# Grundlagen der Zweitor-/Vierpol-Theorie

W. Kippels

28. Juni 2013

## Inhaltsverzeichnis

**1 Definition des Zweitors** **2**

**2 Widerstands-Matrix** **2**

**3 Leitwert-Matrix** **2**

**4 Hybrid-Matrix** **3**

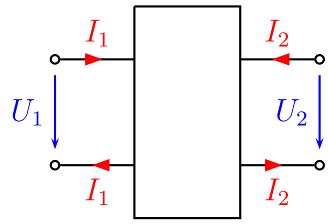
**5 Umrechnungen** **4**

**6 Eigenschaften besonderer Zweitore** **4**
6.1 Reziprozität . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
6.2 Symmetrie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

**7 Schaltungsbeispiele** **5**
7.1 Schaltungsbeispiel 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
7.2 Schaltungsbeispiel 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
7.3 Schaltungsbeispiel 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

# 1 Definition des Zweitors

Nebenstehend ist ein Zweitor – auch Vierpol genannt – mit seinen Anschlüssen sowie der Bezeichnung der Spannungen und Ströme dargestellt. Die beiden linken Anschlüsse stellen Tor 1 dar, die beiden rechten Tor 2. Um als Tor angesehen werden zu können, muss an beiden Toren die **Torbedingung** erfüllt sein. Das bedeutet, dass der Strom, der am oberen Toranschluss hineinfließt, am unteren Toranschluss wieder herausfließt. In der Schaltskizze wird das durch gleiche Namen der Ströme ($I_1$ bzw. $I_2$) ausgedrückt. **Die angegebenen Strom- und Spannungsrichtungen sind verbindlich!**




# 2 Widerstands-Matrix

Eine Möglichkeit, ein Zweitor zu beschreiben, ist die Angabe der **Widerstands-Parameter**. Da die Widerstände neben Wirkanteilen auch Blindanteile enthalten können, werden die Parameter vom Grundsatz her als **Komplexe** Größen definiert. Diese Parameter fasst man zu einer **Matrix** zusammen.

Die Widerstandsmatrix lautet:

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Parameter sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{11} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \quad \text{bei} \quad \underline{I}_2 = 0 \quad \text{(Tor 2 offen)} \\
\underline{Z}_{12} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \quad \text{bei} \quad \underline{I}_1 = 0 \quad \text{(Tor 1 offen)} \\
\underline{Z}_{21} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \quad \text{bei} \quad \underline{I}_2 = 0 \quad \text{(Tor 2 offen)} \\
\underline{Z}_{22} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \quad \text{bei} \quad \underline{I}_1 = 0 \quad \text{(Tor 1 offen)}
\end{aligned}$$

# 3 Leitwert-Matrix

Wie wir noch sehen werden, ist die Angabe der Widerstandsparameter nicht bei jedem Zweitor möglich. Wenn beispielsweise das Zweitor nur je eine Verbindung zwischen den oberen Anschlüssen der Tore und den uteren Anschlüssen der Tore enthält, wird nirgendwo ein Strom fließen, wenn ein Tor offen bleibt. Dann müsste man durch 0 dividieren, was bekanntlich ja nicht möglich ist. In diesen Fällen können (meist) stattdessen die

**Leitwert-Parameter** angegeben werden.

Die Leitwertmatrix lautet:

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Parameter sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{11} &= \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \quad \text{bei} \quad \underline{U}_2 = 0 \quad \text{(Tor 2 kurzgeschlossen)} \\
\underline{Y}_{12} &= \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \quad \text{bei} \quad \underline{U}_1 = 0 \quad \text{(Tor 1 kurzgeschlossen)} \\
\underline{Y}_{21} &= \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \quad \text{bei} \quad \underline{U}_2 = 0 \quad \text{(Tor 2 kurzgeschlossen)} \\
\underline{Y}_{22} &= \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \quad \text{bei} \quad \underline{U}_1 = 0 \quad \text{(Tor 1 kurzgeschlossen)}
\end{aligned}$$

# 4 Hybrid-Matrix

Leider gibt es Schaltungen, die weder mit der Widerstands- noch mit der Leitwert-Matrix zu beschreiben sind. Wenn das Zweitor beispielsweise nur einen Transformator enthält, dann ist ein solcher Fall gegeben. Hier hilft die **Hybrid-Matrix** weiter. In der Hybrid-Matrix sind **unterschiedliche** Größen zusammengefasst. Es handelt sich um einen Widerstand, einen Leitwert, ein Spannungs- und ein Stromverhältnis. Einzelheiten sind im Folgenden dargestellt.

Die Hybridmatrix lautet:

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Parameter sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\underline{H}_{11} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \quad \text{bei} \quad \underline{U}_2 = 0 \quad \text{(Tor 2 kurzgeschlossen)} \\
\underline{H}_{12} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \quad \text{bei} \quad \underline{I}_1 = 0 \quad \text{(Tor 1 offen)} \\
\underline{H}_{21} &= \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \quad \text{bei} \quad \underline{U}_2 = 0 \quad \text{(Tor 2 kurzgeschlossen)} \\
\underline{H}_{22} &= \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \quad \text{bei} \quad \underline{I}_1 = 0 \quad \text{(Tor 1 offen)}
\end{aligned}$$

# 5 Umrechnungen

Die unterschiedlichen Parameter können in jeweils andere Parameter umgerechnet werden.[1] Ohne dass ich eine Herleitung dazu durchführen möchte, will ich folgende Umrechnungsformeln angeben:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\det \underline{Y}}$ | $\underline{Z}_{12} = -\frac{\underline{Y}_{12}}{\det \underline{Y}}$ | $\underline{Z}_{21} = -\frac{\underline{Y}_{21}}{\det \underline{Y}}$ | $\underline{Z}_{22} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\det \underline{Y}}$ |
| $\underline{Z}_{11} = \frac{\det \underline{H}}{\underline{H}_{22}}$ | $\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}}$ | $\underline{Z}_{21} = -\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}}$ | $\underline{Z}_{22} = \frac{1}{\underline{H}_{22}}$ |
| $\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\det \underline{Z}}$ | $\underline{Y}_{12} = -\frac{\underline{Z}_{12}}{\det \underline{Z}}$ | $\underline{Y}_{21} = -\frac{\underline{Z}_{21}}{\det \underline{Z}}$ | $\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\det \underline{Z}}$ |
| $\underline{Y}_{11} = \frac{1}{\underline{H}_{11}}$ | $\underline{Y}_{12} = -\frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{11}}$ | $\underline{Y}_{21} = \frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}}$ | $\underline{Y}_{22} = \frac{\det \underline{H}}{\underline{H}_{11}}$ |
| $\underline{H}_{11} = \frac{\det \underline{Z}}{Z_{22}}$ | $\underline{H}_{12} = \frac{\underline{Z}_{12}}{Z_{22}}$ | $\underline{H}_{21} = -\frac{\underline{Z}_{21}}{Z_{22}}$ | $\underline{H}_{22} = \frac{1}{Z_{22}}$ |
| $\underline{H}_{11} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}}$ | $\underline{H}_{12} = -\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}$ | $\underline{H}_{21} = \frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}}$ | $\underline{H}_{22} = \frac{\det \underline{Y}}{\underline{Y}_{11}}$ |

# 6 Eigenschaften besonderer Zweitore

## 6.1 Reziprozität

Zweitore können **reziprok** sein. Darunter versteht man folgendes:
Legt man eine Spannung $U_1$ an Tor 1 an, so ergibt sich an Tor 2 ein Strom $I_2$, wenn Tor 2 kurzgeschlossen wird. Legt man die gleiche Spannung als Spannung $U_2$ an Tor 2 an, so ergibt sich an einem reziproken Zweitor der gleiche Strom als Strom $I_1$ am kurzgeschlossenen Tor 1.

Alle Schaltungen, die ausschließlich R-L-C-Bauelemente enthalten, sind reziprok.

Reziproke Zweitore erfüllen folgende Bedingungen:

$$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12} \qquad \underline{Y}_{21} = \underline{Y}_{12} \qquad \underline{H}_{21} = -\underline{H}_{12}$$

Es reicht, wenn man eine der Bedingungen überprüft. Ist diese erfüllt, sind die anderen automatisch auch erfüllt.

## 6.2 Symmetrie

Ist ein Zweitor **symmetrisch** – das bedeutet, man kann die Tore ohne Funktionsänderung gegeneinander austauschen, dann gilt zusätzlich zur Reziprozitätsbedingung:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} \qquad \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22} \qquad \det \underline{H} = 1$$

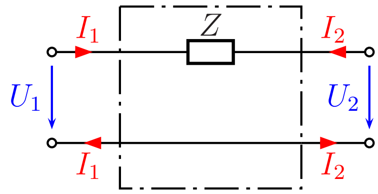
[1] Je nach Größe der jeweiligen Parameter kann es passieren, dass man dabei auch einmal durch Null dividieren muss. In diesem Fall ist eine Umrechnung natürlich nicht möglich.

# 7 Schaltungsbeispiele

Hier folgen noch ein paar einfache Schaltungsbeispiele. Beachtenswert ist, dass nicht alle Parameter zu jeder Schaltung aufgestellt werden können.

## 7.1 Schaltungsbeispiel 1

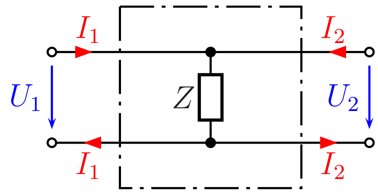
In dieser Schaltung kann niemals ein Strom ($I_1$ oder $I_2$) fließen, solange ein Tor offen bleibt. Die $Z$-Parameter können daher nicht gebildet werden, denn im Nenner steht jeweils der Strom $I_1$ oder $I_2$. Die $Y$- und auch die $H$-Parameter hingegen können aufgestellt werden. Hier folgen die zugehörigen Matritzen:




$$\underline{Z} \text{ existiert nicht} \qquad \underline{Y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\underline{Z}} & -\frac{1}{\underline{Z}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}} & \frac{1}{\underline{Z}} \end{pmatrix} \qquad \underline{H} = \begin{pmatrix} \underline{Z} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 7.2 Schaltungsbeispiel 2

Wenn in dieser Schaltung ein Tor (Tor 1 oder Tor 2) kurzgeschlossen wird, sind beide Spannungen ($U_1$ und $U_2$) Null. Da bei den $Y$-Parametern bei jeweils einem kurzgeschlossenen Tor eine dieser Spannungen im Nenner steht, sind die $Y$-Parameter in dieser Schaltung nicht zu bestimmen. $Z$- und $H$-Parameter können hingegen angegeben werden. Diese lauten wie folgt:




$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} \underline{Z} & -\underline{Z} \\ -\underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix} \qquad \underline{Y} \text{ existiert nicht} \qquad \underline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{\underline{Z}} \end{pmatrix}$$

## 7.3 Schaltungsbeispiel 3

Bei einem (idealen) Transformator als Zweitor können weder $Z$- noch $Y$-Parameter angegeben werden. Man kann sich leicht selbst überlegen, warum das so ist. Lediglich $H$-Parameter können angegeben werden:

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{pmatrix}$$