \underline{Z} dar. Bei Kompensation muss der Imaginärteil Null sein. Deshalb

können wir ihn =0 setzen. Wir erhalten dann eine Quadratische Gleichung, die mit der p - q -Formel gelöst werden kann.

$$\begin{aligned}
 5 \text{ k}\Omega - \frac{100 \text{ k}\Omega^2 X}{100 \text{ k}\Omega^2 + X^2} &= 0 && | \cdot (100 \text{ k}\Omega^2 + X^2) \\
 500 \text{ k}\Omega^3 + 5 \text{ k}\Omega X^2 - 100 \text{ k}\Omega^2 X &= 0 && | : 5 \text{ k}\Omega \\
 100 \text{ k}\Omega^2 + X^2 - 20 \text{ k}\Omega X &= 0 \\
 X^2 - 20 \text{ k}\Omega X + 100 \text{ k}\Omega^2 &= 0 \\
 X_{1/2} &= 10 \text{ k}\Omega \pm \sqrt{100 \text{ k}\Omega^2 - 100 \text{ k}\Omega^2} \\
 X &= 10 \text{ k}\Omega
 \end{aligned}$$

Wenn zusätzlich auch der Ersatzwiderstand \underline{Z} der Schaltung gesucht wird, dann ist dieser identisch mit dem Realteil bei der Zerlegung. Der Imaginärteil ist ja Null.

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= \frac{10 \text{ k}\Omega X^2}{100 \text{ k}\Omega^2 + X^2} \\
 &= \frac{10 \text{ k}\Omega \cdot (10 \text{ k}\Omega)^2}{100 \text{ k}\Omega^2 + (10 \text{ k}\Omega)^2} \\
 &= \frac{1\,000 \text{ k}\Omega^3}{200 \text{ k}\Omega^2} \\
 \underline{Z} &= 5 \text{ k}\Omega
 \end{aligned}$$

4.1.2 Berechnung durch Aufspaltung in Komponentengleichungen

An dieser Stelle hatten sich die beiden Lösungswege getrennt:

$$\underline{Z} = j5 \text{ k}\Omega + \frac{-j10 \text{ k}\Omega X}{10 \text{ k}\Omega - jX}$$

Die Idee für den zweiten Lösungsweg ist simpel, aber gleichzeitig doch genial. Weil \underline{Z} eine **reelle** Größe werden soll (der Imaginärteil soll ja Null sein) kann man ersetzen:

$$\underline{Z} = Z$$

Wir erhalten damit:

$$Z = j5 \text{ k}\Omega + \frac{-j10 \text{ k}\Omega X}{10 \text{ k}\Omega - jX}$$

Vielleicht muss man genau hinsehen, aber es wurde einfach nur der Unterstrich weglassen. Das geht nur deshalb, weil Z eine reelle Größe ist. Man formt nun diese Gleichung in eine Lineare Gleichung um, die dann in eine Realteilgleichung und eine Imaginärteilgleichung aufgespalten werden kann. Das sieht dann etwa so aus:

$$\begin{aligned}
 Z &= j5 \text{ k}\Omega + \frac{-j10 \text{ k}\Omega X}{10 \text{ k}\Omega - jX} && | \cdot (10 \text{ k}\Omega - jX) \\
 Z \cdot (10 \text{ k}\Omega - jX) &= j5 \text{ k}\Omega \cdot (10 \text{ k}\Omega - jX) - j10 \text{ k}\Omega X \\
 10 \text{ k}\Omega Z - jXZ &= j50 \text{ k}\Omega^2 - j^2 5 \text{ k}\Omega X - j10 \text{ k}\Omega X \\
 10 \text{ k}\Omega Z - jXZ &= j50 \text{ k}\Omega^2 + 5 \text{ k}\Omega X - j10 \text{ k}\Omega X
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nun in zwei Gleichungen aufgespalten werden, von denen eine nur die Realteile und die andere nur die Imaginärteile enthält.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Re: } 10 \text{ k}\Omega Z = 5 \text{ k}\Omega X \\ \text{Im: } -XZ = 50 \text{ k}\Omega^2 - 10 \text{ k}\Omega X \end{array}}$$

Wir haben damit ein Gleichungssystem 2. Ordnung erhalten, zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Da es kein **Linear**gleichungssystem ist, entfallen einige Lösungsverfahren. Das Einsetzungsverfahren lässt sich aber anwenden. Dazu kann man beispielsweise die Realteilgleichung nach Z umstellen und das Ergebnis in die Imaginärteilgleichung einsetzen.

$$\begin{aligned} 10 \text{ k}\Omega Z &= 5 \text{ k}\Omega X \quad | : 10 \text{ k}\Omega \\ Z &= \frac{X}{2} \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Imaginärteilgleichung:

$$\begin{aligned} -XZ &= 50 \text{ k}\Omega^2 - 10 \text{ k}\Omega X \\ -X \cdot \frac{X}{2} &= 50 \text{ k}\Omega^2 - 10 \text{ k}\Omega X && | \cdot 2 \\ -X^2 &= 100 \text{ k}\Omega^2 - 20 \text{ k}\Omega X && | + X^2 \\ 0 &= X^2 - 20 \text{ k}\Omega X + 100 \text{ k}\Omega^2 \\ X_{1/2} &= 10 \text{ k}\Omega \pm \sqrt{100 \text{ k}\Omega^2 - 100 \text{ k}\Omega^2} \\ X &= 10 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von Z wird der gefundene Wert für X in die umgestellte Realteilgleichung eingesetzt.

$$Z = \frac{X}{2} = \frac{10 \text{ k}\Omega}{2} = 5 \text{ k}\Omega$$

Die Ergebnisse sind natürlich identisch mit dem aus dem ersten Verfahren. Welches Verfahren einfacher ist, mag jeder für sich selbst entscheiden.

4.2 Übungsaufgaben zur Kompensation

Musterlösungen zu den Übungsfragen sind hier zu finden:

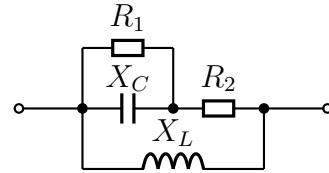
<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/wechsel.pdf>

4.2.1 Aufgabe 1

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand R_2 so, dass der Gesamtwiderstand Z der Schaltung reell wird! Folgende Werte sind bekannt:

$$X_C = 2 \Omega \quad X_L = 8 \Omega \quad R_1 = 4 \Omega$$

Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand Z der Schaltung?

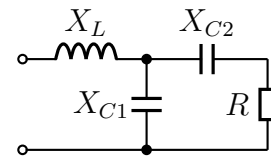


4.2.2 Aufgabe 2

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand X_{C2} so, dass der Gesamtwiderstand Z der Schaltung reell wird! Bekannt sind die Werte:

$$X_{C1} = 50 \Omega \quad X_L = 12,5 \Omega \quad R_1 = 20 \Omega.$$

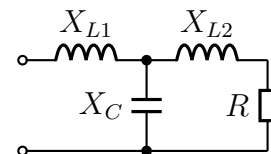
Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand Z der Schaltung?



4.2.3 Aufgabe 3

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie die Widerstände X_{L1} und X_C so, dass der Gesamtwiderstand Z der Schaltung gleich 10Ω reell wird!

Bekannt sind die Werte $X_{L2} = 8 \Omega$ und $R = 16 \Omega$.

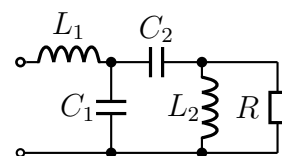


4.2.4 Aufgabe 4

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie die Kapazität C_2 so, dass bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 1000 \text{ s}^{-1}$ der Ersatzwiderstand Z der Schaltung rein reell wird! Bekannt sind folgende Werte:

$$L_1 = 4 \text{ H} \quad L_2 = 25 \text{ H} \quad R = 50 \text{ k}\Omega \quad C_1 = 200 \text{ nF}$$

Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand Z ?



4.2.5 Aufgabe 5

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand R so, dass die gesamte Schaltung einen rein reellen Ersatzwiderstand hat! Berechnen Sie auch, wie groß dieser Ersatzwiderstand dann wird!

Gegeben sind folgende Werte:

$$X_{L1} = 30 \Omega \quad X_{L2} = 36 \Omega \quad X_{C1} = 300 \Omega \quad X_{C2} = 45 \Omega$$

