Musterlösungen zu Grundlagen der Wechselstromtechnik

W. Kippels

29. November 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Grundgrößen der Wechselstromtechnik

Die nachfolgenden Musterlösungen gehören zu den Aufgaben, die in diesem Lehrgang zu finden sind:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/wechsels.pdf

1.1 Übungsfragen zu Grundgrößen der Wechselstromtechnik

1.1.1 Frage 1:

Die Netz-Wechselspannung hat eine Frequenz von $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Bestimmen Sie:

1. die Periodendauer
2. die Kreisfrequenz

Lösung 1:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50\,\mathrm{Hz}} = \frac{1}{50\,\mathrm{s}^{-1}} = \frac{1\,\mathrm{s}}{50} = 20\,\mathrm{ms}$$

Lösung 2:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 50\,\mathrm{Hz} \approx 314\,\mathrm{s}^{-1}$$

1.1.2 Frage 2:

Die Netz-Wechselspannung hat einen Effektivwert von $U_{RMS} = 230\,\mathrm{V}$. Wie groß ist der Scheitelwert U_p?

Lösung:

$$U_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_p \quad \Rightarrow \quad U_p = \sqrt{2} \cdot U_{RMS} = \sqrt{2} \cdot 230\,\mathrm{V} \approx 325\,\mathrm{V}$$

1.1.3 Frage 3:

Eine Wechselspannung hat einen Effektivwert von $U_{RMS} = 10\,\mathrm{V}$. Wie groß ist der Mittelwert U_M?

Lösung:

$$\begin{aligned}
U_{RMS} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_p & \qquad | \cdot \sqrt{2} \\
\sqrt{2} \cdot U_{RMS} &= U_p \\
U_p &= \sqrt{2} \cdot U_{RMS} \\
U_M &= \frac{2}{\pi} \cdot U_p \\
U_M &= \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot U_{RMS} \\
U_M &= \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot 10\,\mathrm{V} \\
U_M &\approx 9,00\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

1.1.4 Frage 4:

Mit Hilfe eines Oszilloskopes wird der Spitze-Spitze-Wert einer sinusförmigen Wechselspannung mit $U_{pp} = 30\,\mathrm{V}$ gemessen. Wie groß ist der Effektivwert U_{RMS} der Spannung?

Lösung:

$$U_{pp} = 2 \cdot U_p \quad \Rightarrow \quad U_p = \frac{1}{2} \cdot U_{pp}$$

$$U_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot U_{pp} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 30\,\mathrm{V} \approx 10,6\,\mathrm{V}$$

1.1.5 Frage 5:

Mit Hilfe eines Oszilloskopes wird die Periodendauer einer sinusförmigen Wechselspannung mit $T = 200\,\mu\mathrm{s}$ gemessen. Wie groß ist die Frequenz f der Spannung?

Lösung:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{200\,\mu\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{kHz}$$

2 Wechselstromwiderstände

2.1 Übungsfragen zu Wechselstromwiderständen

2.1.1 Frage 1:

Ergänzen Sie den Satz:
Der Strom in einer Induktivität eilt der Spannung in der Phase um *90° nach*.

2.1.2 Frage 2:

Ergänzen Sie den Satz:
Je größer die Frequenz ist, desto *größer* ist der Wechselstromwiderstand einer Induktivität.

2.1.3 Frage 3:

Ergänzen Sie den Satz:
Der Strom in einer Kapazität eilt der Spannung in der Phase um *90° voraus*.

2.1.4 Frage 4:

Ergänzen Sie den Satz:
Je größer die Frequenz ist, desto *kleiner* ist der Wechselstromwiderstand einer Kapazität.

2.1.5 Frage 5:

Wie groß ist der Strom I in einer Induktivität mit $L = 10\,\mathrm{H}$, die an eine Wechselspannung von $U = 12\,\mathrm{V}$ mit einer Frequenz von $f = 50\,\mathrm{Hz}$ angeschlossen ist? Wie groß ist der Komplexe Strom $\underline{I}$, wenn die Spannung $\underline{U}$ als Reele Spannung vorausgesetzt ist?

Lösung:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 50\,\mathrm{Hz} = 314\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$X_L = \omega L = 314\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 10\,\mathrm{H} = 3{,}14\,\mathrm{k\Omega}$$

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{12\,\mathrm{V}}{3{,}14\,\mathrm{k\Omega}} = 3{,}82\,\mathrm{mA}$$

$$\underline{\mathrm{I}} = -jI = -j3{,}82\,\mathrm{mA}$$

2.1.6 Frage 6:

Bei welcher Frequenz f hat ein Kondensator mit einer Kapazität von $C = 1\,\mu\text{F}$ einen Wechselstromwiderstand von $X_C = 318\,\Omega$?

Lösung:

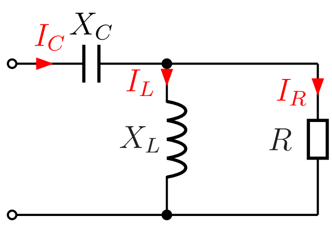
$$\begin{aligned}
X_C &= \frac{1}{\omega \cdot C} \\
X_C &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} && \left| \cdot \frac{f}{X_C} \right. \\
f &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot C \cdot X_C} \\
f &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 1\,\mu\text{F} \cdot 318\,\Omega} \\
f &= 500\,\text{Hz}
\end{aligned}$$

3 Schaltnetze

3.1 Übungsaufgaben zu Schaltnetzen

3.1.1 Aufgabe 1

Nebenstehende Schaltung ist an eine Wechselspannung von $U = 100V$ mit $\omega = 100\,\mathrm{s}^{-1}$ angschlossen. Die Bauteilwerte sind:
$C = 500\,\mu\mathrm{F}$
$L = 250\,\mathrm{mH}$
$R = 50\,\Omega$
Gesucht sind die Ströme I_C im Kondensator, I_L in der Spule und I_R im ohmschen Widerstand.



Lösung: Zunächst werden die Blindwiderstände von C und L bestimmt.

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{100\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 500\,\mu\mathrm{F}} = 20\,\Omega$$

$$X_L = \omega \cdot L = 100\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 250\,\mathrm{mH} = 25\,\Omega$$

Nun stelle ich die verschiedenen angegebenen Größen im komplexer Form dar:

$$\begin{array}{rcccrcl}
X_C & = & 20\,\Omega & \Rightarrow & \underline{X}_C & = & -j20\,\Omega \\
X_L & = & 25\,\Omega & \Rightarrow & \underline{X}_L & = & j25\,\Omega \\
R & = & 50\,\Omega & \Rightarrow & \underline{R} & = & 50\,\Omega \\
U & = & 100\,\mathrm{V} & \Rightarrow & \underline{U} & = & 100\,\mathrm{V}
\end{array}$$

Ich fasse X_L und R zum Ersatzwiderstand Z_1 zusammen.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_1 &= \frac{\underline{X}_L \cdot \underline{R}}{\underline{X}_L + \underline{R}} \\
&= \frac{j25\,\Omega \cdot 50\,\Omega}{j25\,\Omega + 50\,\Omega} \\
&= \frac{j1250\,\Omega^2}{50\,\Omega + j25\,\Omega} \\
&= \frac{(j1250\,\Omega^2)(50\,\Omega - j25\,\Omega)}{(50\,\Omega + j25\,\Omega)(50\,\Omega - j25\,\Omega)} \\
&= \frac{j62500\,\Omega^3 + 31250\,\Omega^3}{2500\,\Omega^2 + 625\,\Omega^2} \\
&= \frac{31250\,\Omega^3 + j62500\,\Omega^3}{3125\,\Omega^2} \\
\underline{Z}_1 &= 10\,\Omega + j20\,\Omega
\end{aligned}$$

In Reihe zu Z_1 ist X_C geschaltet. Ich erhalte den Gesamt-Ersatzwiderstand der Schaltung:

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \underline{X}_C + \underline{Z}_1 \\
&= -j20\,\Omega + 10\,\Omega + j20\,\Omega \\
\underline{Z} &= 10\,\Omega
\end{aligned}$$

Als nächstes bestimme ich den Gesamtstrom, der durch Z fließt. Da dies zugleich der Strom im Kondensator ist, nenne ich ihn I_C.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_C &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \\
&= \frac{100\,\mathrm{V}}{10\,\Omega} \\
\underline{I}_C &= 10\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Mit diesem Strom kann ich die Spannung an der Spule und dem Widerstand berechnen. Er fließt durch den Ersatzwiderstand Z_1. Ich nenne die Spannung deshalb U_1.

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_C \\
&= (10\,\Omega + j20\,\Omega) \cdot 10\,\mathrm{A} \\
\underline{U}_1 &= 100\,\mathrm{V} + j200\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Spannung kann ich den Strom I_L in der Spule berechnen.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{X}_L} \\
&= \frac{100\,\mathrm{V} + j200\,\mathrm{V}}{j25\,\Omega} \qquad |\ \text{erweitern mit } j \\
&= \frac{j100\,\mathrm{V} - 200\,\mathrm{V}}{-25\,\Omega} \\
\underline{I}_L &= 8\,\mathrm{A} - j4\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Ebenso geht es mit dem Strom I_R im Widerstand.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{R}} \\
&= \frac{100\,\mathrm{V} + j200\,\mathrm{V}}{50\,\Omega} \\
\underline{I}_R &= 2\,\mathrm{A} + j4\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Gesucht sind aber nicht die komplexen Ströme $\underline{\mathrm{I}}_R$, $\underline{\mathrm{I}}_C$ und $\underline{\mathrm{I}}_L$, sondern deren Beträge I_R, I_C und I_L. Diese können wir mit der Wurzelformel $|\underline{\mathrm{z}}| = z = \sqrt{(\mathrm{Re}\underline{\mathrm{z}})^2 + (\mathrm{Im}\underline{\mathrm{z}})^2}$ berechnen.

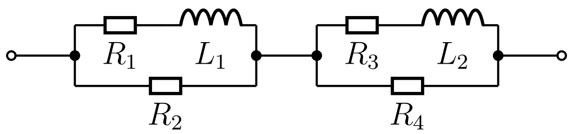
$$I_R = \sqrt{(2\,\mathrm{A})^2 + (4\,\mathrm{A})^2} \approx 4,472\,\mathrm{A}$$

$$I_C = \sqrt{(10\,\mathrm{A})^2} = 10\,\mathrm{A}$$

$$I_L = \sqrt{(8\,\mathrm{A})^2 + (-4\,\mathrm{A})^2} \approx 8,944\,\mathrm{A}$$

3.1.2 Aufgabe 2

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung sowie seinen Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ. Folgende Werte sind bekannt:



$R_1 = 100\,\Omega \quad R_2 = 200\,\Omega \quad R_3 = 200\,\Omega$
$R_4 = 100\,\Omega \quad L_1 = 0,1\,\mathrm{H} \quad L_2 = 0,1\,\mathrm{H} \quad \omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$

Lösung: Wir bestimmen zunächst aus den gegebenen Daten die komplexen Wirk- und Blindwiderstände.

$$\begin{aligned}
R_1 = 100\,\Omega &\Rightarrow \underline{R}_1 = 100\,\Omega \\
R_2 = 200\,\Omega &\Rightarrow \underline{R}_2 = 200\,\Omega \\
R_3 = 200\,\Omega &\Rightarrow \underline{R}_3 = 200\,\Omega \\
R_4 = 100\,\Omega &\Rightarrow \underline{R}_4 = 100\,\Omega \\
X_{L1} = 1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0,1\,\mathrm{H} = 100\,\Omega &\Rightarrow \underline{X}_{L1} = j100\,\Omega \\
X_{L2} = 1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0,1\,\mathrm{H} = 100\,\Omega &\Rightarrow \underline{X}_{L2} = j100\,\Omega
\end{aligned}$$

Ich fasse R_1 und X_{L1} mit der Formel für die Reihenschaltung als Z_1 zusammen.

$$\underline{Z}_1 = \underline{R}_1 + \underline{X}_{L1} = 100\,\Omega + j100\,\Omega$$

Ich fasse Z_1 mit R_2 zu Z_2 zusammen. Dazu verwende ich die Formel für die Parallelschaltung.

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{R}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{R}_2} = \frac{(100\,\Omega + j100\,\Omega) \cdot 200\,\Omega}{100\,\Omega + j100\,\Omega + 200\,\Omega} = \frac{20000\,\Omega^2 + j20000\,\Omega^2}{300\,\Omega + j100\,\Omega}$$

Damit die Zahlen und die Einheiten nicht so groß werden, klammere ich im Zähler und im Nenner $100\,\Omega$ aus und kürze dadurch.

$$\underline{Z}_2 = \frac{100\,\Omega \cdot (200\,\Omega + j200\,\Omega)}{100\,\Omega \cdot (3 + j1)} = \frac{200\,\Omega + j200\,\Omega}{3 + j1}$$

Das muss ich jetzt aufteilen können in Real- und Imaginärteil. Dazu muss ich den Bruch **Konjugiert Komplex erweitern**.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_2 &= \frac{200\,\Omega + j200\,\Omega}{3 + j1} \cdot \frac{3 - j1}{3 - j1} = \frac{600\,\Omega - j200\,\Omega + j600\,\Omega + 200\,\Omega}{3^2 + 1^2} = \frac{800\,\Omega + j400\,\Omega}{10} \\
\underline{Z}_2 &= 80\,\Omega + j40\,\Omega
\end{aligned}$$

Ähnlich müssen wir auch die rechte Teilschaltung zusammenfassen. Die Reihenschaltung aus R_3 und X_{L2} bekommt den Namen Z_3. Die Parallelschaltung von Z_3 mit R_4 nenne ich dann Z_4.

$$
\begin{aligned}
\underline{Z}_3 &= \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2} = 200\,\Omega + j100\,\Omega \\
\underline{Z}_4 &= \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{R}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{R}_4} = \frac{(200\,\Omega + j100\,\Omega) \cdot 100\,\Omega}{200\,\Omega + j100\,\Omega + 100\,\Omega} = \frac{20000\,\Omega^2 + j10000\,\Omega^2}{300\,\Omega + j100\,\Omega} \\
&= \frac{100\,\Omega \cdot (200\,\Omega + j100\,\Omega)}{100\,\Omega \cdot (3 + j1)} = \frac{200\,\Omega + j100\,\Omega}{3 + j1} \\
&= \frac{(200\,\Omega + j100\,\Omega) \cdot (3 - j1)}{(3 + j1) \cdot (3 - j1)} = \frac{600\,\Omega - j200\,\Omega + j300\,\Omega + 100\,\Omega}{3^2 + 1^2} = \frac{700\,\Omega + j100\,\Omega}{10} \\
\underline{Z}_4 &= 70\,\Omega + j10\,\Omega
\end{aligned}
$$

Um den Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ zu bestimmen, muss ich nun noch $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_4$ addieren.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 = 80\,\Omega + j40\,\Omega + 70\,\Omega + j10\,\Omega = 150\,\Omega + j50\,\Omega$$

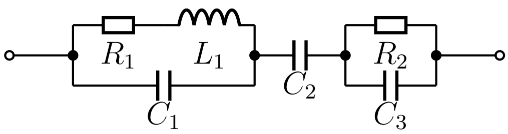
Mit den entsprechenden Formeln kann ich dann den Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ von $\underline{Z}$ berechnen.

$$
\begin{aligned}
Z &= \sqrt{(\mathrm{Re}\underline{Z})^2 + (\mathrm{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(150\,\Omega)^2 + (50\,\Omega)^2} \approx 158\,\Omega \\
\varphi &= \arctan\frac{\mathrm{Im}\underline{Z}}{\mathrm{Re}\underline{Z}} = \arctan\frac{50\,\Omega}{150\,\Omega} \approx 18,43^\circ
\end{aligned}
$$

$$\boxed{Z \approx 158\,\Omega} \qquad \boxed{\varphi \approx 18,43^\circ}$$

3.1.3 Aufgabe 3

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Berechnen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung sowie seinen Betrag Z und den Phasenverschiebungswinkel φ. Folgende Werte sind bekannt:



$R_1 = 100\,\Omega$ $R_2 = 200\,\Omega$ $L_1 = 200\,\mathrm{mH}$ $C_1 = 2\,\mu\mathrm{F}$ $C_2 = 10\,\mu\mathrm{F}$ $C_3 = 2\,\mu\mathrm{F}$
$\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$

Lösung: Wie schon bei Aufgabe 2 bestimmen wir zunächst aus den gegebenen Daten die komplexen Wirk- und Blindwiderstände.

$$\begin{aligned}
R_1 = 100\,\Omega &\Rightarrow \underline{R}_1 = 100\,\Omega \\
R_2 = 200\,\Omega &\Rightarrow \underline{R}_2 = 200\,\Omega \\
X_L = \omega \cdot L = 1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 200\,\mathrm{mH} = 200\,\Omega &\Rightarrow \underline{X}_L = j200\,\Omega \\
X_{C1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 2\,\mu\mathrm{F}} = 500\,\Omega &\Rightarrow \underline{X}_{C1} = -j500\,\Omega \\
X_{C2} = \frac{1}{\omega \cdot C_2} = \frac{1}{1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 10\,\mu\mathrm{F}} = 100\,\Omega &\Rightarrow \underline{X}_{C2} = -j100\,\Omega \\
X_{C3} = \frac{1}{\omega \cdot C_3} = \frac{1}{1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 2\,\mu\mathrm{F}} = 500\,\Omega &\Rightarrow \underline{X}_{C3} = -j500\,\Omega
\end{aligned}$$

Als nächstes werden R_1 und X_L mit Hilfe der Formel für die Reihenschaltung zu Z_1 zusammengefasst.

$$\underline{Z}_1 = \underline{R}_1 + \underline{X}_{L1} = 100\,\Omega + j200\,\Omega$$

Nun kann man mit Hilfe der Formel für die Parallelschaltung Z_1 und X_{C1} zu Z_2 zusammengefasst werden. Nachdem die Werte eingesetzt und zusamengefasst sind, wird ausgeklammert, gekürzt und Konjugiert Komplex erweitert, um $\underline{Z}_2$ in Realteil und Imaginärteil aufspalten zu können.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_{C1}}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_{C1}} = \frac{(100\,\Omega + j200\,\Omega) \cdot (-j500\,\Omega)}{100\,\Omega + j200\,\Omega + (-j500\,\Omega)} = \frac{-j50000\,\Omega^2 + 100000\,\Omega^2}{100\,\Omega - j300\,\Omega} \\
&= \frac{100\,\Omega \cdot (-j500\,\Omega + 1000\,\Omega)}{100\,\Omega \cdot (1 - j3)} = \frac{-j500\,\Omega + 1000\,\Omega}{1 - j3} = \frac{(-j500\,\Omega + 1000\,\Omega) \cdot (1 + j3)}{(1 - j3) \cdot (1 + j3)} \\
&= \frac{-j500\,\Omega + 1500\,\Omega + 1000\,\Omega + j3000\,\Omega}{1^2 + 3^2} = \frac{2500\,\Omega + j2500\,\Omega}{10} = 250\,\Omega + j250\,\Omega
\end{aligned}$$

Die Parallelschaltung aus R_2 und X_{C3} nenne ich Z_3 und berechne sie mit der Parallelschaltungsformel. Anschließend wird wieder zusammengefasst, ausgeklammert, gekürzt und Konjugiert Komplex erweitert.

$$
\begin{aligned}
\underline{Z}_3 &= \frac{\underline{R}_2 \cdot \underline{X}_{C3}}{\underline{R}_2 + \underline{X}_{C3}} = \frac{200\,\Omega \cdot (-j500\,\Omega)}{200\,\Omega + (-j500\,\Omega)} = \frac{-j100000\,\Omega^2}{200\,\Omega - j500\,\Omega} = \frac{100\,\Omega \cdot (-j1000\,\Omega)}{100\,\Omega \cdot (2-j5)} \\
&= \frac{-j1000\,\Omega}{2-j5} = \frac{(-j1000\,\Omega)\cdot(2+j5)}{(2-j5)\cdot(2+j5)} = \frac{-j2000\,\Omega + 5000\,\Omega}{2^2+5^2} = \frac{-j2000\,\Omega + 5000\,\Omega}{29} \\
&\approx -j68,97\,\Omega + 172,41\,\Omega
\end{aligned}
$$

Die drei Widerstände Z_2, X_{C2} und Z_3 sind in Reihe geschaltet. Ich kann also den Gesamt-Scheinwiderstand Z mit der Reihenschaltungsformel berechnen und zusammenfassen.

$$
\underline{Z} = \underline{Z}_2 + \underline{X}_{C2} + \underline{Z}_3 = 250\,\Omega + j250\,\Omega - j100\,\Omega - j68,97\,\Omega + 172,41\,\Omega = 422,41\,\Omega + j81,03\,\Omega
$$

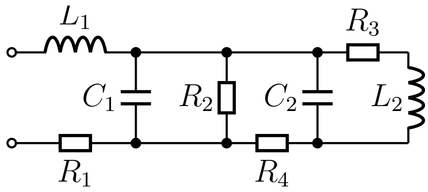
Der Betrag und der Phasenwinkel dieses Widerstandes kann wieder mit Hilfe der Grundformeln berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
Z &= \sqrt{(\mathrm{Re}\underline{Z})^2 + (\mathrm{Im}\underline{Z})^2} = \sqrt{(422,41\,\Omega)^2 + (81,03\,\Omega)^2} \approx 430,11\,\Omega \\
\varphi &= \arctan\frac{\mathrm{Im}\underline{Z}}{\mathrm{Re}\underline{Z}} = \arctan\frac{81,03\,\Omega}{422,41\,\Omega} \approx 10,86^\circ
\end{aligned}
$$

$\boxed{Z \approx 430,11\,\Omega}$ $\boxed{\varphi \approx 10,86^\circ}$

3.1.4 Aufgabe 4

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Komplexen Ersatzwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung! Bekannt sind folgende Werte:
$\omega = 100\,\mathrm{s}^{-1}$ $\quad L_1 = 0,5\,\mathrm{H}$ $\quad L_2 = 1\,\mathrm{H}$
$C_1 = 500\,\mu\mathrm{F}$ $\quad C_2 = 100\,\mu\mathrm{F}$ $\quad R_1 = 20\,\Omega$
$R_2 = 50\,\Omega$ $\quad R_3 = 50\,\Omega$ $\quad R_4 = 30\,\Omega$



Lösung: Zur Lösung bestimme ich zunächst die entsprechenden Blindwiderstände aus der Kreisfrequenz und den L- und C-Werten.

$$X_{L1} = \omega \cdot L_1 = 100\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0,5\,\mathrm{H} = 50\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \underline{X}_{L1} = j50\,\Omega$$
$$X_{L2} = \omega \cdot L_2 = 100\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 1\,\mathrm{H} = 100\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \underline{X}_{L2} = j100\,\Omega$$
$$X_{C1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{100\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 500\,\mu\mathrm{F}} = 20\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \underline{X}_{C1} = -j20\,\Omega$$
$$X_{C2} = \frac{1}{\omega \cdot C_2} = \frac{1}{100\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 100\,\mu\mathrm{F}} = 100\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \underline{X}_{C2} = -j100\,\Omega$$
$$R_1 = 20\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \underline{R}_1 = 20\,\Omega$$
$$R_2 = 50\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \underline{R}_2 = 50\,\Omega$$
$$R_3 = 50\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \underline{R}_3 = 50\,\Omega$$
$$R_4 = 30\,\Omega \quad \Rightarrow \quad \underline{R}_4 = 30\,\Omega$$

Ich beginne bei der Reihenschaltung aus R_3 und L_2. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_1.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_1 &= \underline{R}_3 + \underline{X}_{L2} \\
\underline{Z}_1 &= 50\,\Omega + j100\,\Omega
\end{aligned}$$

Parallel zu Z_1 ist C_2 geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_2.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_2 &= \frac{\underline{X}_{C2} \cdot \underline{Z}_1}{\underline{X}_{C2} + \underline{Z}_1} \\
&= \frac{-j100\,\Omega \cdot (50\,\Omega + j100\,\Omega)}{-j100\,\Omega + 50\,\Omega + j100\,\Omega} \\
&= \frac{-j5000\,\Omega^2 + 10000\,\Omega^2}{50\,\Omega} \\
\underline{Z}_2 &= -j100\,\Omega + 200\,\Omega
\end{aligned}$$

In Reihe zu Z_2 ist R_4 geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_3.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_3 &= \underline{R}_4 + \underline{Z}_2 \\
&= 30\,\Omega - j100\,\Omega + 200\,\Omega \\
\underline{Z}_3 &= 230\,\Omega - j100\,\Omega
\end{aligned}$$

Parallel zu Z_3 ist R_2 geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_4.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_4 &= \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{R}_2}{\underline{Z}_3 + \underline{R}_2} \\
&= \frac{(230\,\Omega - j100\,\Omega) \cdot 50\,\Omega}{230\,\Omega - j100\,\Omega + 50\,\Omega} \\
&= \frac{11500\,\Omega^2 - j5000\,\Omega^2}{280\,\Omega - j100\,\Omega} \\
&= \frac{(11500\,\Omega^2 - j5000\,\Omega^2) \cdot (280\,\Omega + j100\,\Omega)}{(280\,\Omega - j100\,\Omega) \cdot (280\,\Omega + j100\,\Omega)} \\
&= \frac{3220000\,\Omega^3 + j1150000\,\Omega^3 - j1400000\,\Omega^3 + 500000\Omega^3}{78400\,\Omega^2 + 10000\,\Omega^2} \\
&= \frac{3720000\,\Omega^3 - j250000\,\Omega^3}{88400\,\Omega^2} \\
\underline{Z}_4 &\approx 42,081\,\Omega - j2,828\,\Omega
\end{aligned}$$

Parallel zu Z_4 ist C_1 geschaltet. Den zugehörigen Teilersatzwiderstand nenne ich Z_5.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_5 &= \frac{\underline{Z}_4 \cdot \underline{X}_{C1}}{\underline{Z}_4 + \underline{X}_{C1}} \\
&\approx \frac{(42,081\,\Omega - j2,828\,\Omega) \cdot (-j20\,\Omega)}{42,081\,\Omega - j2,828\,\Omega - j20\,\Omega} \\
&= \frac{-j841,62\,\Omega^2 - 56,56\,\Omega^2}{42,081\,\Omega - j22,828\,\Omega} \\
&= \frac{(-j841,62\,\Omega^2 - 56,56\,\Omega^2)\,(42,081\,\Omega + j22,828\,\Omega)}{(42,081\,\Omega - j22,828\,\Omega)(42,081\,\Omega + j22,828\,\Omega)} \\
&\approx \frac{-j35416\,\Omega^3 + 19212\,\Omega^3 - 2380\,\Omega^3 - j1291\,\Omega^3}{1771\,\Omega^2 + 521\,\Omega^2} \\
&= \frac{6832\,\Omega^3 - j36707\,\Omega^3}{2292\,\Omega^2} \\
\underline{Z}_5 &\approx 7,344\,\Omega - j16,02\,\Omega
\end{aligned}$$

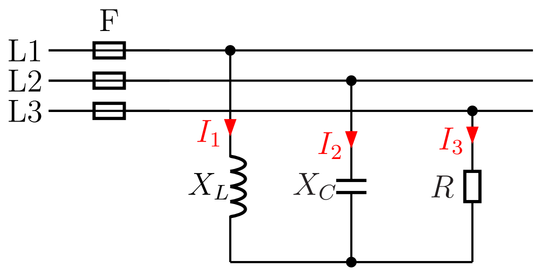
In Reihe zu Z_5 sind R_1 und L_1 geschaltet. Damit ergibt sich der Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \underline{X}_{L1} + \underline{Z}_5 + \underline{R}_1 \\
\underline{Z} &\approx j50\,\Omega + 7,344\,\Omega - j16,02\,\Omega + 20\,\Omega
\end{aligned}$$

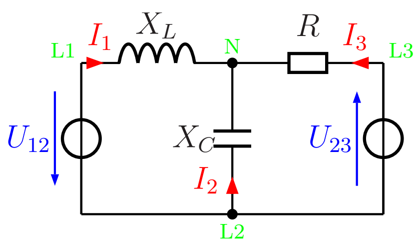
$$\boxed{\underline{Z} \approx 27,344\,\Omega + j33,98\,\Omega}$$

3.1.5 Aufgabe 5

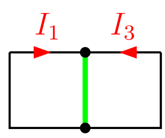
Bestimmen Sie die Ströme I_1, I_2 und I_3 in den Außenleitern des nebenstehend dargestellten Dreiphasenwechselstromnetzes mit $U_L = 400\text{V}$! Stellen Sie dazu ein Lineargleichungssystem für die drei Komplexen Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ auf und lösen Sie das Gleichungssystem. Berechnen Sie anschließend die gesuchten Beträge der Ströme I_1, I_2 und I_3. Bekannt sind die Werte:
$X_L = 100\,\Omega$; $\quad X_C = 200\,\Omega$; $\quad R = 50\,\Omega$



Lösung: Um einen besseren Überblick zu erhalten, wird die Schaltung zunächst etwas umgezeichnet. Dabei werden aus dem Dreiphasen-Wechselspannungsnetz nur die Spannungen U_{12} und U_{23} verwendet; mit diesen wird aber trotzdem das komplette Netz vollständig beschrieben. Zur besseren Orientierung habe ich die Punkte, die die Außenleiter L1, L2 und L3 sowie den Sternpunkt N bezeichnen, mit in die Schaltung eingetragen.



Nebenstehend ist das Gerippe der Schaltung dargestellt, mit dem ich die Schaltung analysieren möchte. Da ich mit dem **Maschenstromverfahren** arbeiten möchte, wähle ich zunächst einen „**Vollständigen Baum**“, der alle Knoten (hier allerdings nur zwei) auf einem eindeutigen Weg miteinander verbindet. Dieser auf einen einzigen Strich „verkümmerte“ Baum ist in grüner Farbe dargestellt. Damit ergeben sich die Maschenströme I_1 und I_3, mit denen das Gleichungssystem aufgestellt wird. Die Masche 1 verläuft über X_L, X_C und U_{12}, Masche 3 entsprechend über R, X_C und U_{23}.



Bevor wir beginnen können, sollten wir die komplexen Spannungen festlegen. Ich lege $\underline{U}_{12}$ in die reelle Richtung. Damit ist:

$$\underline{U}_{12} = 400\,\text{V}$$

Die Spannung $\underline{U}_{23}$ eilt der Spannung $\underline{U}_{12}$ um 120° nach. Damit ergibt sich für $\underline{U}_{23}$:

$$\underline{U}_{23} = 400\,\text{V} \cdot e^{-j120^\circ} = 400\,\text{V} \cdot \Big(\cos(-120^\circ) + j\sin(-120^\circ)\Big) \approx -200\,\text{V} - j346{,}4\,\text{V}$$

Weiterhin ist:

$$\underline{X}_L = jX_L = j100\,\Omega$$

$$\underline{X}_C = -jX_C = -j200\,\Omega$$

Jetzt können wir einen Maschenumlauf für Masche 1 und Masche 3 aufstellen.

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \underline{X}_L \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot (\underline{I}_1 + \underline{I}_3) - \underline{U}_{12} & = & 0 \\
(3) & \underline{R} \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_C \cdot (\underline{I}_2 + \underline{I}_1) + \underline{U}_{23} & = & 0 \\
\hline
(1) & \underline{X}_L \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_3 & = & \underline{U}_{12} \\
(3) & \underline{R} \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 & = & -\underline{U}_{23} \\
\hline
(1) & (\underline{X}_L + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_C \cdot \underline{I}_3 & = & \underline{U}_{12} \\
(3) & \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 + (\underline{R} + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_2 & = & -\underline{U}_{23}
\end{array}$$

Nun können die gegebenen Werte eingesetzt werden.

$$\begin{array}{lrrcl}
(1) & (\underline{X}_L + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_1 & +\underline{X}_C \cdot \underline{I}_3 & = & \underline{U}_{12} \\
(3) & \underline{X}_C \cdot \underline{I}_1 & +(\underline{R} + \underline{X}_C) \cdot \underline{I}_3 & = & -\underline{U}_{23} \\
\hline
(1) & (j100\,\Omega - j200\,\Omega) \cdot \underline{I}_1 & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_3 & = & 400\,\mathrm{V} \\
(3) & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & +(50\,\Omega - j200\,\Omega) \cdot \underline{I}_3 & = & 200\,\mathrm{V} + j346{,}4\,\mathrm{V} \\
\hline
(1) & -j100\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_3 & = & 400\,\mathrm{V} \\
(3) & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & +(50\,\Omega - j200\,\Omega) \cdot \underline{I}_3 & = & 200\,\mathrm{V} + j346{,}4\,\mathrm{V}
\end{array}$$

Multipliziert man Gleichung (1) mit -2, dann können die beiden Gleichungen einfach addiert werden. $\underline{I}_1$ fällt dann weg.

$$\begin{array}{lrrcll}
(1) & -j100\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_3 & = & 400\,\mathrm{V} & | \cdot (-2) \\
(3) & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & +(50\,\Omega - j200\,\Omega) \cdot \underline{I}_3 & = & 200\,\mathrm{V} + j346{,}4\,\mathrm{V} & \\
\hline
(1) & j200\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & +j400\,\Omega \cdot \underline{I}_3 & = & -800\,\mathrm{V} & | \\
(3) & -j200\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & +(50\,\Omega - j200\,\Omega) \cdot \underline{I}_3 & = & 200\,\mathrm{V} + j346{,}4\,\mathrm{V} & |+ \\
\hline
 & & (50\,\Omega + j200\,\Omega) \cdot \underline{I}_3 & = & -600\,\mathrm{V} + j346{,}4\,\mathrm{V} & \\
 & & \underline{I}_3 & = & \frac{-600\,\mathrm{V} + j346{,}4\,\mathrm{V}}{50\,\Omega + j200\,\Omega} & \\
 & & \underline{I}_3 & = & \frac{-12 + j6{,}928}{1 + j4}\mathrm{A} & \\
 & & \underline{I}_3 & = & \frac{-12 + j6{,}928}{1 + j4} \cdot \frac{1 - j4}{1 - j4}\mathrm{A} & \\
 & & \underline{I}_3 & = & \frac{-12 + j48 + j6{,}928 + 27{,}712}{1 + 16}\mathrm{A} & \\
 & & \underline{I}_3 & = & \frac{15{,}712 + j54{,}928}{17}\mathrm{A} & \\
 & & \underline{I}_3 & \approx & 0{,}9242\,\mathrm{A} + j3{,}231\,\mathrm{A} &
\end{array}$$

Zur Bestimmung von $\underline{I}_1$ setze ich das Ergebnis in Gleichung (1) ein.

$$\begin{array}{rcl}
-j100\,\Omega \cdot \underline{I}_1 - j200\,\Omega \cdot (0{,}9242\,\mathrm{A} + j3{,}231\,\mathrm{A}) & = & 400\,\mathrm{V} \\
-j100\,\Omega \cdot \underline{I}_1 - j184{,}84\,\mathrm{V} + 646{,}2\,\mathrm{V} & = & 400\,\mathrm{V} \quad | + j184{,}84\,\mathrm{V} - 646{,}2\,\mathrm{V} \\
-j100\,\Omega \cdot \underline{I}_1 & = & j184{,}84\,\mathrm{V} - 246{,}2\,\mathrm{V} \quad | : (-j100\,\Omega) \\
\underline{I}_1 & = & \dfrac{j184{,}84\,\mathrm{V} - 246{,}2\,\mathrm{V}}{-j100\,\Omega} \cdot \dfrac{j}{j} \\
\underline{I}_1 & = & \dfrac{-184{,}84\,\mathrm{V} - j246{,}2\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} \\
\underline{I}_1 & \approx & -1{,}8484\,\mathrm{A} - j2{,}462\,\mathrm{A}
\end{array}$$

Mit diesen Ergebnissen kann nun auch $\underline{I}_2$ bestimmt werden. Nach der Kirchhoffschen Knotenregel gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 &= 0 \quad | - \underline{I}_1 - \underline{I}_3 \\
\underline{I}_2 &= -\underline{I}_1 - \underline{I}_3 \\
\underline{I}_2 &= -(-1{,}8484\,\mathrm{A} - j2{,}462\,\mathrm{A}) - (0{,}9242\,\mathrm{A} + j3{,}231\,\mathrm{A}) \\
\underline{I}_2 &= 1{,}8484\,\mathrm{A} + j2{,}462\,\mathrm{A} - 0{,}9242\,\mathrm{A} - j3{,}231\,\mathrm{A} \\
\underline{I}_2 &\approx 0{,}9242\,\mathrm{A} - j0{,}769\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Mit diesen Daten können wir nun die Beträge der drei Ströme bestimmen. Zur Erinnerung vorweg die zugehörige Grundformel:

$$I = \sqrt{(\mathrm{Re}\underline{I})^2 + (\mathrm{Im}\underline{I})^2}$$

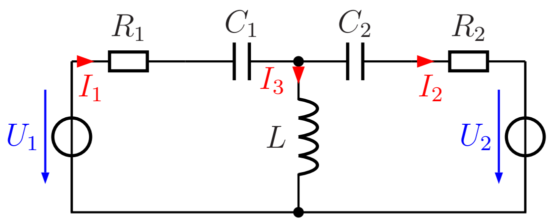
$$I_1 = \sqrt{(1{,}8484\,\mathrm{A})^2 + (2{,}462\,\mathrm{A})^2} \approx 3{,}079\,\mathrm{A}$$

$$I_2 = \sqrt{(0{,}9242\,\mathrm{A})^2 + (0{,}769\,\mathrm{A})^2} \approx 1{,}202\,\mathrm{A}$$

$$I_3 = \sqrt{(0{,}9242\,\mathrm{A})^2 + (3{,}231\,\mathrm{A})^2} \approx 3{,}361\,\mathrm{A}$$

3.1.6 Aufgabe 6

Die Ströme in nebenstehende Schaltung können durch ein Lineargleichungssystem beschrieben werden. Stellen Sie das Gleichungssystem auf und berechnen Sie die Komplexen Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$. Bekannt sind die Werte:
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$; $X_{C1} = 3\,\mathrm{k\Omega}$
$R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$; $X_{C2} = 4\,\mathrm{k\Omega}$
$X_L = 2\,\mathrm{k\Omega}$; $\underline{U}_1 = j4\,\mathrm{V}$; $\underline{U}_2 = 4\,\mathrm{V}$

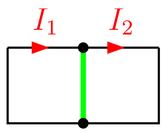


Lösung: Vorweg können R_1 und C_1 zu Z_1 und R_2 und C_2 zu Z_2 zusammengefasst werden.

$$\underline{Z}_1 = \underline{R}_1 + \underline{X}_{C1} = 1\,\mathrm{k\Omega} - j3\,\mathrm{k\Omega}$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{R}_2 + \underline{X}_{C2} = 2\,\mathrm{k\Omega} - j4\,\mathrm{k\Omega}$$

Nebenstehend ist das Gerippe der Schaltung dargestellt, mit dem ich die Schaltung analysieren möchte. Da ich mit dem **Maschenstromverfahren** arbeiten möchte, wähle ich zunächst einen „**Vollständigen Baum**“, der alle Knoten (hier allerdings nur zwei) auf einem eindeutigen Weg miteinander verbindet. Dieser auf einen einzigen Strich „verkümmerte“ Baum ist in grüner Farbe dargestellt. Damit ergeben sich die Maschenströme I_1 und I_2, mit denen das Gleichungssystem aufgestellt wird. Die Masche 1 verläuft über Z_1, X_L und U_1, Masche 2 entsprechend über Z_2, U_2 und X_L.



$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_L \cdot (\underline{I}_1 - \underline{I}_2) - \underline{U}_1 & = & 0 \\
(2) & \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_L \cdot (\underline{I}_2 - \underline{I}_1) + \underline{U}_2 & = & 0 \\
\hline
(1) & \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{X}_L \cdot \underline{I}_1 - \underline{X}_L \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_1 \\
(2) & \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{X}_L \cdot \underline{I}_2 - \underline{X}_L \cdot \underline{I}_1 & = & -\underline{U}_2 \\
\hline
(1) & (\underline{Z}_1 + \underline{X}_L) \cdot \underline{I}_1 - \underline{X}_L \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_1 \\
(2) & -\underline{X}_L \cdot \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{X}_L) \cdot \underline{I}_2 & = & -\underline{U}_2
\end{array}$$

Nun können die gegebenen Werte eingesetzt werden.

$$\begin{array}{lrrcl}
(1) & (\underline{Z}_1 + \underline{X}_L) \cdot \underline{I}_1 & -\underline{X}_L \cdot \underline{I}_2 & = & \underline{U}_1 \\
(2) & -\underline{X}_L \cdot \underline{I}_1 & +(\underline{Z}_2 + \underline{X}_L) \cdot \underline{I}_2 & = & -\underline{U}_2 \\
\hline
(1) & (1\,\mathrm{k\Omega} - j3\,\mathrm{k\Omega} + j2\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_1 & -j2\,\mathrm{k\Omega} \cdot \underline{I}_2 & = & j4\,\mathrm{V} \\
(2) & -j2\,\mathrm{k\Omega} \cdot \underline{I}_1 & +(2\,\mathrm{k\Omega} - j4\,\mathrm{k\Omega} + j2\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_2 & = & -4\,\mathrm{V} \\
\hline
(1) & (1\,\mathrm{k\Omega} - j1\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_1 & -j2\,\mathrm{k\Omega} \cdot \underline{I}_2 & = & j4\,\mathrm{V} \\
(2) & -j2\,\mathrm{k\Omega} \cdot \underline{I}_1 & +(2\,\mathrm{k\Omega} - j2\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_2 & = & -4\,\mathrm{V} \\
\hline
\end{array}$$

Zur Lösung kann man natürlich jedes beliebige Lösungsverfahren für Lineargleichungssysteme verwenden.[1]

Ich möchte gern das Additions-/Subtraktionsverfahren verwenden. Damit beim Addieren die Variable $\underline{I}_1$ wegfällt, multipliziere ich Gleichung (1) mit $j2$ und Gleichung (2) mit $(1 - j1)$.

$$
\begin{array}{lrrcll}
(1) & (1\,\mathrm{k\Omega} - j1\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_1 & -j2\,\mathrm{k\Omega} \cdot \underline{I}_2 & = & j4\,\mathrm{V} & | \cdot (j2) \\
(2) & -j2\,\mathrm{k\Omega} \cdot \underline{I}_1 & +(2\,\mathrm{k\Omega} - j2\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_2 & = & -4\,\mathrm{V} & | \cdot (1 - j1) \\
\hline
(1) & (j2\,\mathrm{k\Omega} - j^2 2\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_1 & -j^2 4\,\mathrm{k\Omega} \cdot \underline{I}_2 & = & j^2 8\,\mathrm{V} & \\
(2) & (-j2\,\mathrm{k\Omega} + j^2 2\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_1 & +(2\,\mathrm{k\Omega} - j2\,\mathrm{k\Omega} - j2\,\mathrm{k\Omega} + j^2 2\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_2 & = & -4\,\mathrm{V} + j4\,\mathrm{V} & \\
\hline
(1) & (j2\,\mathrm{k\Omega} + 2\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_1 & +4\,\mathrm{k\Omega} \cdot \underline{I}_2 & = & -8\,\mathrm{V} & \\
(2) & (-j2\,\mathrm{k\Omega} - 2\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_1 & +(2\,\mathrm{k\Omega} - j2\,\mathrm{k\Omega} - j2\,\mathrm{k\Omega} - 2\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_2 & = & -4\,\mathrm{V} + j4\,\mathrm{V} & \\
\hline
(1) & (j2\,\mathrm{k\Omega} + 2\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_1 & +4\,\mathrm{k\Omega} \cdot \underline{I}_2 & = & -8\,\mathrm{V} & | \\
(2) & (-j2\,\mathrm{k\Omega} - 2\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_1 & -j4\,\mathrm{k\Omega} \cdot \underline{I}_2 & = & -4\,\mathrm{V} + j4\,\mathrm{V} & |+ \\
\hline
 & & (4\,\mathrm{k\Omega} - j4\,\mathrm{k\Omega}) \cdot \underline{I}_2 & = & -12\,\mathrm{V} + j4\,\mathrm{V} & | : (4\,\mathrm{k\Omega} - j4\,\mathrm{k\Omega}) \\
 & & \underline{I}_2 & = & \frac{-12\,\mathrm{V} + j4\,\mathrm{V}}{4\,\mathrm{k\Omega} - j4\,\mathrm{k\Omega}} & \\
 & & \underline{I}_2 & = & \frac{-3+j1}{1-j1}\,\mathrm{mA} & \\
 & & \underline{I}_2 & = & \frac{(-3+j1)\cdot(1+j1)}{(1-j1)\cdot(1+j1)}\,\mathrm{mA} & \\
 & & \underline{I}_2 & = & \frac{-3-j3+j+j^2}{1-j^2}\,\mathrm{mA} & \\
 & & \underline{I}_2 & = & \frac{-3-j3+j-1}{1+1}\,\mathrm{mA} & \\
 & & \underline{I}_2 & = & \frac{-4-j2}{2}\,\mathrm{mA} & \\
 & & \underline{I}_2 & = & -2\,\mathrm{mA} - j1\,\mathrm{mA} &
\end{array}
$$

[1] In Frage kommt beispielsweise das Einsetzungsverfahren, das Additions-/Subtraktionsverfahren, die Cramersche Regel oder das Gauß-Jordan-Verfahren. Einzelheiten zu den verschiedenen Verfahren sind hier zu finden:
Einsetzungsverfahren: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/einsetz.pdf
Additions-/Subtraktionsverfahren: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf
Cramersche Regel: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf
Gauß-Jordan-Verfahren: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/gauss.pdf

Das Ergebnis setze ich in Gleichung (2) ein, um $\underline{\mathrm{I}}_1$ zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
-j2\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{\mathrm{I}}_1+(2\,\mathrm{k\Omega}-j2\,\mathrm{k\Omega})\cdot\underline{\mathrm{I}}_2 &= -4\,\mathrm{V}\\
-j2\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{\mathrm{I}}_1+(2\,\mathrm{k\Omega}-j2\,\mathrm{k\Omega})\cdot(-2\,\mathrm{mA}-j1\,\mathrm{mA}) &= -4\,\mathrm{V}\\
-j2\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{\mathrm{I}}_1-4\,\mathrm{V}-j2\,\mathrm{V}+j4\,\mathrm{V}+j^2 2\,\mathrm{V} &= -4\,\mathrm{V}\\
-j2\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{\mathrm{I}}_1-4\,\mathrm{V}-j2\,\mathrm{V}+j4\,\mathrm{V}-2\,\mathrm{V} &= -4\,\mathrm{V}\\
-j2\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{\mathrm{I}}_1-6\,\mathrm{V}+j2\,\mathrm{V} &= -4\,\mathrm{V}\quad |+6\,\mathrm{V}-j2\,\mathrm{V}\\
-j2\,\mathrm{k\Omega}\cdot\underline{\mathrm{I}}_1 &= 2\,\mathrm{V}-j2\,\mathrm{V}\quad |:(-j2\,\mathrm{k\Omega})\\
\underline{\mathrm{I}}_1 &= \frac{2\,\mathrm{V}-j2\,\mathrm{V}}{-j2\,\mathrm{k\Omega}}\cdot\frac{j}{j}\\
\underline{\mathrm{I}}_1 &= \frac{j2\,\mathrm{V}-j^2 2\,\mathrm{V}}{-j^2 2\,\mathrm{k\Omega}}\\
\underline{\mathrm{I}}_1 &= \frac{j2\,\mathrm{V}+2\,\mathrm{V}}{2\,\mathrm{k\Omega}}\\
\underline{\mathrm{I}}_1 &= 1\,\mathrm{mA}+j1\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

Damit kann nun I_3 bestimmt werden:

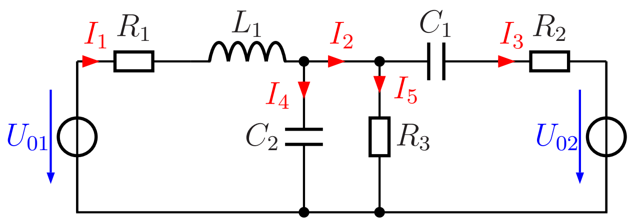
$I_3 = I_1 - I_2 = 1\,\mathrm{mA}+j1\,\mathrm{mA}-(-2\,\mathrm{mA}-j1\,\mathrm{mA}) = 1\,\mathrm{mA}+j1\,\mathrm{mA}+2\,\mathrm{mA}+j1\,\mathrm{mA} = 3\,\mathrm{mA}+j2\,\mathrm{mA}$

Zusammengefasstes Ergebnis: $\boxed{\underline{\mathrm{I}}_1 = 1\,\mathrm{mA}+j1\,\mathrm{mA}}$ $\boxed{\underline{\mathrm{I}}_2 = -2\,\mathrm{mA}-j1\,\mathrm{mA}}$ $\boxed{\underline{\mathrm{I}}_3 = 3\,\mathrm{mA}+j2\,\mathrm{mA}}$

3.1.7 Aufgabe 7

Nebenstehende Schaltung ist an zwei Spannungsquellen U_{01} und U_{02} mit einer Spannung von je 60 V angeschlossen. Die Phasenverschiebung zwischen diesen beiden Spannungen beträgt 0°. Berechnen Sie die Komplexen Ströme $\underline{I}_1$ bis $\underline{I}_5$. Bekannt sind diese Werte:

$R_1 = 6\,\Omega$; $R_2 = 3\,\Omega$; $R_3 = 10\,\Omega$;
$X_{C1} = 6\,\Omega$ $X_{C2} = 15\,\Omega$ $X_{L1} = 12\,\Omega$



Lösung: Zunächst stelle ich die gegebenen Größen als komplexe Werte auf. Da beide Spannungen die gleiche Phasenlage haben, lege ich die Spannungen entlang der reellen Achse fest:

$$\underline{U}_{01} = \underline{U}_{02} = 60\,\mathrm{V}$$

Die anderen komplexen Größen können aufgestellt werden:

$$\underline{R}_1 = 6\,\Omega$$

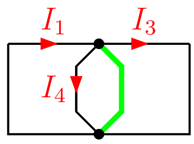
$$\underline{R}_2 = 3\,\Omega$$

$$\underline{R}_3 = 10\,\Omega$$

$$\underline{X}_{C1} = -j6\,\Omega$$

$$\underline{X}_{C2} = -j15\,\Omega$$

$$\underline{X}_{L1} = j12\,\Omega$$



Nebenstehend ist das Gerippe der Schaltung dargestellt, mit dem ich die Schaltung analysieren möchte. Da ich mit dem **Maschenstromverfahren** arbeiten möchte, wähle ich zunächst einen „**Vollständigen Baum**“, der alle Knoten (hier allerdings nur zwei) auf einem eindeutigen Weg miteinander verbindet. Die beiden Knoten über bzw. unter C_2 und R_3 sind in Wahrheit nur jeweils ein Knoten, da sie leitend miteinander verbunden sind. Dieser auf einen einzigen Strich „verkümmerte“ Baum ist in grüner Farbe dargestellt. Damit ergeben sich die Maschenströme I_1, I_3 und I_4, mit denen das Gleichungssystem aufgestellt wird. Der Strom I_2 bleibt zunächst außen vor, er wird zum Schluss berechnet.

Mit diesem Baum können nun die Maschengleichungen aufgestellt werden.

$$\boxed{\begin{array}{llllcl}
(1) & (\underline{R}_1 + \underline{X}_{L1} + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_1 & -\underline{R}_3 \cdot \underline{I}_3 & -\underline{R}_3 \cdot \underline{I}_4 & = & \underline{U}_{01} \\
(3) & -\underline{R}_3 \cdot \underline{I}_1 & +(\underline{R}_3 + \underline{X}_{C1} + \underline{R}_2) \cdot I_3 & +\underline{R}_3 \cdot I_4 & = & -\underline{U}_{02} \\
(4) & -\underline{R}_3 \cdot \underline{I}_1 & +\underline{R}_3 \cdot I_2 & +(\underline{X}_{C2} + \underline{R}_3) \cdot \underline{I}_4 & = & 0
\end{array}}$$

Um die Rechnung etwas zu vereinfachen trage ich die Zahlenwerte ohne Einheiten ein. Die Widerstände werden in Ohm und die Spannungen in Volt eingetragen, dann erhalten wir die Einheit Ampere für die sich ergebenden Ströme.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrcl}
(1) & (16+j12)\cdot\underline{I}_1 & -10\cdot\underline{I}_3 & -10\cdot\underline{I}_4 & = & 60\\
(3) & -10\cdot\underline{I}_1 & +(13-j6)\cdot\underline{I}_3 & +10\cdot\underline{I}_4 & = & -60\\
(4) & -10\cdot\underline{I}_1 & +10\cdot\underline{I}_3 & +(10-j15)\cdot\underline{I}_4 & = & 0
\end{array}}$$

Dieses Gleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden.[2] Ich möchte hier die Cramersche Regel verwenden.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 60 & -10 & -10\\ -60 & (13-j6) & 10\\ 0 & 10 & (10-j15)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (16+j12) & -10 & -10\\ -10 & (13-j6) & 10\\ -10 & 10 & (10-j15)\end{vmatrix}}\\
&= \frac{60\cdot(13-j6)\cdot(10-j15)+(-10)\cdot(-60)\cdot 10}{(16+j12)\cdot(13-j6)\cdot(10-j15)+(-10)\cdot 10\cdot(-10)+(-10)\cdot(-10)\cdot 10}\cdots\\
&\quad\cdots\frac{-10\cdot 10\cdot 60-(10-j15)\cdot(-60)\cdot(-10)}{-(-10)\cdot(13-j6)\cdot(-10)-10\cdot 10\cdot(16+j12)-(10-j15)\cdot(-10)\cdot(-10)}\\
&= \frac{(2\,400-j15\,300)+6\,000-6\,000-(6\,000-j9\,000)}{(3\,700-j3\,600)+1\,000+1\,000-(1\,300-j600)-(1\,600+j1\,200)-(1\,000-j1\,500)}\\
&= \frac{2\,400-j15\,300+6\,000-6\,000-6\,000+j9\,000}{3\,700-j3\,600+1\,000+1\,000-1\,300+j600-1\,600-j1\,200-1\,000+j1\,500}\\
&= \frac{-3\,600-j6\,300}{1\,800-j2\,700}\\
&= \frac{-36-j63}{18-j27}\\
&= \frac{(-36-j63)\cdot(18+j27)}{(18-j27)\cdot(18+j27)}\\
&= \frac{-648-j972-j1\,134+1\,701}{324+729}\\
&= \frac{1\,053-j2\,106}{1\,053}\\
\underline{I}_1 &= 1-j2
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{\underline{I}_1 = 1\,\mathrm{A} - j2\,\mathrm{A}}$

Als nächstes kann der Strom $\underline{I}_3$ bestimmt werden. Da im Nenner für alle Ströme die selbe Determinante steht, kann dieser Wert hier sofort eingesetzt werden. Er wurde ja

[2] In Frage kommt beispielsweise das Einsetzungsverfahren, das Additions-/Subtraktionsverfahren, die Cramersche Regel oder das Gauß-Jordan-Verfahren. Einzelheiten zu den verschiedenen Verfahren sind hier zu finden:
Einsetzungsverfahren: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/einsetz.pdf
Additions-/Subtraktionsverfahren: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf
Cramersche Regel: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf
Gauß-Jordan-Verfahren: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/gauss.pdf

schon für $\underline{I}_1$ bestimmt.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_3 &= \frac{\begin{vmatrix} (16+j12) & 60 & -10 \\ -10 & -60 & 10 \\ -10 & 0 & (10-j15) \end{vmatrix}}{1\,800 - j2\,700} \\
&= \frac{(16+j12)\cdot(-60)\cdot(10-j15) + 60\cdot 10\cdot(-10) - (-10)\cdot(-60)\cdot(-10) - (10-j15)\cdot(-10)\cdot 60}{1\,800 - j2\,700} \\
&= \frac{(-20\,400 + j7\,200) - 6\,000 + 6\,000 - (-6\,000 + j9\,000)}{1\,800 - j2\,700} \\
&= \frac{-20\,400 + j7\,200 - 6\,000 + 6\,000 + 6\,000 - j9\,000}{1\,800 - j2\,700} \\
&= \frac{-14\,400 - j1\,800}{1\,800 - j2\,700} \\
&= \frac{-144 - j18}{18 - j27} \\
&= \frac{(-144 - j18)\cdot(18 + j27)}{(18 - j27)\cdot(18 + j27)} \\
&= \frac{-2\,592 - j3\,888 - j324 + 486}{324 + 729} \\
&= \frac{-2\,106 - j4\,212}{1\,053} \\
\underline{I}_3 &= -2 - j4
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{\underline{I}_3 = -2\,\mathrm{A} - j4\,\mathrm{A}}$

Zur Bestimmung von $\underline{I}_4$ verwende ich Gleichung (3), weil hier am Schluss nur durch die reelle Zahl 10 dividiert werden muss.

$$\begin{aligned}
-10\cdot\underline{I}_1 + (13 - j6)\cdot\underline{I}_3 + 10\cdot\underline{I}_4 &= -60 \\
-10\cdot(1 - j2) + (13 - j6)\cdot(-2 - j4) + 10\cdot\underline{I}_4 &= -60 \\
-10 + j20 - 26 - j52 + j12 - 24 + 10\cdot\underline{I}_2 &= -60 \\
-60 - j20 + 10\cdot\underline{I}_2 &= -60 \quad | + 60 + j20 \\
10\cdot\underline{I}_2 &= j20 \quad | : 10 \\
\underline{I}_2 &= j2
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{\underline{I}_4 = j2\,\mathrm{A}}$

Damit ist das Gleichungssystem gelöst. Es fehlen aber noch die Ströme $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_5$. Dazu gehen wir in die Originalschaltung hinein. Ab Knoten rechts von L_1 kann die Knotengleichung zur Bestimmung von $\underline{I}_2$ aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \underline{I}_2 + \underline{I}_4 \quad | - \underline{I}_4 \\
\underline{I}_1 - \underline{I}_4 &= \underline{I}_2 \\
\underline{I}_2 &= (1\,\mathrm{A} - j2\,\mathrm{A}) - j2\,\mathrm{A} \\
\underline{I}_2 &= 1\,\mathrm{A} - j4\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{\underline{I}_2 = 1\,\mathrm{A} - j4\,\mathrm{A}}$

Zur Bestimmung von $\underline{I}_5$ verwendet man sinngemäß den Knoten oberhalb von R_3.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_2 &= \underline{I}_5 + \underline{I}_3 && \mid -\underline{I}_3 \\
\underline{I}_2 - \underline{I}_3 &= \underline{I}_5 \\
\underline{I}_5 &= (1\,\mathrm{A} - j4\,\mathrm{A}) - (-2\,\mathrm{A} - j4\,\mathrm{A}) \\
\underline{I}_5 &= 1\,\mathrm{A} - j4\,\mathrm{A} + 2\,\mathrm{A} + j4\,\mathrm{A} \\
\underline{I}_5 &= 3\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{\underline{I}_5 = 3\,\mathrm{A}}$

Hier noch einmal alle Ergebnisse zusammengefasst:

$$\boxed{\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= 1\,\mathrm{A} - j2\,\mathrm{A} \\
\underline{I}_2 &= 1\,\mathrm{A} - j4\,\mathrm{A} \\
\underline{I}_3 &= -2\,\mathrm{A} - j4\,\mathrm{A} \\
\underline{I}_4 &= j2\,\mathrm{A} \\
\underline{I}_5 &= 3\,\mathrm{A}
\end{aligned}}$$

4 Kompensation

4.1 Berechnungen der Kompensation

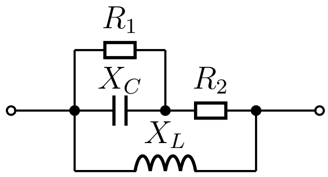
Die Grundlagen zur Berechnung bei Kompensation sind hier zu finden:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/wechsels.pdf

4.2 Lösungen der Übungsaufgaben zur Kompensation

4.2.1 Aufgabe 1

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand R_2 so, dass der Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung reell wird! Folgende Werte sind bekannt:
$X_C = 2\,\Omega \quad X_L = 8\,\Omega \quad R_1 = 4\,\Omega$
Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand Z der Schaltung?



Lösung: Um das Problem lösen zu können, stelle ich die Formel auf, mit deren Hilfe $\underline{Z}$ aus den Blind- und Wirkwiderständen bestimmt wird. Dabei setze ich die unbekannten Größe $\underline{R}_2$ an mit:

$$\underline{R}_2 = R$$

Mit diesem Ansatz erreiche ich, dass ich nur eine **reelle** Größe – nämlich R – bestimmen muss. Die Liste der verwendeten Größe sieht damit dann so aus:

$$\begin{aligned}
\underline{R}_1 &= 4\,\Omega \\
\underline{R}_2 &= R \\
\underline{X}_L &= j8\,\Omega \\
\underline{X}_C &= -j2\,\Omega
\end{aligned}$$

Beginnen wir mit der Zusammenfassung der Parallelschaltung aus R_1 und X_C. Den Ersatzwiderstand nenne ich Z_1.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R}_1 \cdot \underline{X}_C}{\underline{R}_1 + \underline{X}_C} \\
&= \frac{4\,\Omega \cdot (-j2\,\Omega)}{4\,\Omega + (-j2\,\Omega)} \\
&= \frac{-j8\,\Omega^2}{4\,\Omega - j2\,\Omega} \\
\underline{Z}_1 &= \frac{-j4\,\Omega}{2-j}
\end{aligned}$$

Mit Z_1 in Reihe geschaltet ist R_2. Den Ersatzwiderstand dieser Reihenschaltung nenne ich Z_2. Wir können $\underline{Z}_2$ berechnen.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_2 &= \underline{Z}_1 + \underline{R}_2 \\
\underline{Z}_2 &= \frac{-j4\,\Omega}{2-j} + R
\end{aligned}$$

Parallel zu Z_2 ist X_L geschaltet. Damit können wir nun den Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung $\underline{Z}$ aufstellen.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{X}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{X}_L} \\
\underline{Z} &= \frac{\left(\frac{-j4\,\Omega}{2-j} + R\right) \cdot j8\,\Omega}{\left(\frac{-j4\,\Omega}{2-j} + R\right) + j8\,\Omega}
\end{aligned}$$

Bevor wir weiterrechnen, sollten wir diesen Term vereinfachen. Dazu fassen wir im Zähler und im Nenner des Hauptbruches die Teilbrüche zusammen, damit wir anschließend die Nenner der Teilbrüche herauskürzen können.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{\left(\frac{-j4\,\Omega}{2-j} + R\right) \cdot j8\,\Omega}{\left(\frac{-j4\,\Omega}{2-j} + R\right) + j8\,\Omega} \\
&= \frac{\left(\frac{-j4\,\Omega + R(2-j)}{2-j}\right) \cdot j8\,\Omega}{\frac{-j4\,\Omega + R(2-j) + j8\,\Omega(2-j)}{2-j}} \\
&= \frac{(-j4\,\Omega + R(2-j)) \cdot j8\,\Omega}{-j4\,\Omega + R(2-j) + j8\,\Omega(2-j)} \\
&= \frac{(-j4\,\Omega + 2R - jR) \cdot j8\,\Omega}{-j4\,\Omega + 2R - jR + j16\,\Omega - j^2 8\,\Omega} \\
&= \frac{-j^2 32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R - j^2 8\,\Omega R}{-j4\,\Omega + 2R - jR + j16\,\Omega + 8\,\Omega} \\
\underline{Z} &= \frac{32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R}{2R - jR + j12\,\Omega + 8\,\Omega}
\end{aligned}$$

Nachdem wir nun den Term für $\underline{Z}$ vereinfacht haben, gibt zwei grundsätzlich verschiedene Wege, wie man weiterarbeiten kann.

1. Wir können den Term für $\underline{Z}$ in einen Realteil und einen Imaginärteil aufspalten. Dann können wir den Imaginärteil gleich Null setzen, um dadurch R zu bestimmen.

2. Da $\underline{Z}$ laut Aufgabenstellung als *reelle* Größe bekannt ist, können wir $\underline{Z} = Z$ setzen. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, die Gleichung in Real- und Imaginärteile aufzuspalten. Wir bekommen dann *zwei* Gleichungen mit *zwei* Variablen, nämlich Z und R.

Um die Vor- und Nachteile der beiden Verfahren besser unterscheiden zu können, führe ich nacheinander beide vor.

Lösungsweg 1

$$
\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R}{2R - jR + j12\,\Omega + 8\,\Omega} \\
&= \frac{32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R}{(2R + 8\,\Omega) - j(R - 12\,\Omega)} \\
&= \frac{(32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R)\cdot((2R + 8\,\Omega) + j(R - 12\,\Omega))}{((2R + 8\,\Omega) - j(R - 12\,\Omega))\cdot((2R + 8\,\Omega) + j(R - 12\,\Omega))} \\
&= \frac{(32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R)\cdot(2R + 8\,\Omega + jR - j12\,\Omega)}{(2R + 8\,\Omega)^2 + (R - 12\,\Omega)^2} \\
&= \frac{64\,\Omega^2 R + 256\,\Omega^3 + j32\,\Omega^2 R - j384\,\Omega^3 + j32\,\Omega R^2 + j128\,\Omega^2 R - 16\,\Omega R^2}{4R^2 + 32\,\Omega R + 64\,\Omega^2 + R^2 - 24\,\Omega R + 144\,\Omega^2}\ldots \\
&\qquad \ldots\frac{+192\,\Omega^2 R + 16\,\Omega R^2 + 64\,\Omega^2 R + j8\,\Omega R^2 - j96\,\Omega^2 R}{\ldots} \\
&= \frac{320\,\Omega^2 R + 256\,\Omega^3 + j64\,\Omega^2 R - j384\,\Omega^3 + j40\,\Omega R^2}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2} \\
\underline{Z} &= \frac{320\,\Omega^2 R + 256\,\Omega^3}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2} + j\frac{64\,\Omega^2 R - 384\,\Omega^3 + 40\,\Omega R^2}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2}
\end{aligned}
$$

Da $\underline{Z}$ reell sein soll, ist der Imaginärteil von $\underline{Z}$ gleich Null. Damit bekommen wir eine Gleichung zur Bestimmung von R.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\underline{Z}) &= 0 \\
\frac{64\,\Omega^2 R - 384\,\Omega^3 + 40\,\Omega R^2}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2} &= 0 \quad |\cdot\text{Nenner} \\
64\,\Omega^2 R - 384\,\Omega^3 + 40\,\Omega R^2 &= 0 \\
40\,\Omega R^2 + 64\,\Omega^2 R - 384\,\Omega^3 &= 0 \quad |:40\,\Omega \\
R^2 + 1{,}6\,\Omega R - 9{,}6\,\Omega^2 &= 0 \quad |\text{ p-q-Formel} \\
R_{1/2} &= -0{,}8\,\Omega \pm \sqrt{0{,}64\,\Omega^2 + 9{,}6\,\Omega^2} \\
&= -0{,}8\,\Omega \pm 3{,}2\,\Omega \\
R_1 &= 2{,}4\,\Omega \\
R_2 &= -4\,\Omega \quad \text{(entfällt)}
\end{aligned}
$$

Die Lösung lautet also $\boxed{R = 2{,}4\,\Omega}$, denn negative Widerstände gibt es nicht.

Lösungsweg 2 Als alternative Lösungsmethode können wir $\underline{Z} = Z$ setzen. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, die Gleichung in Real- und Imaginärteile aufzuspalten. Wir bekommen dann *zwei* Gleichungen mit *zwei reellen* Variablen, nämlich Z und R.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R}{2R - jR + j12\,\Omega + 8\,\Omega} \\
Z &= \frac{32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R}{2R - jR + j12\,\Omega + 8\,\Omega} \qquad |\cdot(2R - jR + j12\,\Omega + 8\,\Omega) \\
2RZ - jRZ + j12\,\Omega Z + 8\,\Omega Z &= 32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R
\end{aligned}$$

Aus dieser komplexen Gleichung können wir nun ***zwei*** reelle Gleichungen machen, indem wir die Gleichung in eine Gleichung für die Realteile und eine andere für die Imaginärteile aufspalten.

$$\begin{aligned}
&& 2RZ - jRZ + j12\,\Omega Z + 8\,\Omega Z &= 32\,\Omega^2 + j16\,\Omega R + 8\,\Omega R \\
\text{Re:} && 2RZ + 8\,\Omega Z &= 32\,\Omega^2 + 8\,\Omega R \\
\text{Im:} && -RZ + 12\,\Omega Z &= 16\,\Omega R
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem lösen wir, indem wir die Gleichung aus den reellen Anteilen nach Z auflösen und in die andere Gleichung einsetzen.

$$\begin{aligned}
2RZ + 8\,\Omega Z &= 32\,\Omega^2 + 8\,\Omega R \\
Z\cdot(2R + 8\,\Omega) &= 32\,\Omega^2 + 8\,\Omega R \quad |:(2R + 8\,\Omega) \\
Z &= \frac{32\,\Omega^2 + 8\,\Omega R}{2R + 8\,\Omega} \\
Z &= \frac{8\,\Omega\cdot(4\,\Omega + R)}{2\cdot(R + 4\,\Omega)} \\
Z &= 4\,\Omega
\end{aligned}$$

Das Ergebnis setzen wir in die Gleichung aus den Imaginärteilen ein.

$$\begin{aligned}
-RZ + 12\,\Omega Z &= 16\,\Omega R \\
-R\cdot 4\,\Omega + 12\,\Omega\cdot 4\,\Omega &= 16\,\Omega R \\
-4\,\Omega R + 48\,\Omega^2 &= 16\,\Omega R \quad |+4\,\Omega R \\
48\,\Omega^2 &= 20\,\Omega R \quad |:20\,\Omega \\
2{,}4\,\Omega &= R
\end{aligned}$$

$$\boxed{R = 2{,}4\,\Omega}$$

Jeder mag für sich selbst entscheiden, welchen Lösungsweg er einfacher findet.

Zum ersten Lösungsweg müsste noch die fehlende Größe $\underline{Z}$ bestimmt werden. (Im zweiten Lösungsweg entfällt das, weil die Lösung $\underline{Z} = 4\,\Omega$ quasi nebenbei angefallen ist.) Dazu setzen wir den gefundenen Wert $R = 2{,}4\,\Omega$ in die gefundene Formel für $\underline{Z}$ ein.

$$\underline{Z} = \frac{320\,\Omega^2 R + 256\,\Omega^3}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2} + j\frac{64\,\Omega^2 R - 384\,\Omega^3 + 40\,\Omega R^2}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2}$$

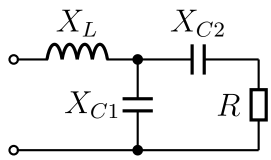
Laut Aufgabenstellung ist der Imaginärteil $\mathrm{Im}\underline{Z} = 0$. (Das ist der Bruch hinter dem j.) Daher können wir ihn der Einfachheit halber auch gleich weglassen. In den so vereinfachten Term setzen wir dann $R = 2{,}4\,\Omega$ ein.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{320\,\Omega^2 R + 256\,\Omega^3}{5R^2 + 8\,\Omega R + 208\,\Omega^2} \\
&= \frac{320\,\Omega^2 \cdot 2{,}4\,\Omega + 256\,\Omega^3}{5 \cdot (2{,}4\,\Omega)^2 + 8\,\Omega \cdot 2{,}4\,\Omega + 208\,\Omega^2} \\
&= \frac{768\,\Omega^3 + 256\,\Omega^3}{28{,}8\,\Omega^2 + 19{,}2\,\Omega^2 + 208\,\Omega^2} \\
&= \frac{1024\,\Omega^3}{256\,\Omega^2} \\
&= 4\,\Omega
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Gesamtwiderstand } \underline{Z} = 4\,\Omega}$$

4.2.2 Aufgabe 2

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand X_{C2} so, dass der Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung reell wird! Bekannt sind die Werte:
$X_{C1} = 50\,\Omega \quad X_L = 12{,}5\,\Omega \quad R_1 = 20\,\Omega$.
Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand Z der Schaltung?



Lösung: Um das Problem lösen zu können, stelle ich die Formel auf, mit deren Hilfe $\underline{Z}$ aus den Blind- und Wirkwiderständen bestimmt wird. Dabei setze ich die unbekannten Größe $\underline{X}_{C2}$ an mit:

$$\underline{X}_{C2} = -jX$$

Mit diesem Ansatz erreiche ich, dass ich nur eine **reelle** Größe – nämlich X – bestimmen muss. Die Liste der verwendeten Größe sieht damit dann so aus:

$$\begin{aligned}
\underline{X}_{C1} &= -j50\,\Omega \\
\underline{X}_{L} &= j12{,}5\,\Omega \\
\underline{R} &= 20\,\Omega \\
\underline{X}_{C2} &= -jX
\end{aligned}$$

Ich beginne mit der Zusammenfassung aus X_{C2} und R. Diese nenne ich $\underline{Z}_1$.

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}_{C2} + \underline{R} = -jX + 20\,\Omega$$

Parallel zu Z_1 liegt X_{C1}. Diese Parallelschaltung nenne ich $\underline{Z}_2$.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_{C1}}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_{C1}} \\
\underline{Z}_2 &= \frac{(-jX + 20\,\Omega) \cdot (-j50\,\Omega)}{-jX + 20\,\Omega - j50\,\Omega} \\
\underline{Z}_2 &= \frac{-50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2}{20\,\Omega - j(X + 50\,\Omega)}
\end{aligned}$$

In Reihe zu Z_2 liegt X_L. Damit erhalte ich den Gesamtwiderstand $\underline{Z}$:

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \underline{Z}_2 + \underline{X}_L \\
\underline{Z} &= \frac{-50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2}{20\,\Omega - j(X + 50\,\Omega)} + j12{,}5\,\Omega
\end{aligned}$$

Ab hier gibt es wieder – wie bei den vorangehenden Aufgaben auch – zwei unterschiedliche Lösungswege.

Lösungsweg 1

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{-50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2}{20\,\Omega - j(X+50\,\Omega)} + j12{,}5\,\Omega \quad | \text{ Konjugiert Komplex erweitern} \\
&= \frac{(-50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2)\cdot(20\,\Omega + jX + j50\,\Omega)}{[20\,\Omega - j(X+50\,\Omega)]\cdot[(20\,\Omega + j(X+50\,\Omega)]} + j12{,}5\,\Omega \\
&= \frac{-1000\,\Omega^2 X - j50\,\Omega X^2 - j2500\,\Omega^2 X - j20000\,\Omega^3 + 1000\,\Omega^2 X + 50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + j12{,}5\,\Omega \\
\underline{Z} &= \frac{-j50\,\Omega X^2 - j2500\,\Omega^2 X - j20000\,\Omega^3 + 50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + j2{,}5\,\Omega
\end{aligned}$$

Der Bruch kann nun in Realteil und Imaginärteil zerlegt werden. Das geht dann auch mit dem gesamten $\underline{Z}$.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + j\frac{-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + j12{,}5\,\Omega \\
\underline{Z} &= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + j\left(\frac{-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + 12{,}5\,\Omega\right)
\end{aligned}$$

Laut Aufgabenstellung ist $\mathrm{Im}(\underline{Z}) = 0$. Daraus können wir eine Gleichung zur Bestimmung von X machen.

$$\begin{aligned}
\frac{-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2} + 12{,}5\,\Omega &= 0 \quad | \cdot \text{Nenner} \\
-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3 + 12{,}5\,\Omega \cdot \left(400\,\Omega^2 + (X+50\,\Omega)^2\right) &= 0 \\
-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3 + 12{,}5\,\Omega \cdot \left(400\,\Omega^2 + X^2 + 100\,\Omega X + 2500\,\Omega^2\right) &= 0 \\
-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3 + 12{,}5\,\Omega \cdot \left(2900\,\Omega^2 + X^2 + 100\,\Omega X\right) &= 0 \\
-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3 + 36250\,\Omega^3 + 12{,}5\,\Omega X^2 + 1250\,\Omega^2 X &= 0 \\
-37{,}5\,\Omega X^2 - 1250\,\Omega^2 X + 16250\,\Omega^3 &= 0
\end{aligned}$$

Wir haben eine Quadratische Gleichung erhalten, die wir nun mit der $p-q-$Formel lösen können.

$$\begin{aligned}
-37{,}5\,\Omega X^2 - 1250\,\Omega^2 X + 16250\,\Omega^3 &= 0 \quad | : (-37{,}5\,\Omega) \\
X^2 + \frac{100}{3}\Omega X - \frac{1300}{3}\Omega^2 &= 0 \\
X_{1/2} &= -\frac{50}{3}\Omega \pm \sqrt{\frac{2500}{9}\Omega^2 + \frac{3900}{9}\Omega^2} \\
X_{1/2} &= -\frac{50}{3}\Omega \pm \sqrt{\frac{6400}{9}\Omega^2} \\
X_{1/2} &= -\frac{50}{3}\Omega \pm \frac{80}{3}\Omega \\
X_1 &= \frac{30}{3}\Omega = 10\,\Omega \\
X_2 &= -\frac{130}{3}\Omega \text{ (entfällt)}
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{\underline{X}_{C2} = -j10\,\Omega}$ oder: $\boxed{X_{C2} = 10\,\Omega}$

Fehlt noch $\underline{Z}$. Da $\mathrm{Im}\underline{Z} = 0$ ist, ist $\underline{Z} = Z = \mathrm{Re}\underline{Z}$.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X + 50\,\Omega)^2} + j\left(\frac{-50\,\Omega X^2 - 2500\,\Omega^2 X - 20000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X + 50\,\Omega)^2} + 12{,}5\,\Omega\right) \\
&= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (X + 50\,\Omega)^2} \\
&= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (10\,\Omega + 50\,\Omega)^2} \\
&= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + (60\,\Omega)^2} \\
&= \frac{50000\,\Omega^3}{400\,\Omega^2 + 3600\,\Omega^2} \\
&= \frac{50000\,\Omega^3}{4000\,\Omega^2} \\
\underline{Z} &= 12{,}5\,\Omega
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{\underline{Z} = Z = 12{,}5\,\Omega}$

Lösungsweg 2 Alternativ ergibt sich auch hier wieder die Möglichkeit, aus **einer Komplexen** Gleichung **zwei Reelle** Gleichungen zu machen. Das allerdings geht nur, weil $\underline{Z} = Z$ ist!

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{-50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2}{20\,\Omega - j(X + 50\,\Omega)} + j12{,}5\,\Omega \\
Z &= \frac{-50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2}{20\,\Omega - j(X + 50\,\Omega)} + j12{,}5\,\Omega \quad | \cdot \text{Nenner} \\
Z \cdot [20\,\Omega - j(X + 50\,\Omega)] &= -50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2 + j12{,}5\,\Omega \cdot [20\,\Omega - j(X + 50\,\Omega)] \\
Z \cdot (20\,\Omega - jX - j50\,\Omega) &= -50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2 + j12{,}5\,\Omega \cdot (20\,\Omega - jX - j50\,\Omega) \\
20\,\Omega Z - jXZ - j50\,\Omega Z &= -50\,\Omega X - j1000\,\Omega^2 + j250\,\Omega^2 + 12{,}5\,\Omega X + 625\,\Omega^2 \\
20\,\Omega Z - jXZ - j50\,\Omega Z &= -37{,}5\,\Omega X - j750\,\Omega^2 + 625\,\Omega^2
\end{aligned}$$

Diese Gleichung können wir nun ein eine Gleichung mit den Realteilen und in eine mit den Imaginärteilen zerlegen. Das ist der eigentliche „Trick“ bei diesem Verfahren.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Realteile:} & 20\,\Omega Z &=& -37{,}5\,\Omega X + 625\,\Omega^2 \\
\text{Imaginärteile:} & -XZ - 50\,\Omega Z &=& -750\,\Omega^2
\end{array}$$

Da dieses Gleichungssystem **nichtlinear** ist, kommt als Lösungsverfahren wohl nur das Einsetzungsverfahren in Frage. Dazu löse ich die Realteilgleichung nach Z auf und setze das Ergebnis in die Imaginärteilgleichung ein.

$$\begin{aligned}
20\,\Omega Z &= -37{,}5\,\Omega X + 625\,\Omega^2 \quad | : 20\,\Omega \\
Z &= -1{,}875X + 31{,}25\,\Omega
\end{aligned}$$

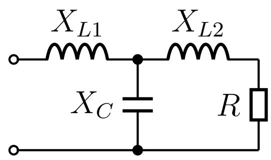
Eingesetzt in die Imaginärteilgleichung:

$$\begin{aligned}
-XZ - 50\,\Omega Z &= -750\,\Omega^2 \\
-X \cdot (-1{,}875X + 31{,}25\,\Omega) - 50\,\Omega \cdot (-1{,}875X + 31{,}25\,\Omega) &= -750\,\Omega^2 \\
1{,}875X^2 - 31{,}25\,\Omega X + 93{,}75\,\Omega X - 1562{,}5\,\Omega^2 &= -750\,\Omega^3 \quad | + 750\,\Omega^2 \\
1{,}875X^2 + 62{,}5\,\Omega X - 812{,}5\,\Omega^2 &= 0 \quad | : 1{,}875 \\
x^2 + \frac{100}{3}\Omega X - \frac{1300}{3}\Omega^2 &= 0
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung auch schon beim ersten Lösungsweg auftrat, kann man den Rest der Lösung dort nachlesen; der restliche Lösungsweg ist identisch.

4.2.3 Aufgabe 3

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie die Widerstände X_{L1} und X_C so, dass der Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung gleich $10\,\Omega$ reell wird!
Bekannt sind die Werte $X_{L2} = 8\,\Omega$ und $R = 16\,\Omega$.



Lösung: Um das Problem lösen zu können, stelle ich die Formel auf, mit deren Hilfe $\underline{Z}$ aus den Blind- und Wirkwiderständen bestimmt wird. Dabei setze ich die unbekannten Größen $\underline{X}_{L1}$ und $\underline{X}_C$ an mit:

$$\underline{X}_{L1} = jX_L \quad \text{und} \quad \underline{X}_C = -jX_C$$

Mit diesem Ansatz erreiche ich, dass ich nur zwei **reelle** Größen, nämlich X_L und X_C, bestimmen muss. Die Liste der verwendeten Größe sieht demnach also so aus:

$$\begin{aligned} R = 16\,\Omega \quad &\Rightarrow \quad \underline{R} = 16\,\Omega \\ X_{L2} = 8\,\Omega \quad &\Rightarrow \quad \underline{X}_{L2} = j8\,\Omega \\ X_{L1} = X_L \quad &\Rightarrow \quad \underline{X}_{L1} = jX_L \\ & \qquad\;\; \underline{X}_C = -jX_C \end{aligned}$$

Die Reihenschaltung aus X_{L2} und R nenne ich Z_1 und erhalte mit der Formel für die Reihenschaltung:

$$\underline{Z}_1 = \underline{R} + \underline{X}_{L2} = 16\,\Omega + j8\,\Omega$$

Z_1 ist zu X_C parallel geschaltet. Diese Parallelschaltung nenne ich Z_2. Ich bestimme $\underline{Z}_2$ mit der Formel für die Parallelschaltung.

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_C}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_C} = \frac{(16\,\Omega + j8\,\Omega) \cdot (-jX_C)}{(16\,\Omega + j8\,\Omega) + (-jX_C)} = \frac{-j16\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C}{16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C}$$

Hinzu kommt noch $\underline{X}_{L1}$, wenn ich den Gesamtwiderstand $\underline{Z}$ bestimmen will:

$$\underline{Z} = \underline{X}_{L1} + \underline{Z}_2 = jX_L + \frac{-j16\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C}{16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C}$$

Da $\underline{Z} = 10\,\Omega$ (reell) bekannt ist, kann diesen Wert für $\underline{Z}$ einsetzen. Ich erhalte dann *eine* Komplexe Gleichung mit *zwei* Variablen.

$$10\,\Omega = jX + \frac{-j16\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C}{16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C}$$

Eine solche Gleichung löst man am besten dadurch, dass man sie in *Komponentengleichungen* aufspaltet. Damit das möglich ist, muss ich die Gleichung vorher mit dem

Hauptnenner multiplizieren, um keine Brüche mehr zu haben. **Die Aufspaltung ist nämlich nur bei *Linearen Gleichungen* möglich!**

$$\begin{aligned}
10\,\Omega &= jX_L + \frac{-j16\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C}{16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C} | \cdot (16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C) \\
10\,\Omega \cdot (16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C) &= jX_L \cdot (16\,\Omega + j8\,\Omega - jX_C) - j16\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C \\
160\,\Omega^2 + j80\,\Omega^2 - j10\,\Omega X_C &= j16\,\Omega X_L - 8\,\Omega X_L + X_L X_C - j16\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C | + j10\,\Omega X_C \\
160\,\Omega^2 + j80\,\Omega^2 &= j16\,\Omega X_L - 8\,\Omega X_L + X_L X_C - j6\,\Omega X_C + 8\,\Omega X_C
\end{aligned}$$

Diese Komplexe Gleichung kann nun aufgespaltet werden in eine Gleichung mit den *Realteilen* und eine andere Gleichung mit den *Imaginärteilen*.

$$\begin{aligned}
\text{Re:} \quad 160\,\Omega^2 &= -8\,\Omega X_L + X_L X_C + 8\,\Omega X_C \\
\text{Im:} \quad 80\,\Omega^2 &= 16\,\Omega X_L - 6\,\Omega X_C
\end{aligned}$$

Ich löse die Gleichung aus den Imaginärteilen nach X_L auf, um das Ergebnis in die andere Gleichung einzusetzen.

$$\begin{aligned}
80\,\Omega^2 &= 16\,\Omega X_L - 6\,\Omega X_C | + 6\,\Omega X_C \\
80\,\Omega^2 + 6\,\Omega X_C &= 16\,\Omega X_L | : 16\,\Omega \\
5\,\Omega + \frac{3}{8} X_C &= X_L
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Reelle Gleichung:

$$
\begin{aligned}
160\,\Omega^2 &= -8\,\Omega X_L + X_L X_C + 8\,\Omega X_C \\
160\,\Omega^2 &= -8\,\Omega(5\,\Omega + \frac{3}{8}X_C) + (5\,\Omega + \frac{3}{8}X_C)X_C + 8\,\Omega X_C \\
160\,\Omega^2 &= -40\,\Omega^2 - 3\,\Omega X_C + 5\,\Omega X_C + \frac{3}{8}X_C^2 + 8\,\Omega X_C | + 40\,\Omega^2 \\
200\,\Omega^2 &= 10\,\Omega X_C + \frac{3}{8}X_C^2 | \cdot \frac{8}{3} \\
\frac{1600}{3}\Omega^2 &= \frac{80}{3}\Omega X_C + X_C^2 | - \frac{1600}{3}\Omega^2 \\
0 &= X_C^2 + \frac{80}{3}\Omega X_C - \frac{1600}{3}\Omega^2 \\
X_{C1/2} &= -\frac{40}{3}\Omega \pm \sqrt{\left(\frac{40}{3}\Omega\right)^2 + \frac{1600}{3}\Omega^2} \\
&= -\frac{40}{3}\Omega \pm \sqrt{\frac{1600}{9}\Omega^2 + \frac{4800}{9}\Omega^2} \\
&= -\frac{40}{3}\Omega \pm \sqrt{\frac{6400}{9}\Omega^2} \\
&= -\frac{40}{3}\Omega \pm \frac{80}{3}\Omega \\
X_{C1} &= \frac{40}{3}\Omega \\
X_{C2} &= -\frac{120}{3}\Omega = -40\,\Omega
\end{aligned}
$$

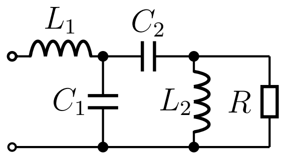
Die Lösung $X_{C2} = -40\,\Omega$ entfällt, denn es können nur positive Werte eingesetzt werden. Sonst wäre C eine Spule! Die Lösung $X_{C2} = \frac{40}{3}\Omega$ setze ich in die umgeformte Imaginärteil-Gleichung ein.

$$X_L = 5\,\Omega + \frac{3}{8}X_C = 5\,\Omega + \frac{3}{8} \cdot \frac{40}{3}\Omega = 10\,\Omega$$

Die Lösungen lauten also: $\boxed{X_L = 10\,\Omega}$ $\boxed{X_C = \frac{40}{3}\Omega \approx 13{,}3\,\Omega}$

4.2.4 Aufgabe 4

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie die Kapazität C_2 so, dass bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 1\,000\,\mathrm{s}^{-1}$ der Ersatzwiderstand $\underline{Z}$ der Schaltung rein reell wird! Bekannt sind folgende Werte:
$L_1 = 4\,\mathrm{H}$ $\quad L_2 = 25\,\mathrm{H}$ $\quad R = 50\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad C_1 = 200\,\mathrm{nF}$
Wie groß wird damit der Ersatzwiderstand $\underline{Z}$?



Lösung: Zunächst werden die Blindwiderstände bestimmt:

$$\underline{X}_{L1} = j\omega L_1 = j \cdot 1\,000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 4\,\mathrm{H} = j4\,\mathrm{k\Omega}$$

$$\underline{X}_{L2} = j\omega L_2 = j \cdot 1\,000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 25\,\mathrm{H} = j25\,\mathrm{k\Omega}$$

$$\underline{X}_{C1} = \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j \cdot 1\,000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 200\,\mu\mathrm{F}} = -j5\,\mathrm{k\Omega}$$

Den Betrag des kapazitiven Blindwiderstand des gesuchten Kondensators nenne ich X. Damit erhalte ich:

$$\underline{X}_{C2} = -jX$$

Den Ersatzwiderstand der Parallelschaltung $R \parallel L_2$ nenne ich $\underline{Z}_1$. Dieser kann berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_1 &= \frac{\underline{R} \cdot \underline{X}_{L2}}{\underline{R} + \underline{X}_{L2}} \\
&= \frac{50\,\mathrm{k\Omega} \cdot j25\,\mathrm{k\Omega}}{50\,\mathrm{k\Omega} + j25\,\mathrm{k\Omega}} \\
&= \frac{j1\,250\,\mathrm{k\Omega}^2}{50\,\mathrm{k\Omega} + j25\,\mathrm{k\Omega}} \\
&= \frac{j1\,250\,\mathrm{k\Omega}^2 \cdot (50\,\mathrm{k\Omega} - j25\,\mathrm{k\Omega})}{(50\,\mathrm{k\Omega} + j25\,\mathrm{k\Omega}) \cdot (50\,\mathrm{k\Omega} - j25\,\mathrm{k\Omega})} \\
&= \frac{j62\,500\,\mathrm{k\Omega}^3 + 31\,250\,\mathrm{k\Omega}^3}{2\,500\,\mathrm{k\Omega}^2 + 625\,\mathrm{k\Omega}^2} \\
&= \frac{j62\,500\,\mathrm{k\Omega}^3 + 31\,250\,\mathrm{k\Omega}^3}{3\,125\,\mathrm{k\Omega}^2} \\
&= j\frac{62\,500\,\mathrm{k\Omega}^3}{3\,125\,\mathrm{k\Omega}^2} + \frac{31\,250\,\mathrm{k\Omega}^3}{3\,125\,\mathrm{k\Omega}^2} \\
\underline{Z}_1 &= j20\,\mathrm{k\Omega} + 10\,\mathrm{k\Omega}
\end{aligned}$$

Jetzt kann $\underline{Z}_1$ mit $\underline{X}_{C2}$ zu $\underline{Z}_2$ zusammengefasst werden.

$$\underline{Z}_2 = \underline{X}_{C2} + \underline{Z}_1 = -jX + j20\,\mathrm{k\Omega} + 10\,\mathrm{k\Omega}$$

Zu Z_2 ist C_1 parallelgeschaltet. Den zugehörigen Ersatzwiderstand nenne ich Z_3. Wir können $\underline{Z}_3$ über die Parallelschaltungsformel berechnen:

$$
\begin{aligned}
\underline{Z}_3 &= \frac{\underline{X}_{C1} \cdot \underline{Z}_2}{\underline{X}_{C1} + \underline{Z}_2} \\
&= \frac{-j5\,\mathrm{k\Omega} \cdot (-jX + j20\,\mathrm{k\Omega} + 10\,\mathrm{k\Omega})}{-j5\,\mathrm{k\Omega} - jX + j20\,\mathrm{k\Omega} + 10\,\mathrm{k\Omega}} \\
\underline{Z}_3 &= \frac{-5\,\mathrm{k\Omega}X + 100\,\mathrm{k\Omega}^2 - j50\,\mathrm{k\Omega}^2}{j15\,\mathrm{k\Omega} - jX + 10\,\mathrm{k\Omega}}
\end{aligned}
$$

Nun kann der Ersatzwiderstand Z der Gesamtschaltung aufgestellt werden:

$$
\underline{Z} = \underline{Z}_3 + \underline{X}_{L1} = \frac{-5\,\mathrm{k\Omega}X + 100\,\mathrm{k\Omega}^2 - j50\,\mathrm{k\Omega}^2}{j15\,\mathrm{k\Omega} - jX + 10\,\mathrm{k\Omega}} + j4\,\mathrm{k\Omega}
$$

Weil $\underline{Z}$ **reell** werden soll, gilt: $\underline{Z} = Z$ Die sich damit ergebende Gleichung kann dann in eine Lineare Gleichung umgeformt werden.

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{-5\,\mathrm{k\Omega}X + 100\,\mathrm{k\Omega}^2 - j50\,\mathrm{k\Omega}^2}{j15\,\mathrm{k\Omega} - jX + 10\,\mathrm{k\Omega}} + j4\,\mathrm{k\Omega} \qquad | \cdot \text{Nenner} \\
Z \cdot (j15\,\mathrm{k\Omega} - jX + 10\,\mathrm{k\Omega}) &= -5\,\mathrm{k\Omega}X + 100\,\mathrm{k\Omega}^2 - j50\,\mathrm{k\Omega}^2 + j4\,\mathrm{k\Omega} \cdot (j15\,\mathrm{k\Omega} - jX + 10\,\mathrm{k\Omega}) \\
j15\,\mathrm{k\Omega}Z - jXZ + 10\,\mathrm{k\Omega}Z &= -5\,\mathrm{k\Omega}X + 100\,\mathrm{k\Omega}^2 - j50\,\mathrm{k\Omega}^2 - 60\,\mathrm{k\Omega}^2 + 4\,\mathrm{k\Omega}X + j40\,\mathrm{k\Omega}^2 \\
j15\,\mathrm{k\Omega}Z - jXZ + 10\,\mathrm{k\Omega}Z &= -1\,\mathrm{k\Omega}X + 40\,\mathrm{k\Omega}^2 - j10\,\mathrm{k\Omega}^2
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung kann nun in eine Realteil- und in eine Imaginärteilgleichung aufgespalten werden.

$$
\boxed{
\begin{array}{lrcl}
\text{Re:} & 10\,\mathrm{k\Omega}Z &=& -1\,\mathrm{k\Omega}X + 40\,\mathrm{k\Omega}^2 \\
\text{Im:} & 15\,\mathrm{k\Omega}Z - XZ &=& -10\,\mathrm{k\Omega}^2
\end{array}
}
$$

Die Realteilgleichung kann einfach nach Z aufgelöst werden.

$$
\begin{aligned}
10\,\mathrm{k\Omega}Z &= -1\,\mathrm{k\Omega}X + 40\,\mathrm{k\Omega}^2 \quad | : (10\,\mathrm{k\Omega}) \\
Z &= -0{,}1X + 4\,\mathrm{k\Omega}
\end{aligned}
$$

Dieser Term kann nun für Z in die Imaginärteilgleichung eingesetzt werden. Man erhält eine Quadratische Gleichung, die z.B. mit der p-q-Forlel gelöst werden kann.

$$
\begin{aligned}
15\,\mathrm{k\Omega}Z - XZ &= -10\,\mathrm{k\Omega}^2 \\
15\,\mathrm{k\Omega} \cdot (-0{,}1X + 4\,\mathrm{k\Omega}) - X \cdot (-0{,}1X + 4\,\mathrm{k\Omega}) &= -10\,\mathrm{k\Omega}^2 \\
-1{,}5\,\mathrm{k\Omega} \cdot X + 60\,\mathrm{k\Omega}^2 + 0{,}1X^2 - 4\,\mathrm{k\Omega} \cdot X &= -10\,\mathrm{k\Omega}^2 \qquad | + 10\,\mathrm{k\Omega} \\
0{,}1X^2 - 5{,}5\,\mathrm{k\Omega} \cdot X + 70\,\mathrm{k\Omega}^2 &= 0 \qquad | \cdot 10 \\
X^2 - 55\,\mathrm{k\Omega} \cdot X + 700\,\mathrm{k\Omega}^2 &= 0 \\
X_{1/2} &= 27{,}5\,\mathrm{k\Omega} \pm \sqrt{756{,}25\,\mathrm{k\Omega}^2 - 700\,\mathrm{k\Omega}^2} \\
&= 27{,}5\,\mathrm{k\Omega} \pm 7{,}5\,\mathrm{k\Omega} \\
X_1 = 35\,\mathrm{k\Omega} & \qquad X_2 = 20\,\mathrm{k\Omega}
\end{aligned}
$$

Zu beiden Lösungen muss noch die entsprechende Kapazität bestimmt werden. Dazu stelle ich zunächst die Formel um.

$$\begin{aligned} X_{C2} &= \frac{1}{\omega C_2} \\ C_2 &= \frac{1}{\omega X_{C2}} \end{aligned}$$

Beide Kapazitäten können nun bestimmt werden:

$$C_{21} = \frac{1}{\omega \cdot X_1} = \frac{1}{1\,000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 35\,\mathrm{k\Omega}} = 28{,}57\,\mathrm{nF}$$

$$C_{22} = \frac{1}{\omega \cdot X_2} = \frac{1}{1\,000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 20\,\mathrm{k\Omega}} = 50\,\mathrm{nF}$$

Zu jeder der beiden Lösungen gibt es natürlich einen anderen Gesamtwiderstand Z.

$$Z_{ges1} = -0{,}1X + 4\,\mathrm{k\Omega} = -0{,}1 \cdot 35\,\mathrm{k\Omega} + 4\,\mathrm{k\Omega} = 500\,\Omega$$

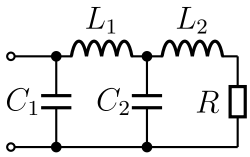
$$Z_{ges2} = -0{,}1X + 4\,\mathrm{k\Omega} = -0{,}1 \cdot 20\,\mathrm{k\Omega} + 4\,\mathrm{k\Omega} = 2\,\mathrm{k\Omega}$$

Zusammengefasste Ergebnisse:

Lösung 1: $\boxed{C_{21} = 28{,}57\,\mathrm{nF}}$ mit $\boxed{Z_1 = 500\,\Omega}$
Lösung 2: $\boxed{C_{22} = 50\,\mathrm{nF}}$ mit $\boxed{Z_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}}$

4.2.5 Aufgabe 5

Gegeben ist nebenstehende Schaltung. Bestimmen Sie den Widerstand R so, dass die gesamte Schaltung einen rein reellen Ersatzwiderstand hat! Berechnen Sie auch, wie groß dieser Ersatzwiderstand dann wird!
Gegeben sind folgende Werte:
$X_{L1} = 30\,\Omega \quad X_{L2} = 36\,\Omega \quad X_{C1} = 300\,\Omega \quad X_{C2} = 45\,\Omega$



Lösung: Zunächst werden die komplexen Widerstände aufgestellt.

$$\begin{aligned}
\underline{X}_{L1} &= j30\,\Omega\\
\underline{X}_{L2} &= j36\,\Omega\\
\underline{X}_{C1} &= -j300\,\Omega\\
\underline{X}_{C2} &= -j45\,\Omega\\
\underline{R} &= R
\end{aligned}$$

Die Zusammenfassung aus R und L_2 nenne ich Z_1.

$$\underline{Z}_1 = \underline{R} + \underline{X}_{L2} = R + j36\,\Omega$$

Zu Z_1 ist C_2 parallelgeschaltet. Diese Parallelschaltung nenne ich Z_2.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{X}_{C2}}{\underline{Z}_1 + \underline{X}_{C2}}\\
&= \frac{(R + j36\,\Omega)\cdot(-j45\,\Omega)}{R + j36\,\Omega - j45\,\Omega}\\
\underline{Z}_2 &= \frac{-j45\,\Omega R + 1\,620\,\Omega^2}{R - j9\,\Omega}
\end{aligned}$$

Zu Z_2 ist L_1 in Reihe geschaltet. Diese Reihenschaltung nenne ich Z_3.

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_3 &= \underline{Z}_2 + \underline{X}_{L1}\\
&= \frac{-j45\,\Omega R + 1\,620\,\Omega^2}{R - j9\,\Omega} + j30\,\Omega\\
&= \frac{-j45\,\Omega R + 1\,620\,\Omega^2}{R - j9\,\Omega} + \frac{j30\,\Omega\cdot(R - j9\,\Omega)}{R - j9\,\Omega}\\
&= \frac{-j45\,\Omega R + 1\,620\,\Omega^2 + j30\,\Omega R + 270\,\Omega^2}{R - j9\,\Omega}\\
\underline{Z}_3 &= \frac{-j15\,\Omega R + 1\,890\,\Omega^2}{R - j9\,\Omega}
\end{aligned}$$

Zu Z_3 ist C_1 parallelgeschaltet. Diese Parallelschaltung nenne ich Z, denn es ist der Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung.

$$
\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_3 \cdot \underline{X}_{C1}}{\underline{Z}_3 + \underline{X}_{C1}} \\
&= \frac{\frac{-j15\,\Omega R + 1\,890\,\Omega^2}{R - j9\,\Omega} \cdot (-j300\,\Omega)}{\frac{-j15\,\Omega R + 1\,890\,\Omega^2}{R - j9\,\Omega} - j300\,\Omega} \\
&= \frac{\frac{(-j15\,\Omega R + 1\,890\,\Omega^2) \cdot (-j300\,\Omega)}{R - j9\,\Omega}}{\frac{-j15\,\Omega R + 1\,890\,\Omega^2 - \mathrm{j}300\,\Omega \cdot (\mathrm{R} - \mathrm{j}9\,\Omega)}{R - j9\,\Omega}} \\
&= \frac{(-j15\,\Omega R + 1\,890\,\Omega^2) \cdot (-j300\,\Omega)}{-j15\,\Omega R + 1\,890\,\Omega^2 - \mathrm{j}300\,\Omega \cdot (\mathrm{R} - \mathrm{j}9\,\Omega)} \\
&= \frac{-\,4\,500\,\Omega^2 R - j567\,000\,\Omega^3}{-j15\,\Omega R + 1\,890\,\Omega^2 - j300\,\Omega R - 2\,700\,\Omega^2} \\
\underline{Z} &= \frac{-\,4\,500\,\Omega^2 R - j567\,000\,\Omega^3}{-j315\,\Omega R - 810\,\Omega^2}
\end{aligned}
$$

Da $\underline{Z}$ **reell** sein muss, gilt: $\underline{Z} = Z$.

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{-\,4\,500\,\Omega^2 R - j567\,000\,\Omega^3}{-j315\,\Omega R - 810\,\Omega^2} \\
Z \cdot (-j315\,\Omega R - 810\,\Omega^2) &= -4\,500\,\Omega^2 R - j567\,000\,\Omega^3 \\
-j315\,\Omega R Z - 810\,\Omega^2 Z &= -4\,500\,\Omega^2 R - j567\,000\,\Omega^3
\end{aligned}
$$

Diese Komplexe Gleichung kann nun in eine Realteil- und eine Imaginärteilgleichung aufgespalten werden.

$$
\boxed{
\begin{array}{lrcl}
\text{Re:} & -810\,\Omega^2 Z & = & -4\,500\,\Omega^2 R \\
\text{Im:} & -315\,\Omega R Z & = & -567\,000\,\Omega^3
\end{array}
}
$$

Nun kann die Realteilgleichung nach Z umgestellt werden.

$$
\begin{aligned}
-810\,\Omega^2 Z &= -4\,500\,\Omega^2 R \quad | : (-810\,\Omega^2) \\
Z &= \frac{50}{9} R
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis wird in die Imaginärteilgleichung eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
-315\,\Omega R Z &= -567\,000\,\Omega^3 \\
-315\,\Omega R \cdot \frac{50}{9} R &= -567\,000\,\Omega^3 \\
-1\,750\,\Omega R^2 &= -567\,000\,\Omega^3 \quad | : (-1\,750\,\Omega) \\
R^2 &= 324\,\Omega^2 \quad |\sqrt{\ } \\
R_{1/2} &= \pm 18\,\Omega
\end{aligned}
$$

Der negative Wert entfällt natürlich aus elektrotechnischen Gründen. Es gibt nur die eine Lösung:

$$R = 18\,\Omega$$

Dieser Wert kann in die umgeformte Realteilgleichung eingesetzt werden, um Z zu erhalten.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{50}{9}R \\ Z &= \frac{50}{9} \cdot 18\,\Omega \\ Z &= 100\,\Omega \end{aligned}$$

Zusammengefasste Ergebnisse: $\boxed{R = 18\,\Omega}$ und $\boxed{Z = 100\,\Omega}$