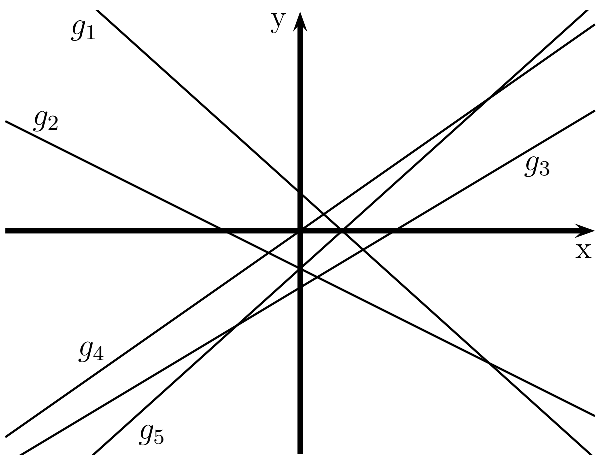
Musterlösung Übungsarbeit vom 13.03.2025

Aufgabe 1

Nebenstehend sind die Funktionsgraphen von fünf Linearen Funktion dargestellt. Eine Skalierung an den Achsen ist **nicht** bekannt. Welche der nachfolgenden Funktionen können jeweils zu diesen Graphen passen? Tragen Sie bitte nur die möglichen Funktionsnamen **aller** möglichen Funktionen ein, z.B. so: f_2, f_3. (Möglich: 0 bis 2 Funktionen)



$f_1(x) = x - 1$	$f_2(x) = -x - 1$
$f_3(x) = 1{,}5x$	$f_4(x) = -2x$
$f_5(x) = -x + 1$	$f_6(x) = 2x - 3$
$f_7(x) = 2x + 1$	

Zu g_1 könnte passen: f_5

Zu g_2 könnte passen: f_2

Zu g_3 könnte passen: f_1 oder f_6

Zu g_4 könnte passen: f_3

Zu g_5 könnte passen: f_1 oder f_6

Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte $P_1(-6|-2)$ und $P_2(3|4)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f, deren Funktionsgraph durch diese beiden Punkte verläuft. Berechnen Sie auch die Nullstelle x_0 dieser Funktion!

Lösung:

Bestimmung der Funktionsgleichung:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} && \color{red}{(1)} \\ &= \frac{4-(-2)}{3-(-6)} && \color{red}{(2)} \\ &= \frac{6}{9} \\ m &= \frac{2}{3} && \color{red}{(2)} \end{aligned}$$

Vorläufige Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + b \quad \color{red}{(2)}$$

Koordinaten von $P_1(-5|-2)$ einsetzen:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= y_1 && && \color{red}{(2)} \\ \tfrac{2}{3}x_1 + b &= y_1 \\ \tfrac{2}{3} \cdot (-6) + b &= -2 && && \color{red}{(2)} \\ -4 + b &= -2 && \mid +4 \\ b &= 2 && && \color{red}{(2)} \end{aligned}$$

Funktionsgleichung: $\boxed{f(x) = \frac{2}{3}x + 2}$ $\color{red}{(1)}$

Nullstellenberechnung:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ \tfrac{2}{3}x_0 + 2 &= 0 && \mid \cdot 3 && \color{red}{(2)} \\ 2x_0 + 6 &= 0 && \mid -6 && \color{red}{(1)} \\ 2x_0 &= -6 && \mid : 2 && \color{red}{(1)} \\ x_0 &= -3 && && \color{red}{(2)} \end{aligned}$$

Nullstelle: $\boxed{x_0 = -3}$

Aufgabe 3

Die Gerade der Linearen Funktion f_1 schneidet die x-Achse bei $x_0 = -2$ und die y-Achse bei $y_0 = 3$. Die Gerade der Funktion f_2 verläuft durch die Punkte $P_1(1|-3)$ und $P_2(4|6)$. Stellen Sie die beiden Geradengleichungen auf und berechnen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden!

Lösung: Die Funktion f_1 hat die allgemeine Form:

$$f_1(x) = m_1 \cdot x + b_1$$

$y_0 = 3$ bedeutet sofort $b_1 = 3$, denn b stellt immer den y-Achsenabschnitt dar. Damit lautet die Funktion:

$$f_1(x) = m_1 \cdot x + 3 \quad \color{red}{(1)}$$

Setze ich für x den Wert x_0 ein, dann erhalte ich 0, weil bei $x = x_0$ eine **Nullstelle** liegt.

$$f_1(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 \cdot x_0 + 3 = 0$$

Daraus kann m_1 berechnet werden:

$$\begin{array}{rcll} m_1 \cdot x_0 + 3 &=& 0 & \\ m_1 \cdot (-2) + 3 &=& 0 & |-3 \\ -2m_1 &=& -3 & |:(-2) \\ m_1 &=& \dfrac{3}{2} & \qquad \color{red}{(2)} \end{array}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f_1(x) = \frac{3}{2}x + 3}$ $\color{red}{(1)}$

Die Funktion f_2 hat die allgemeine Form:

$$f_2(x) = m_2 \cdot x + b_2$$

Die Steigung m_2 kann mit Hilfe der Steigungsformel sofort aus den Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 berechnet werden.

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-3)}{4-1)} = \frac{9}{3} = 3 \quad \color{red}{(2)}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung:

$$f_2(x) = 3x + b_2 \quad \color{red}{(1)}$$

Zur Bestimmung von b_2 werden die Koordinaten des Punktes P_1 oder P_2 in diese Funktionsgleichung eingesetzt. Ich verwende den Punkt P_1.

$$\begin{array}{rcll} f_2(x_1) &=& y_1 & \\ f_2(1) &=& -3 & \\ 3 \cdot 1 + b_2 &=& -3 & \qquad \color{red}{(2)} \\ 3 + b_2 &=& -3 & |-3 \\ b_2 &=& -6 & \qquad \color{red}{(2)} \end{array}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $\boxed{f_2(x) = 3x - 6}$ (1)

Zur Bestimmung des Schnittpunktes werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt.

$$\begin{aligned}
f_1(x_s) &= f_2(x_s) & & \\
\frac{3}{2}x_s + 3 &= 3x_s - 6 & |\cdot 2 & \quad (1)\\
3x_s + 6 &= 6x_s - 12 & |-6-6x_s & \quad (2)\\
-3x_s &= -18 & |:(-3) & \\
x_s &= 6 & & \quad (2)
\end{aligned}$$

Der zugehörige y-Wert wird durch Einsetzen in eine der beiden Funktionsgleichungen ermittelt. Ich suche mir dafür f_2 aus.

$$y_s = f_2(6) = 3 \cdot 6 - 6 = 18 - 6 = 12 \quad (2)$$

Der Schnittpunkt lautet also: $\boxed{S(6|12)}$ (1)

Aufgabe 4

Die beiden Geraden mit den Funktionsgleichungen

$$f_1(x) = 2x - 5 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = -3x + 10$$

schneiden sich im Punkt P. Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Geraden $f_3(x)$, die eine Parallele zu der Geraden mit der Funktionsgleichung

$$f_4(x) = \frac{1}{7}x + \frac{1}{5}$$

darstellt und durch P verläuft.

Lösung:

1. Schnittpunktbestimmung

$$\begin{aligned} f_1(x_P) &= f_2(x_P) \\ 2x_P - 5 &= -3x_P + 10 && |+5+3x_P \\ 5x_P &= 15 && |:5 \\ x_P &= 3 && (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_P &= f_1(x_P) \\ &= 2x_P - 5 \\ &= 2 \cdot 3 - 5 \\ y_P &= 1 && (5) \end{aligned}$$

Schnittpunkt: $\boxed{P(3|1)}$

2. Funktionsgleichung ermitteln

$$f_3(x) = mx + b \quad (1)$$

Aus f_4 übernommen: $m = \frac{1}{7}$ (3)

$$f_3(x) = \frac{1}{7}x + b \quad (1)$$

Koordinaten von P einsetzen:

$$\begin{aligned} f_3(x_P) &= y_P \\ f_3(3) &= 1 \\ \frac{1}{7} \cdot 3 + b &= 1 \\ \frac{3}{7} + b &= \frac{7}{7} && |-\frac{3}{7} \\ b &= \frac{4}{7} && (4) \end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{f_3(x) = \frac{1}{7}x + \frac{4}{7}}$ (1)

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Lösungsmenge in nachfolgendem Gleichungssystem mit Hilfe der **Cramerschen Regel**!

$$\begin{array}{lrrcr} (1) & 5x & -12y & = & -9 \\ (2) & -7x & +4y & = & -13 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -9 & -12 \\ -13 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -12 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}} && \color{red}{(4)} \\ &= \frac{-9 \cdot 4 - (-13) \cdot (-12)}{5 \cdot 4 - (-7) \cdot (-12)} && \color{red}{(4)} \\ &= \frac{-36 - 156}{20 - 84} \\ &= \frac{-192}{-64} \\ x &= 3 && \color{red}{(4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & -9 \\ -7 & -13 \end{vmatrix}}{-64} && \color{red}{(3)} \\ &= \frac{5 \cdot (-13) - (-7) \cdot (-9)}{-64} && \color{red}{(2)} \\ &= \frac{-65 - 63}{-64} \\ &= \frac{-128}{-64} \\ y &= 2 && \color{red}{(3)} \end{aligned}$$

Das Ergebnis wird als Lösungsmenge geschrieben: $\boxed{L = \{(3|2)\}}$

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Variable x in nachfolgendem Lineargleichungssystem mit Hilfe der **Cramerschen Regel**!

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2x - 3y + 2z & = & 6 \\ (2) & -3x + 5y - 2z & = & -3 \\ (3) & 5x + 3y - 3z & = & -4 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\left|\begin{array}{rrr} 6 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -4 & 3 & -3 \end{array}\right| \begin{array}{rr} 6 & -3 \\ -3 & 5 \\ -4 & 3 \end{array}}{\left|\begin{array}{rrr} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & -3 \end{array}\right| \begin{array}{rr} 2 & -3 \\ -3 & 5 \\ 5 & 3 \end{array}} && (8) \\
&= \frac{-90 - 24 - 18 + 40 + 36 + 27}{-30 + 30 - 18 - 50 + 12 + 27} && (8) \\
&= \frac{-29}{-29} \\
x &= 1 && (4)
\end{aligned}$$