Musterlösung Übungsarbeit VBFS24E

Aufgabe 1

Eine Parabel mit dem Formfaktor $a = 3$ verläuft durch die Punkte $P(-3|45)$ und $Q\left(\frac{2}{3}\middle|1\right)$. Ermitteln Sie rechnerisch die zugehörige Quadratische Funktion $f(x)$. Berechnen Sie auch den Scheitelpunkt der Parabel!

Lösung: Mit $a = 3$ lautet die Normalform:

$$f(x) = 3x^2 + bx + c \quad \textcolor{red}{(2)}$$

Die Koordinaten beider Punkte werden eingesetzt.

$$\begin{array}{lrcllrcl}
(1) & f(-3) & = & 45 & \Rightarrow & 3\cdot(-3)^2 + b\cdot(-3) + c & = & 45 \quad \textcolor{red}{(2)} \\
(2) & f\left(\frac{2}{3}\right) & = & 1 & \Rightarrow & 3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + b\cdot\dfrac{2}{3} + c & = & 1 \quad \textcolor{red}{(2)}
\end{array}$$

Die beiden Gleichungen werden in die Normalform gebracht.

$$\begin{array}{lrcll}
(1) & 3\cdot 9 - 3b + c & = & 45 & \mid -27 \\
(2) & 3\cdot\dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{3}\cdot b + c & = & 1 & \mid -\dfrac{4}{3} \\
\hline
(1) & -3b + c & = & 18 & \\
(2) & \dfrac{2}{3}\cdot b + c & = & -\dfrac{1}{3} & \mid \cdot 3 \\
\hline
(1) & -3b + c & = & 18 & \textcolor{red}{(1)} \\
(2) & 2b + 3c & = & -1 & \textcolor{red}{(1)}
\end{array}$$

Hier bietet sich das Einsetzungsverfahren zur Lösung an, indem (1) nach c aufgelöst und in (2) eingesetzt wird.

$$\begin{array}{rcll}
-3b + c & = & 18 & \mid +3b \\
c & = & 18 + 3b &
\end{array}$$

Eingesetzt in (2):

$$2b + 3c = -1$$

$$\begin{array}{rcll}
2b + 3\cdot(18 + 3b) & = & -1 & \\
2b + 54 + 9b & = & -1 & \mid -54 \\
11b & = & -55 & \mid : 11 \\
b & = & -5 & \textcolor{red}{(5)}
\end{array}$$

Der Wert wird in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl}
c & = & 18 + 3b \\
 & = & 18 + 3\cdot(-5) \\
c & = & 3 \quad \textcolor{red}{(2)}
\end{array}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = 3x^2 - 5x + 3}$ (1)

Zur Scheitelpunktbestimmung bietet sich die Berechnungsformel an.

$$\begin{aligned} x_s &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-5}{2 \cdot 3} \\ x_s &= \frac{5}{6} \qquad \text{(2)} \end{aligned}$$

Den zugehörenden Funktionswert y_s liefert die Funktionsgleichung.

$$\begin{aligned} y_s &= f(x_s) \\ &= 3x_s^2 - 5x_s + 3 \\ &= 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{6} + 3 \\ &= \frac{25}{12} - \frac{25}{6} + 3 \\ &= \frac{25}{12} - \frac{50}{12} + \frac{36}{12} \\ y_s &= \frac{11}{12} \quad \text{(2)} \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt lautet: $\boxed{S\left(\frac{5}{6} \middle| \frac{11}{12}\right)}$ (1)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$ der Parabel (Quadratische Funktion), die durch die Punkte $P_1(1|-12)$, $P_2(3|4)$ und $P_3(6|-2)$ verläuft!

Lösung: Die Normalform der Quadratischen Funktion lautet:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Die Koordinaten jedes Punktes liefern je eine Gleichung.

$$\begin{array}{llclcllcl}
(1) & f(1) & = & -12 & \Rightarrow & a\cdot 1^2 & +b\cdot 1 & +c & = & -12 \\
(2) & f(3) & = & 4 & \Rightarrow & a\cdot 3^2 & +b\cdot 3 & +c & = & 4 \\
(3) & f(6) & = & -2 & \Rightarrow & a\cdot 6^2 & +b\cdot 6 & +c & = & -2
\end{array}$$

Fasst man die Gleichungen zusammen, erhält man ein Lineargleichungssystem 3. Ordnung mit den Variablen a, b und c.

$$\begin{array}{lrrrcll}
(1) & a & +b & +c & = & -12 & \color{red}{(2)} \\
(2) & 9a & +3b & +c & = & 4 & \color{red}{(2)} \\
(3) & 36a & +6b & +c & = & -2 & \color{red}{(2)}
\end{array}$$

Das Gleichungssystem kann mit jedem bekannten Verfahren gelöst werden.

Lösungsvariante 1: Cramersche Regel

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\left|\begin{array}{rrr} -12 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{rr} \color{green}{-12} & \color{green}{1} \\ \color{green}{4} & \color{green}{3} \\ \color{green}{-2} & \color{green}{6} \end{array}}{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{rr} \color{green}{1} & \color{green}{1} \\ \color{green}{9} & \color{green}{3} \\ \color{green}{36} & \color{green}{6} \end{array}} \\
&= \frac{-36 - 2 + 24 + 6 + 72 - 4}{3 + 36 + 54 - 108 - 6 - 9} \\
&= \frac{60}{-30} \\
a &= -2 \quad \color{red}{(7)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -12 & 1 & 1 & -12 \\ 9 & 4 & 1 & 9 & 4 \\ 36 & -2 & 1 & 36 & -2 \end{array}\right.}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 9 & 3 \\ 36 & 6 & 1 & 36 & 6 \end{array}\right.} \\
&= \frac{4-432-18-144+2+108}{3+36+54-108-6-9} \\
&= \frac{-480}{-30} \\
b &= 16 \quad (4)
\end{aligned}
$$

Den Parameter c bestimme ich durch Einsetzen in (1).

$$
\begin{aligned}
a+b+c &= -12 \\
-2+16+c &= -12 \\
14+c &= -12 \quad | -14 \\
c &= -26 \quad (2)
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Funktion lautet: $\boxed{f(x) = -2x^2 + 16x - 26}$ (1)

Lösungsvariante 2: Additions-/Subtraktionsverfahren

$$
\begin{array}{rrrrcl}
(1) & a & +b & +c & = & -12 \\
(2) & 9a & +3b & +c & = & 4 \\
(3) & 36a & +6b & +c & = & -2
\end{array}
$$

Da der Parameter vor c überall gleich ist, bietet sich dieses Verfahren an. Ich subtrahiere (1) von (2), so dass c wegfällt.

$$
\begin{array}{rrrrcll}
(1) & a & +b & +c & = & -12 & |- \\
(2) & 9a & +3b & +c & = & 4 & | \\
\hline
(4) & 8a & +2b & & = & 16 & (2)
\end{array}
$$

Jetzt subtrahiere ich (1) von (3), so dass wieder c wegfällt.

$$
\begin{array}{rrrrcll}
(1) & a & +b & +c & = & -12 & |- \\
(3) & 36a & +6b & +c & = & -2 & | \\
\hline
(5) & 35a & +5b & & = & 10 & (2)
\end{array}
$$

Mit den Gleichungen (4) und (5) habe ich ein Gleichungssystem mit nur noch zwei Variablen. Für den nächsten Reduktionsschritt verwende ich wieder das Additions-/Subtraktionsverfahren.

$$\begin{array}{lrrcll}
(4) & 8a & +2b & = & 16 & | \cdot 5 \\
(5) & 35a & +5b & = & 10 & | \cdot 2 \\
\hline
(4) & 40a & +10b & = & 80 & | \\
(5) & 70a & +10b & = & 20 & | - \\
\hline
 & -30a & & = & 60 & | : (-30) \\
 & a & & = & -2 & \quad \color{red}{(5)}
\end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in (4) ein, um b zu berechnen.

$$\begin{array}{rcll}
8a + 2b & = & 16 & \\
8 \cdot (-2) + 2b & = & 16 & \\
-16 + 2b & = & 16 & | + 16 \\
2b & = & 32 & | : 2 \\
b & = & 16 & \quad \color{red}{(2)}
\end{array}$$

Beide Ergebnisse setze ich in (1) ein.

$$\begin{array}{rcll}
a + b + c & = & -12 & \\
-2 + 16 + c & = & -12 & \\
14 + c & = & -12 & | - 14 \\
c & = & -26 & \quad \color{red}{(2)}
\end{array}$$

Die gesuchte Funktion lautet: $\boxed{f(x) = -2x^2 + 16x - 26}$ $\color{red}{(1)}$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Schnittpunkte (falls vorhanden) der beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen:

$$f_1(x) = 5x^2 - 4x - 5 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = 3x^2 + 2x + 3$$

Lösung: Zur Schnittpunktbestimmung müssen die Funktionsgleichungen gleichgesetzt werden:

$$\begin{array}{rcll}
f_1(x_s) &=& f_2(x_s) & \\
5x_s^2 - 4x_s - 5 &=& 3x_s^2 + 2x_s + 3 & \mid -3x_s^2 - 2x_s - 3 \quad {\color{red}(3)} \\
2x_s^2 - 6x_s - 8 &=& 0 & \mid : 2 \\
x_s^2 - 3x_s - 4 &=& 0 & {\color{red}(3)} \\
x_{S1/2} &=& \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} & \\
x_{S1/2} &=& \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} & \\
x_{S1/2} &=& \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} & \\
x_{S1/2} &=& \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} & \\
x_{S1} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4 & & x_{S2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1 & {\color{red}(6)}
\end{array}$$

Zu beiden x-Werten muss der zugehörige y-Wert bestimmt werden. Dazu verwende ich willkürlich f_2.

$$y_{S1} = f_2(x_{S1}) = 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 3 = 59 \quad {\color{red}(3)}$$

$$y_{S2} = f_2(x_{S2}) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 4 \quad {\color{red}(3)}$$

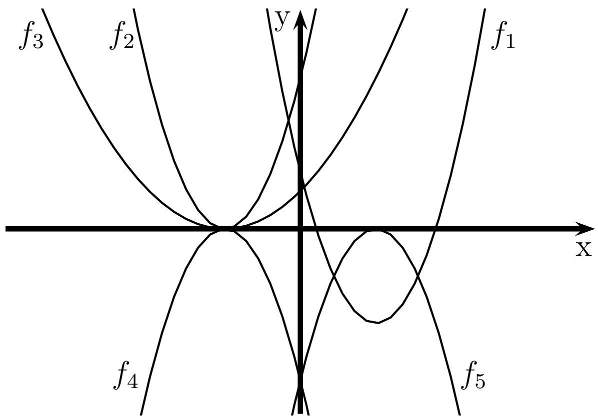
Zusammengefasste Lösungen: $\boxed{S_1(4|59)}$ und $\boxed{S_2(-1|4)}$ $\quad {\color{red}(2)}$

Aufgabe 4

Nebenstehend sind einige Parabeln dargestellt. Zu ihnen gehören die Funktionsgleichungen:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= a_1x^2 + b_1x + c_1 \\
f_2(x) &= a_2x^2 + b_2x + c_2 \\
f_3(x) &= a_3x^2 + b_3x + c_3 \\
f_4(x) &= a_4x^2 + b_4x + c_4 \\
f_5(x) &= a_5x^2 + b_5x + c_5
\end{aligned}$$

Kreuzen Sie bei den nachfolgenden Behauptungen die jeweils richtige an.



Lösung:

◯ $c_1 > c_2$	◯ $c_1 = c_2$	⊗ $c_1 < c_2$	◯ Keine der Aussagen ist richtig.
⊗ $a_2 > a_3$	◯ $a_2 = a_3$	◯ $a_2 < a_3$	◯ Keine der Aussagen ist richtig.
⊗ $a_2 > a_4$	◯ $a_2 = a_4$	◯ $a_2 < a_4$	◯ Keine der Aussagen ist richtig.
◯ $a_5 > a_4$	⊗ $a_5 = a_4$	◯ $a_5 < a_4$	◯ Keine der Aussagen ist richtig.
◯ $c_5 > c_4$	⊗ $c_5 = c_4$	◯ $c_5 < c_4$	◯ Keine der Aussagen ist richtig.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die **Nullstellen** x_{01} und x_{02} sowie den **Scheitelpunkt** $S(x_s|y_s)$ der Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3x^2 - 12x - 15$!

Lösung:

1. Nullstellenbestimmung: Zur Nullstellenberechnung muss der Funktionsterm gleich Null gesetzt werden.

$$
\begin{array}{rcll}
3x_0^2 - 12x_0 - 15 & = & 0 & |:3 \quad (2) \\
x_0^2 - 4x_0 - 5 & = & 0 & |\text{ p-q-Formel} \quad (2) \\
x_{01/02} & = & -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-5)} & \quad (2) \\
& = & 2 \pm \sqrt{4+5} & \\
& = & 2 \pm 3 & \quad (2) \\
x_{01} = 2+3 = 5 & & x_{02} = 2-3 = -1 & \quad (2)
\end{array}
$$

Ergebnis: Die Nullstellen liegen bei $x_{01} = 5$ und $x_{02} = -1$.

2. Scheitelpunktbestimmung: Der x-Wert x_s des Scheitelpunktes kann mit der Scheitelpunktformel bestimmt werden.

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 3} = 2 \quad (5)$$

Den zugehörigen y-Wert y_s liefert die Funktionsgleichung, wenn man für x den gefundenen Wert x_s einsetzt.

$$y_s = 3x_s^2 - 12x_s - 15 = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 - 15 = 12 - 24 - 15 = -27 \quad (4)$$

Ergebnis: Der Scheitelpunkt liegt bei $S(2|-27)$. (1)