Übungsaufgaben zur Vektorrechnung

W. Kippels

29. November 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben

Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben. Die Lösungen befinden sich im nächsten Kapitel.

1.1 Aufgabe 1

Sind die Vektoren **linear abhängig** (Aufg. a und b) bzw. **komplanar** (Aufg. c bis e)?

1.1.1 Aufgabe 1a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Aufgabe 1b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.1.3 Aufgabe 1c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

1.1.4 Aufgabe 1d

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.1.5 Aufgabe 1e

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Vektoren **komplanar** sind!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1.3 Aufgabe 3

Stehen die Vektoren zueinander senkrecht (orthogonal)?

1.3.1 Aufgabe 3a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3.2 Aufgabe 3b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Aufgabe 3c

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1.4 Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren aufeinander senkrecht stehen!

1.4.1 Aufgabe 4a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Aufgabe 4b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.5 Aufgabe 5

Ordnen Sie die fünf Vektoren nach der Länge der zugehörigen Pfeile!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1.6 Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Beträge der vier Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

1.7 Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

1.7.1 Aufgabe 7a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix}$$

1.7.2 Aufgabe 7b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1.8 Aufgabe 8

Bestimmen Sie die fehlende Komponente x so, dass sich ein Winkel von $60°$ zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ \sqrt{50} \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.9 Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Parameter x, y und z so, dass die drei Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen!

1.9.1 Aufgabe 9a

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -25 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

1.9.2 Aufgabe 9b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ z \end{pmatrix}$$

1.10 Aufgabe 10

Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{d}$ senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem Betrag von $\vec{c}$!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -23,5 \end{pmatrix}$$

1.11 Aufgabe 11

Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks zwischen den Endpunkten der drei Vektoren!

1.11.1 Aufgabe 11a

Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1.11.2 Aufgabe 11b

Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2 Lösungen der Aufgaben

2.1 Aufgabe 1

2.1.1 Aufgabe 1a

Sind die Vektoren **linear abhängig**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante[1] $\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **linear abhängig**.

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 = 0$$

Die Determinante ist Null. $\Rightarrow$ Die Vektoren sind **linear abhängig**.

2.1.2 Aufgabe 1b

Sind die Vektoren **linear abhängig**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante $\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **linear abhängig**.

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 2 \neq 0$$

Die Determinante ist **nicht** Null. $\Rightarrow$ Die Vektoren sind **linear unabhängig**.

[1] Alle Hintergrundinformationen zu Determinanten, was das ist und wie sie berechnet wird, ist hier zu finden: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/det.pdf

2.1.3 Aufgabe 1c

Sind die Vektoren **komplanar**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante $\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **komplanar**.

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 & 1 & 2 \end{array}\right| = -10 - 10 - 10 + 10 + 10 + 10 = 0$$

Die Determinante ist Null. $\Rightarrow$ Die Vektoren sind **komplanar**.

2.1.4 Aufgabe 1d

Sind die Vektoren **komplanar**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante $\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **komplanar**.

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right| = 0 + 4 - 8 - 0 - 0 + 2 = -2 \neq 0$$

Die Determinante ist **nicht** Null. $\Rightarrow$ Die Vektoren sind **nicht komplanar**.

2.1.5 Aufgabe 1e

Sind die Vektoren **komplanar**?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Ich berechne die Determinante $\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$. Ist sie Null, dann sind die Vektoren **komplanar**.

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right. = -1 + 0 + 0 - 1 - 1 - 0 = -3 \neq 0$$

Die Determinante ist **nicht** Null. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Die Vektoren sind \textbf{nicht komplanar}.}}$

2.2 Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Vektoren **komplanar** sind!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\text{Vektoren } \vec{a},\ \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ komplanar} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) &= 0 \\
\left|\begin{array}{ccc|cc} a & -5 & 5 & a & -5 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right. &= 0 \\
0 + 0 + 30 - 0 - 12a + 30 &= 0 \\
-12a + 60 &= 0 \quad | -60 \\
-12a &= -60 \quad | : (-12) \\
a &= 5
\end{aligned}$$

Der fehlende Parameter ist: $\boxed{a = 5}$

2.3 Aufgabe 3

2.3.1 Aufgabe 3a

Stehen die Vektoren zueinander senkrecht (orthogonal)?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 \neq 0$$

Die Vektoren sind **nicht** orthogonal.

2.3.2 Aufgabe 3b

Stehen die Vektoren zueinander senkrecht (orthogonal)?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot (-4) + 4 \cdot (-3) = 0$$

Die Vektoren sind orthogonal.

2.3.3 Aufgabe 3c

Stehen die Vektoren zueinander senkrecht (orthogonal)?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = -10 + 12 - 2 = 0$$

Die Vektoren sind orthogonal.

2.4 Aufgabe 4

2.4.1 Aufgabe 4a

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix} &= 0 \\ -4 + x + 15 &= 0 \\ x + 11 &= 0 \quad |-11 \\ x &= -11 \end{aligned}$$

Der fehlende Parameter lautet: $\boxed{x = 11}$

2.4.2 Aufgabe 4b

Bestimmen Sie den Parameter x so, dass die Vektoren aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Bedingung für Orthogonalität lautet: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} &= 0 \\ 5x + 0 + 0 &= 0 \\ 5x &= 0 \quad |:5 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Der fehlende Parameter lautet: $\boxed{x = 0}$

2.5 Aufgabe 5

Ordnen Sie die fünf Vektoren nach der Länge der zugehörigen Pfeile!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lösung: Die Länge des Pfeiles entspricht dem Betrag des Vektors. Daher bestimme ich zunächst die Beträge der Vektoren.

$$\begin{array}{rcllcl}
|\vec{a}| & = & \sqrt{(-5)^2 + 12^2} & = \sqrt{169} & = & 13 \\
|\vec{b}| & = & \sqrt{6^2 + (-9)^2} & = \sqrt{117} & \approx & 10,82 \\
|\vec{c}| & = & \sqrt{2^2 + (-8)^2 + 10^2} & = \sqrt{168} & \approx & 12,96 \\
|\vec{d}| & = & \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + 11^2} & = \sqrt{179} & \approx & 13,38 \\
|\vec{e}| & = & \sqrt{7^2 + (-7)^2 + 7^2} & = \sqrt{147} & \approx & 12,12
\end{array}$$

Durch Vergleich der Werte – am besten der exakten mit Wurzel – ergibt sich folgende Reihenfolge:

$$\boxed{\vec{b} \quad \vec{e} \quad \vec{c} \quad \vec{a} \quad \vec{d}}$$

2.6 Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Beträge der vier Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcllcl}
|\vec{a}| & = & \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} & = \sqrt{169} & = & 13 \\
|\vec{b}| & = & \sqrt{(-21)^2 + (-28)^2} & = \sqrt{1225} & = & 35 \\
|\vec{c}| & = & \sqrt{(-12)^2 + 4^2 + (-3)^2} & = \sqrt{169} & = & 13 \\
|\vec{d}| & = & \sqrt{15^2 + (-16)^2 + 12^2} & = \sqrt{625} & = & 25
\end{array}$$

$$\boxed{|\vec{a}| = 13 \quad |\vec{b}| = 35 \quad |\vec{c}| = 13 \quad |\vec{d}| = 25}$$

2.7 Aufgabe 7

2.7.1 Aufgabe 7a

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zur Lösung dient die Grundformel: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle \vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle \vec{a}\vec{b} &= \vec{a} \cdot \vec{b} \quad | : \left(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\right) \\
\cos \angle \vec{a}\vec{b} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\
\angle \vec{a}\vec{b} &= \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\
\angle \vec{a}\vec{b} &= \arccos \frac{\begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ -28 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} \cdot \sqrt{(-21)^2 + (-28)^2}} \\
\angle \vec{a}\vec{b} &= \arccos \frac{105 + 336}{13 \cdot 35} \\
\angle \vec{a}\vec{b} &= \arccos \frac{441}{455} \\
\angle \vec{a}\vec{b} &\approx 14,25^\circ
\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen den Vektoren ist: $\boxed{\angle \vec{a}\vec{b} \approx 14,25^\circ}$

2.7.2 Aufgabe 7b

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zur Lösung dient die umgestellte Grundformel: $\angle\vec{a}\vec{b} = \arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

$$\begin{aligned}
\angle\vec{a}\vec{b} &= \arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \\
\angle\vec{a}\vec{b} &= \arccos\frac{\begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 36 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-9)^2+(-12)^2+36^2}\cdot\sqrt{24^2+(-6)^2+8^2}} \\
\angle\vec{a}\vec{b} &= \arccos\frac{-216+72+288}{39\cdot 26} \\
\angle\vec{a}\vec{b} &= \arccos\frac{144}{1014} \\
\angle\vec{a}\vec{b} &\approx 81,8357^\circ
\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen den Vektoren ist: $\boxed{\angle\vec{a}\vec{b} \approx 81,8357^\circ}$

2.8 Aufgabe 8

Bestimmen Sie die fehlende Komponente x so, dass sich ein Winkel von 60° zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ \sqrt{50} \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zur Lösung dient die Grundformel: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle\vec{a}\vec{b} &= \vec{a} \cdot \vec{b} \quad |:\left(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\right) \\
\sqrt{(-7)^2 + 1^2 + \left(\sqrt{50}\right)^2} \cdot \sqrt{x^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \cos 60° &= \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ \sqrt{50} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\
10 \cdot \sqrt{x^2 + 16} \cdot 0,5 &= -7x + 4 \quad |\ (\ )^2 \\
5 \cdot \sqrt{x^2 + 16} &= -7x + 4 \quad |\ (\ )^2 \\
25 \cdot (x^2 + 16) &= 49x^2 - 56x + 16 \\
25x^2 + 400 &= 49x^2 - 56x + 16 \\
-24x^2 + 56x + 384 &= 0 \quad |:(-24) \\
x^2 - \frac{7}{3}x - 16 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{576}{36}} \\
x_{1/2} &= \frac{7}{6} \pm \frac{25}{6} \\
x_1 = \frac{16}{3} &\qquad x_2 = -3
\end{aligned}$$

Im Verlauf der Lösung entstand eine **Wurzelgleichung**, die gelöst werden musste. Bekanntlich können dabei Pseudo-Lösungen entstehen, die aber die ursprüngliche Gleichung nicht erfüllen. Eine **Probe** mit beiden gefundenen Lösungskandidaten ist also unumgänglich.

Probe mit $\mathbf{x_1 = \frac{16}{3}}$:

$$\begin{aligned}
5 \cdot \sqrt{x_1^2 + 16} &\overset{?}{=} -7x_1 + 4 \\
5 \cdot \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16} &\overset{?}{=} -7 \cdot \frac{16}{3} + 4 \\
5 \cdot \frac{20}{3} &\overset{?}{=} -\frac{112}{3} + \frac{12}{3} \\
\frac{100}{3} &\neq -\frac{100}{3}
\end{aligned}$$

Probe mit $\mathbf{x_2 = -3}$:

$$\begin{aligned}
5 \cdot \sqrt{x_2^2 + 16} &\overset{?}{=} -7x_2 + 4 \\
5 \cdot \sqrt{(-3)^2 + 16} &\overset{?}{=} -7 \cdot (-3) + 4 \\
5 \cdot 5 &\overset{?}{=} 21 + 4 \\
25 &= 25
\end{aligned}$$

Es gibt also nur eine Lösung, nämlich: $\boxed{x_2 = -3}$

2.9 Aufgabe 9

2.9.1 Aufgabe 9a

Bestimmen Sie die Parameter x, y und z so, dass die drei Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -25 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung: Um drei Parameter zu bestimmen, benötigen wir drei Gleichungen. Diese erhalten wir durch die Bedingung des paarweisen Senkrechtstehens.

$$\begin{array}{llcrcl} (1) & \vec{a} \perp \vec{b} & \Rightarrow & \vec{a} \cdot \vec{b} & = & 0 \\ (2) & \vec{a} \perp \vec{c} & \Rightarrow & \vec{a} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ (3) & \vec{b} \perp \vec{c} & \Rightarrow & \vec{b} \cdot \vec{c} & = & 0 \end{array}$$

Die konkreten Werte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \vec{a} \cdot \vec{b} & = & 0 \\ (2) & \vec{a} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ (3) & \vec{b} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ \hline (1) & \begin{pmatrix} x \\ -25 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} & = & 0 \\ (2) & \begin{pmatrix} x \\ -25 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} & = & 0 \\ (3) & \begin{pmatrix} -3 \\ y \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} & = & 0 \\ \hline (1) & -3x - 25y + 12 & = & 0 \\ (2) & 4x - 25 - 3z & = & 0 \\ (3) & -12 + y - 4z & = & 0 \\ \hline (1) & -3x - 25y & = & -12 \\ (2) & 4x - 3z & = & 25 \\ (3) & +y - 4z & = & 12 \\ \hline \end{array}$$

Dieses Lineargleichungssystem kann nun mit einem beliebigen Lösungsverfahren gelöst werden.[2] Man erhält die Lösungen: $\boxed{x = 4 \quad y = 0 \quad z = -3}$

[2]Weitere Informationen zu möglichen Lösungsverfahren für Lineargleichungssysteme sind hier zu finden: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

2.9.2 Aufgabe 9b

Bestimmen Sie die Parameter x, y und z so, dass die drei Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung: Um drei Parameter zu bestimmen, benötigen wir drei Gleichungen. Diese erhalten wir durch die Bedingung des paarweisen Senkrechtstehens.

$$\begin{array}{lcrcl} (1) & \vec{a} \perp \vec{b} & \Rightarrow & \vec{a} \cdot \vec{b} & = & 0 \\ (2) & \vec{a} \perp \vec{c} & \Rightarrow & \vec{a} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ (3) & \vec{b} \perp \vec{c} & \Rightarrow & \vec{b} \cdot \vec{c} & = & 0 \end{array}$$

Die konkreten Werte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{l|rcl} (1) & \vec{a} \cdot \vec{b} & = & 0 \\ (2) & \vec{a} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ (3) & \vec{b} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ \hline (1) & \begin{pmatrix} x \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} & = & 0 \\ (2) & \begin{pmatrix} x \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ z \end{pmatrix} & = & 0 \\ (3) & \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ z \end{pmatrix} & = & 0 \\ \hline (1) & xy - 11 - 9 & = & 0 \\ (2) & 15x - 198 + 3z & = & 0 \\ (3) & 15y + 18 - 3z & = & 0 \\ \hline (1) & xy & = & 20 \\ (2) & 15x + 3z & = & 198 \\ (3) & 15y - 3z & = & -18 \\ \hline \end{array}$$

Da in Gleichung (1) das Produkt xy vorkommt, handelt es sich **nicht** um ein **lineares** Gleichungssystem. Einige Lösungsverfahren müssen daher entfallen. Daher verwende ich das **Einsetzungsverfahren**, denn das funktioniert immer. Ich löse Gleichung (3) nach z auf und setze das Ergebnis in Gleichung (2) ein. Gleichung (1) bleibt erhalten, da dort kein z vorkommt.

$$\begin{aligned} 15y - 3z &= -18 \quad | -15y \\ -3z &= -18 - 15y \quad | : (-3) \\ z &= 6 + 5y \end{aligned}$$

Eingesetzt in (2):

$$\begin{aligned} 15x + 3 \cdot (6 + 5y) &= 198 \\ 15x + 18 + 15y &= 198 \quad | - 18 \\ 15x + 15y &= 180 \end{aligned}$$

Jetzt stelle ich diese Gleichung nach y um und setze das Ergebnis in (1) ein.

$$\begin{aligned} 15x + 15y &= 180 \quad | - 15x \\ 15y &= 180 - 15x \quad | : 15 \\ y &= 12 - x \end{aligned}$$

Eingesetzt in (1):

$$\begin{aligned} xy &= 20 \\ x \cdot (12 - x) &= 20 \\ 12x - x^2 &= 20 \quad | - 20 \\ 12x - x^2 - 20 &= 0 \quad | \cdot (-1) \\ x^2 - 12x + 20 &= 0 \\ x_{1/2} &= 6 \pm \sqrt{36 - 20} \\ x_{1/2} &= 6 \pm 4 \\ x_1 = 10 & \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Zu jedem x-Wert gibt es passende y- und z-Werte.

$$y_1 = 12 - x_1 = 12 - 10 = 2$$

$$y_2 = 12 - x_2 = 12 - 2 = 10$$

$$z_1 = 6 + 5y_1 = 6 + 5 \cdot 2 = 16$$

$$z_2 = 6 + 5y_2 = 6 + 5 \cdot 10 = 56$$

Lösungen: $\boxed{x_1 = 10 \quad y_1 = 2 \quad z_1 = 16}$ und $\boxed{x_2 = 2 \quad y_2 = 10 \quad z_2 = 56}$

2.10 Aufgabe 10

Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{d}$ senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem Betrag von $\vec{c}$!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -23,5 \end{pmatrix}$$

Lösung: Einen beliebigen Vektor senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ findet man leicht mit Hilfe des **Kreuzproduktes**. Da er (vermutlich) noch nicht die richtige Länge hat, nenne ich ihn nicht $\vec{d}$ sondern $\vec{e}$.

$$\vec{e} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot 9 - 4 \cdot (-5) \\ 4 \cdot (-4) - (-2) \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 47 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt wird der Betrag von $\vec{c}$ und $\vec{e}$ bestimmt.

$$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + (-11)^2 + (-23,5)^2} = \sqrt{552,25} \approx 25,9663$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{22^2 + 47^2 + 2^2} = \sqrt{2697} \approx 51,9326$$

Ich berechne das „Verlängerungsverhältnis“ $\lambda = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{e}|}$ (das in Wahrheit für eine Verkürzung sorgt), mit dem $\vec{e}$ multipliziert werden muss, um $\vec{d}$ zu erhalten.

$$\lambda = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{e}|} = \frac{\sqrt{552,25}}{\sqrt{2697}} = 0,5$$

Damit erhalten wir:

$$\vec{d} = \lambda \cdot \vec{e} = 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 47 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 23,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist jedoch nicht die einzige Lösung. Auch der Vektor, der $\vec{d}$ genau entgegengesetzt ist, ist eine Lösung. Wir erhalten also:

$$\boxed{\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 23,5 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{ und } \boxed{\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -11 \\ -23,5 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

2.11 Aufgabe 11

Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks zwischen den Endpunkten der drei Vektoren!

2.11.1 Aufgabe 11a

Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zunächst müssen zwei Kantenvektoren des Dreiecks bestimmt werden. Den Kantenvektor von der Pfeilspitze von $\vec{a}$ zur Pfeilspitze von $\vec{b}$ nenne ich $\vec{d}$, den Kantenvektor von der Pfeilspitze von $\vec{a}$ zur Pfeilspitze von $\vec{c}$ nenne ich $\vec{e}$.

$$\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ -4+4 \\ -6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = -\vec{a} + \vec{c} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ -4+2 \\ -6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung eines **Parallelogramms** kann das Kreuzprodukt verwendet werden. Die gesuchte Dreieckfläche ist dann die Hälfte davon.

$$\vec{d} \times \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-2) \\ -1 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Jetzt muss der Betrag davon bestimmt werden:

$$|\vec{d} \times \vec{e}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$$

Die gesuchte Dreieckfläche ist davon die Hälfte.

$$\boxed{A_\Delta = 3\,\mathrm{FE}}$$

2.11.2 Aufgabe 11b

Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung: Zunächst müssen zwei Kantenvektoren des Dreiecks bestimmt werden. Den Kantenvektor von der Pfeilspitze von $\vec{a}$ zur Pfeilspitze von $\vec{b}$ nenne ich $\vec{d}$, den Kantenvektor von der Pfeilspitze von $\vec{a}$ zur Pfeilspitze von $\vec{c}$ nenne ich $\vec{e}$.

$$\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} = -\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+8 \\ -(-2)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = -\vec{a} + \vec{c} = -\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+6 \\ -(-2)+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung eines **Parallelogramms** kann das Kreuzprodukt verwendet werden. Die gesuchte Dreieckfläche ist dann die Hälfte davon. Leider ist jedoch das Kreuzprodukt nicht im $\mathbb{R}^2$ sondern nur im $\mathbb{R}^3$ definiert. Man kann sich jedoch helfen, indem man an jeden Vektor eine dritte Dimension mit dem Wert 0 anfügt. Damit erhalte ich:

$$\vec{d^*} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt kann das Kreuzprodukt berechnet werden:

$$\vec{d^*} \times \vec{e^*} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 0 \cdot 7 \\ 0 \cdot 2 - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 7 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Jetzt muss der Betrag davon bestimmt werden:

$$|\vec{d^*} \times \vec{e^*}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 22^2} = 22$$

Die gesuchte Dreieckfläche ist davon die Hälfte.

$$\boxed{A_\Delta = 11\,\mathrm{FE}}$$