

Trigonometrische Funktionen

W. Kippels

14. August 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Trigonometrie	2
2 Verschiebungen	2
2.1 Vertikale Verschiebung	2
2.2 Horizontale Verschiebung	3
3 Dehnung und Stauchung	4
3.1 Vertikale Dehnung und Stauchung	4
3.2 Horizontale Dehnung und Stauchung	5
4 Gemischte Dehnungen, Stauchungen und Verschiebungen	6

1 Grundlagen der Trigonometrie

An dieser Stelle möchte ich auf die Grundlagen verweisen, die hier zu finden sind:

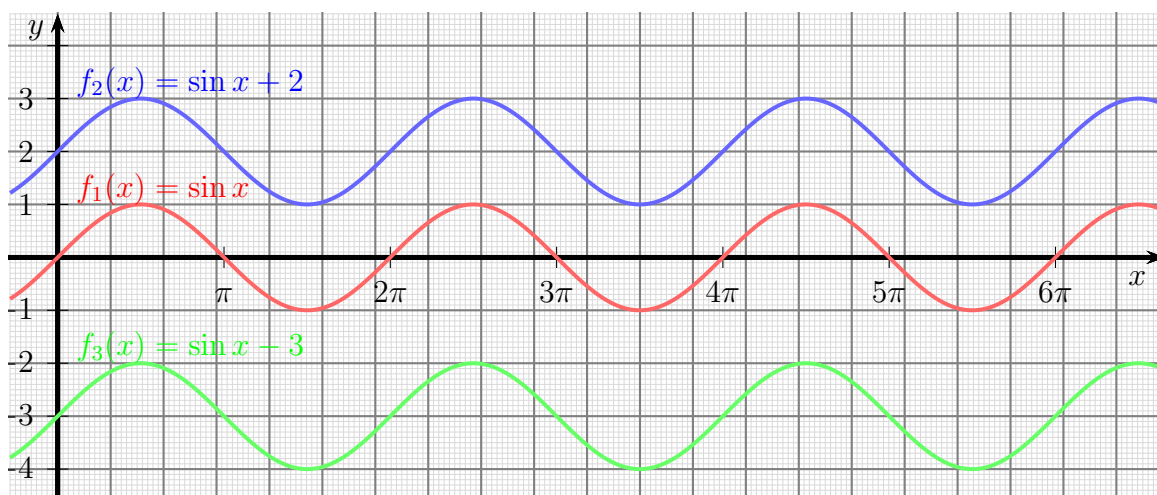
<http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/trigo.pdf>

2 Verschiebungen

2.1 Vertikale Verschiebung

Will mal eine beliebige Funktion wie beispielsweise $f(x) = \sin x$ nach **oben** oder nach **unten** verschieben, dann muss man lediglich einen Verschiebungsparameter **addieren** bzw. **subtrahieren**. Als Beispiel sind hier diese drei Funktionen dargestellt:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \sin x \\f_2(x) &= \sin x + 2 \\f_3(x) &= \sin x - 3\end{aligned}$$



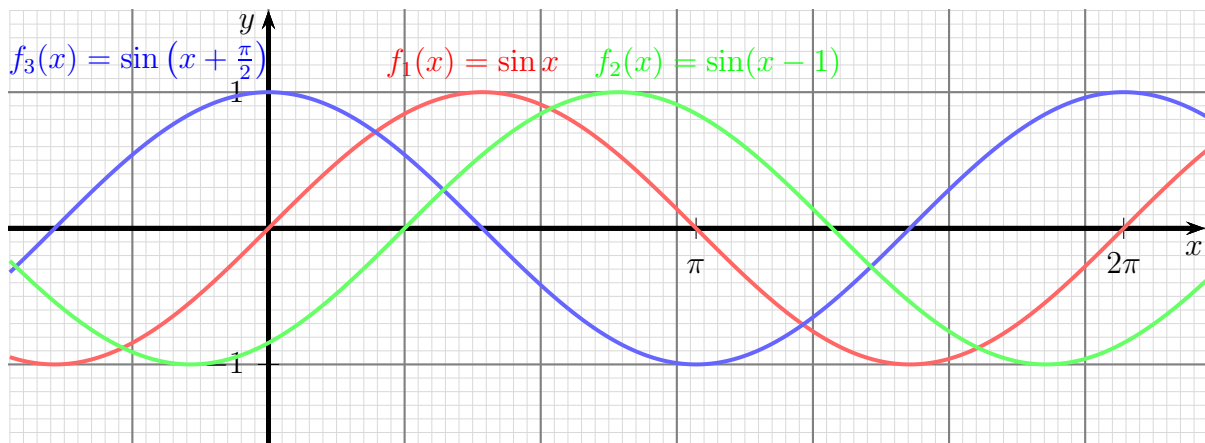
Die Funktion $f_2(x) = \sin x + 2$ ist gegenüber $f_1(x) = \sin x$ um 2 Einheiten nach oben verschoben, $f_3(x) = \sin x - 3$ um 3 Einheiten nach unten. Allgemein bewirkt eine Funktion dieser Form:

$$f(x) = g(x) + d$$

eine Verschiebung um die Konstante d nach oben gegenüber der Funktion $g(x)$. Hierbei **kann** $g(x)$ eine Trigonometrische Funktion sein, muss es aber nicht. Die Formel ist für **alle** Funktionen gültig.

2.2 Horizontale Verschiebung

Eine horizontale Verschiebung erhält man, wenn man anstelle von x einen Term $(x - c)$ einsetzt. Sehen wir uns dazu auch Beispiele an:



Man kann erkennen, dass die Funktion $f_2(x) = \sin(x - 1)$ gegenüber $f_1(x) = \sin x$ um **eine Einheit nach rechts** verschoben ist. Die Funktion $f_3(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ist um $\frac{\pi}{2}$ **Einheiten nach links** verschoben.

Fassen wir zusammen: Will man eine Funktion $g(x)$ um **c Einheiten nach rechts** verschieben, dann erhält man diese Funktion:

$$f(x) = g(x - c)$$

Man beachte das Minuszeichen vor dem c ! Ein Pluszeichen würde eine **Linksverschiebung** bewirken.

Interessant ist hierbei, dass diese Formel für **jede beliebige** Funktion gilt, also nicht nur für Trigonometrische Funktionen!

Für die Winkelfunktionen gibt es jedoch ein paar Besonderheiten. Wegen der Periodizität der Sinus- und der Kosinusfunktion mit der Periode 2π können diese Funktionen um ein beliebiges Vielfaches von 2π nach rechts oder links verschoben werden, ohne dass sich der Funktionsgraph ändert. Dann trifft ein Wellenberg wieder genau auf den nächsten (oder den vorangehenden) Wellenberg. Dies gilt wohlgermerkt nur für die Sinus- und die Kosinusfunktion! Bei der Tangensfunktion beträgt die Periodenlänge nur π . Entsprechend könnte die Tangensfunktion um jedes ganzzahlige Vielfache von π verschoben werden, ohne einen anderen Funktionsgraphen zu erhalten.

Aus den gleichen Gründen kann beispielsweise bei der Sinus- und der Kosinusfunktion eine Verschiebung um den Betrag $\frac{\pi}{2}$ nach rechts auch aufgefasst und dargestellt werden als eine Verschiebung um den Betrag $\frac{3\pi}{2}$ nach links. Beispiel:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Verschiebt man die Funktion $g(x) = \sin x$ um einen Rechten Winkel nach links (also um $\frac{\pi}{2}$), erhält man bekanntlich die Funktion $f(x) = \cos x$:

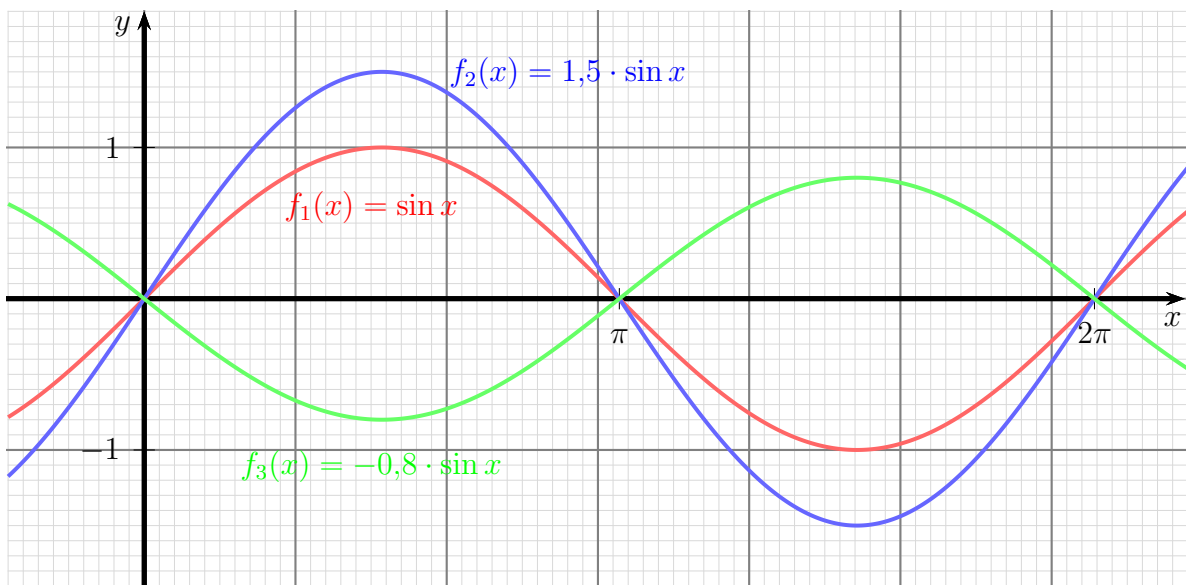
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Die Funktion $f_3(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ aus dem obigen graphisch dargestellten Beispiel könnte also auch als $f_3(x) = \cos x$ beschrieben werden. **Es gibt keine eindeutige Beschreibung!**

3 Dehnung und Stauchung

3.1 Vertikale Dehnung und Stauchung

Multipliziert man eine gegebene Funktion als ganzes mit einem Faktor a , dann erhält man eine vertikale Dehnung. Wir sehen uns das wieder an Beispielen an.



Multipliziert man die Funktion $f_1(x) = \sin x$ mit dem Faktor 1,5, dann erhält man die Funktion $f_2(x) = 1,5 \cdot \sin x$. In der Grafik ist erkennbar, dass der Funktionsgraph vertikal um den Faktor 1,5 gedehnt wurde. Die Funktion $f_3(x) = -0,8 \cdot \sin x$ entstand aus f_1 durch Multiplikation mit $-0,8$. Dadurch, dass der Faktor negativ ist, wird der Funktionsgraph gleichzeitig an der Abszisse (x -Achse) gespiegelt, weil der Betrag < 1 ist, wird der Graph gestaucht.

Allgemein gilt für eine vertikale Dehnung der Funktion $g(x)$ zu $f(x)$ diese Formel:

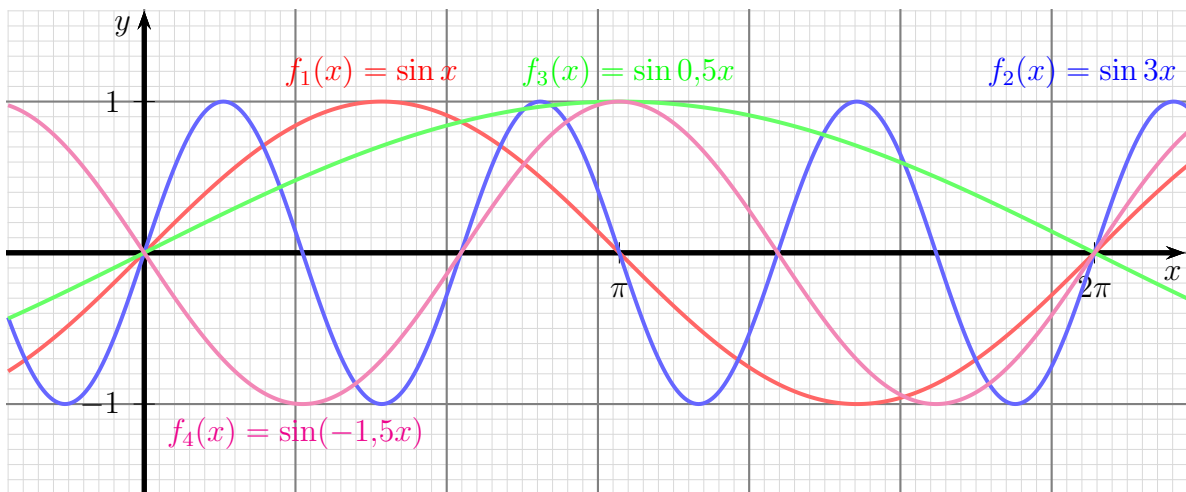
$$f(x) = a \cdot g(x)$$

Auch diese Formel gilt allgemein für **jede** Funktion, also nicht nur für Trigonometrische Funktionen.

Speziell für die Sinus- und die Kosinusfunktion nennt man den Parameter a die **Amplitude** der Funktion. Mit $a = 1$ (bzw. ohne a) pendeln diese Funktionen zwischen den Werten ± 1 , mit einem anderen a zwischen den Werten $\pm a$. Ein negativer Wert für a bewirkt zusätzlich eine Spiegelung des Funktionsgraphen an der x -Achse.

3.2 Horizontale Dehnung und Stauchung

Multipliziert man in einer gegebenen Funktion den x -Wert mit einer Konstanten, dann erhält man eine horizontale Dehnung oder Stauchung. Wieder sehen wir uns das zunächst an Beispielen an.



Gehen wir zunächst von der Funktion $f_1(x) = \sin x$ aus. Im Vergleich dazu ist die Funktion $f_2(x) = \sin 3x$ dreifach **gestaucht**, von f_2 passen drei Halbwellen in den Bereich, wo von f_1 nur eine Halbwelle liegt. Im Gegensatz dazu ist die Funktion $f_3(x) = \sin 0,5x$ gegenüber f_1 gedehnt. Im Bereich einer Halbwelle von f_3 liegen zwei Halbwellen von f_1 . Von $f_4(x) = \sin(-1,5x)$ passen eineinhalb Halbwellen auf eine Halbwelle von f_1 . Gleichzeitig ist der Funktionsgraph an der Ordinate (y -Achse) gespiegelt.

Allgemein gilt für eine horizontale Stauchung der Funktion $g(x)$ zu $f(x)$ diese Formel:

$$f(x) = g(b \cdot x)$$

Auch diese Formel gilt allgemein für **jede** Funktion, also nicht nur für Trigonometrische Funktionen.

Je größer der Parameter b ist, desto stärker ist der Funktionsgraph gestaucht. Im Bereich $0 < b < 1$ erfolgt eine Dehnung. Wenn $b < 0$ ist, erfolgt gleichzeitig eine Spiegelung an der Ordinate (y -Achse).

4 Gemischte Dehnungen, Stauchungen und Verschiebungen

Natürlich können auch alle Varianten miteinander gemischt werden. Das führt zu dieser allgemeingültigen Formel:

$$f(x) = a \cdot g(b \cdot (x + c)) + d$$

Hierbei bedeutet:

a: Vertikaler Dehnungsfaktor, auch **Amplitude** genannt

b: Horizontaler Stauchungsfaktor

c: Links-Verschiebung

d: Verschiebung nach oben

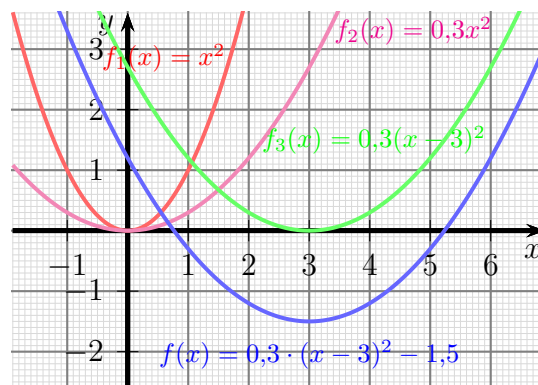
Es folgen ein paar Beispiele mit unterschiedlichen Funktionstypen.

Beispiel 1: Gegeben ist die Funktion mit der Funktionsgleichung:

$$f(x) = 0,3 \cdot (x - 3)^2 - 1,5$$

Stellen wir uns vor, dass sie schrittweise aus der Normalparabel $f_1(x) = x^2$ (im Bild rot) entwickelt wurde. Da kommt zunächst der Faktor $a = 0,3$ ins Spiel. Setzen wir den ein, erhalten wir:

$$f_2(x) = 0,3x^2$$

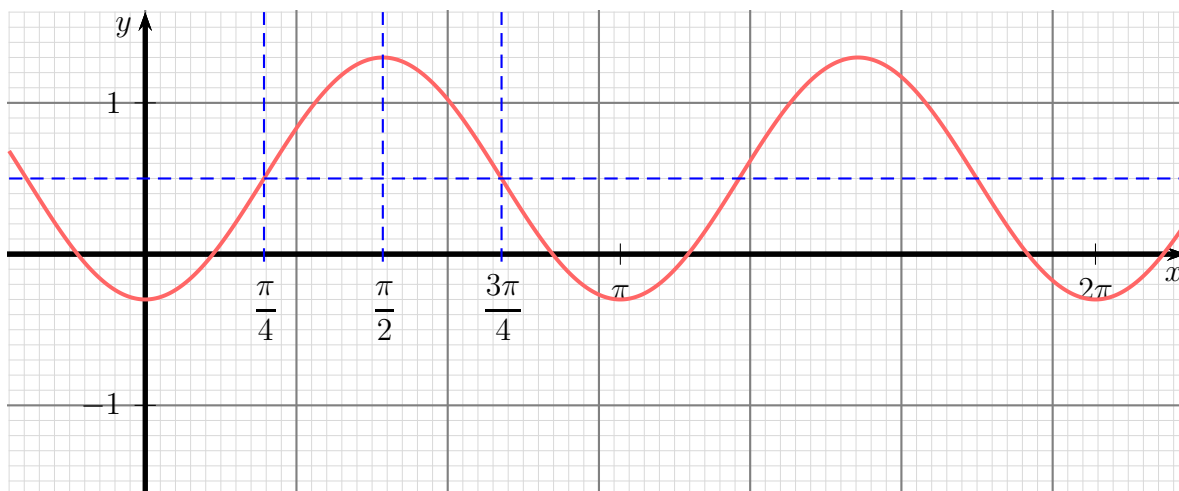


Diese Funktion ist **violett** dargestellt. Der Faktor $a = 0,3$ hat bewirkt, dass die Parabel **vertikal gestaucht** wurde. Als nächstes wird nun der Parameter $c = -3$ eingefügt. Wir erhalten für den nächsten Zwischenschritt:

$$f_3(x) = 0,3(x - 3)^2$$

Diese Kurve ist in **grüner Farbe** dargestellt. Gegenüber f_2 haben wir eine Linksverschiebung von $c = -3$, was eine Rechtsverschiebung um 3 Einheiten bedeutet. Bis zur gegebenen Funktion $f(x) = 0,3(x - 3)^2 - 1,5$ fehlt jetzt nur noch der Parameter $d = -1,5$. Der Parameter d bedeutet die Verschiebung **nach oben**; weil d negativ ist, muss entsprechend die Kurve um 1,5 Einheiten nach **unten** verschoben werden. Wir erhalten den **blau** dargestellte Funktionsgraphen.

Beispiel 2: Für die nachfolgend dargestellte Funktion wird die Funktionsgleichung gesucht.



Als Grundfunktion kommt hier die Funktion $f_1(x) = \sin x$ in Frage¹. Ausgehend von dieser Funktion wäre die Kurve um 0,5 Einheiten nach oben verschoben. Die gestrichelte blaue Hilfslinie markiert die Mittellinie der Sinuskurve. Hiermit steht schon mal der Parameter $d = 0,5$ fest.

Als nächstes lesen wir an der Kurve die Amplitude ab. Von der Mittellinie aus gesehen bewegt sich die Kurve um 0,8 Einheiten nach oben und nach unten. Damit kennen wir den Parameter $a = 0,8$.

Aus der Kurve kann man eine Periodenlänge von π ablesen. Das ist genau die Hälfte der Periodenlänge der Standard-Sinusfunktion. Hiermit erhalten wir den Parameter $b = 2$.

Gegenüber der Standard-Sinusfunktion ist die Kurve um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts verschoben. Damit bekommen wir den Parameter $c = -\frac{\pi}{4}$.

Wir können die Ergebnisse zusammenfassen und erhalten die gesuchte Funktion:

$$f(x) = 0,8 \cdot \sin\left(2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 0,5$$

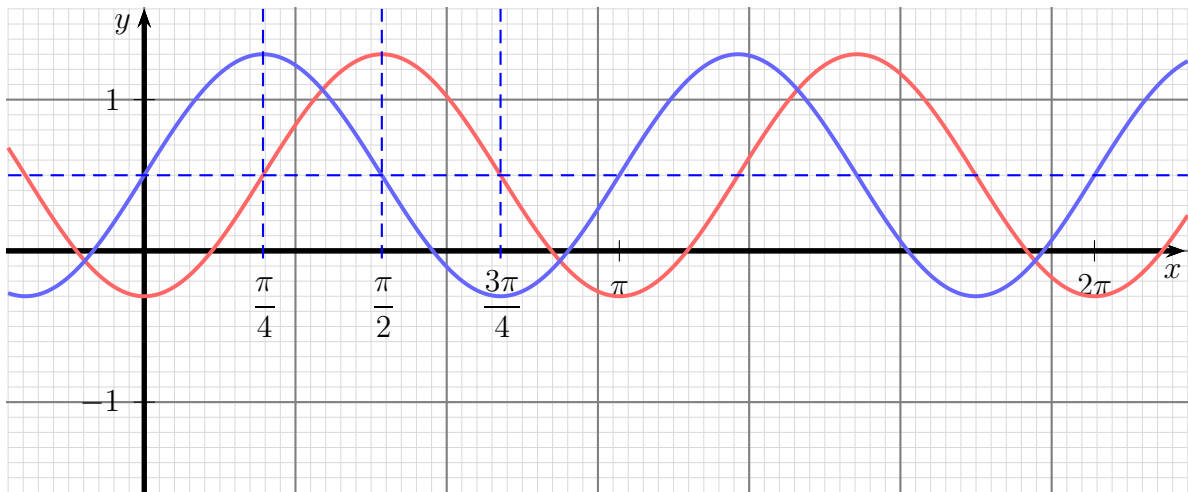
Multipliziert man die innere Klammer aus, dann erhält man diese Form für die Funktionsgleichung:

$$f(x) = 0,8 \cdot \sin\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) + 0,5$$

Das mag auf den ersten Blick etwas verwirrend erscheinen, denn es sieht so aus, als hätten wir einmal $c = -\frac{\pi}{4}$ und einmal $c = -\frac{\pi}{2}$ als horizontalen Verschiebewert. Wie passt das zusammen?

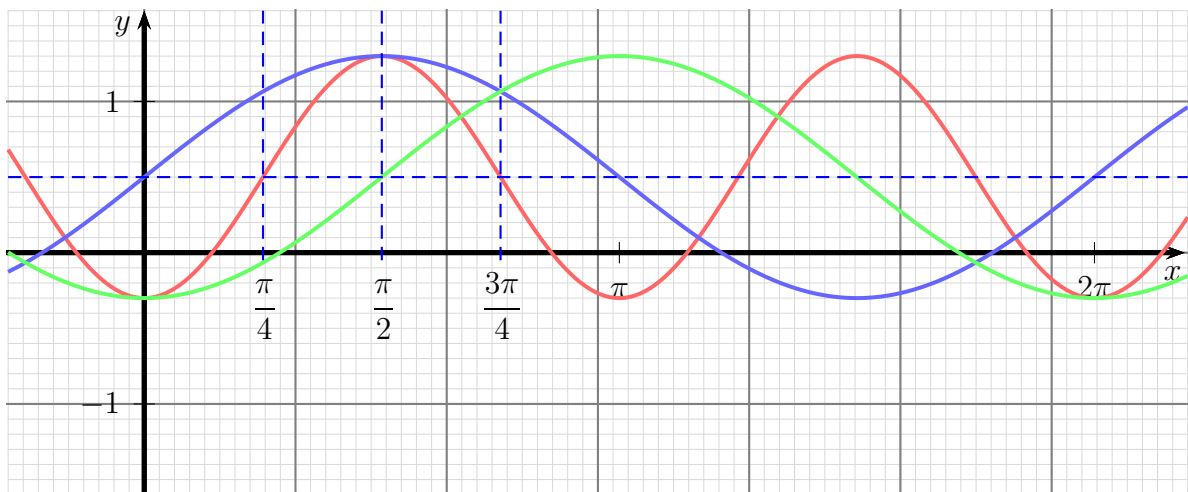
¹Ebenfalls möglich wäre auch $f_1(x) = \cos x$, damit erhielte man natürlich eine andere Funktionsgleichung für die Ergebnisfunktion, die später noch dargestellt wird.

Es kommt auf die Feinheiten an. Im ersten Fall wird davon ausgegangen, dass eine Funktion $g(x) = 0,8 \cdot \sin(2 \cdot x) + 0,5$ um einen bestimmten Wert horizontal verschoben werden muss. Diese Funktion ist nachfolgend in **blau** mit eingetragen:



Tatsächlich muss diese Kurve um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts verschoben werden.

Im zweiten Fall geht man von der Funktion $g(x) = 0,8 \cdot \sin x + 0,5$ aus, die **zunächst verschoben** und **anschließend erst gestaucht** wird. Das sähe dann so aus:



In **blau** ist diese gegebene Funktion $g(x)$ eingezeichnet. Diese wird zur **grünen** Funktion, indem sie um den Wert von $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben wird. Diese **grüne** Funktion wird zum Schluss um den Faktor 2 gestaucht, wodurch man die **rote** Funktion $f(x)$ erhält.

Man muss also sehr genau aufpassen, in welcher Reihenfolge vorgegangen wird, damit man die richtige Funktionsgleichung erhält.

Alternative Lösungen: Wie vorhin erwähnt, kann auch die Funktion $f_1(x) = \cos x$ als Ausgangsfunktion gewählt werden. Analog zu den Überlegungen vom ersten Lösungsansatz kommt man auch hier zu den Parametern $d = 0,5$ und $a = 0,8$, weshalb das hier nicht noch einmal dargestellt werden soll. Auch der Parameter $b = 2$ wird nach dem gleichen Muster ermittelt. Bleibt noch die Frage nach der horizontalen Verschiebung.

Die „normale“ Kosinuskurve startet an der y -Achse mit einem **Maximum**, die vorgegebene Funktion $f(x)$ hat hier ein **Minimum**. Man kann dies als Verschiebung der Kurve nach rechts oder links interpretieren, man kann aber eine vertikale Spiegelung als Ursache unterstellen. Aber der Reihe nach:

Soll eine Ausgangsfunktion $f_1(x) = \cos x$ horizontal so verschoben werden, dass auf der y -Achse ein **Minimum** zu liegen kommt, dann muss sie genau um eine Halbwelle nach rechts oder nach links verschoben werden. Man erhält dann $f_2(x) = \cos x - \pi$ oder $f_2(x) = \cos x + \pi$. Man beachte, dass hier die Halbwelle die Länge π hat, da die horizontale Stauchung noch nicht in die Funktion eingearbeitet ist. Geht man dagegen von der bereits gestauchten Funktion $f_3(x) = \cos 2x$ aus, dann hat eine Halbwelle die Länge $\frac{\pi}{2}$. Setzt man für diese Funktion die Verschiebformel an, dann erhält man $f_4(x) = \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$ bzw. $f_4(x) = \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Durch Ausmultiplizieren der Klammer kann man beide Formen jedoch in die mit $f_2(x)$ bezeichneten Formeln umformen.

Kommen wir nun zu der oben angesprochenen Möglichkeit einer vertikalen Spiegelung. Gehen wir wieder von der Ausgangsfunktion $f_1(x) = \cos x$ aus. Spiegelt man diese Funktion an der x -Achse, dann erhält man $f_2(x) = -\cos x$. Diese Funktion würde mit einem Tiefpunkt an der y -Achse beginnen, genau so, wie die gesuchte Funktion $f(x)$. Eine horizontale Verschiebung zusätzlich ist hier nicht erforderlich.

Nimmt man nun die bereits besprochenen Parameter a und d mit dazu, dann erhält man für $f(x)$ diese Lösungsmöglichkeiten:

$$f(x) = 0,8 \cdot \cos(2x - \pi) + 0,5$$

$$f(x) = 0,8 \cdot \cos(2x + \pi) + 0,5$$

$$f(x) = -0,8 \cdot \cos(2x) + 0,5$$

Alle diese Lösungen sind richtig. Sie stellen die gleiche Funktion dar, ebenso wie die schon zum Anfang dargestellte Form:

$$f(x) = 0,8 \cdot \sin\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{2}\right) + 0,5$$