

Transformationen von Funktionen

Wolfgang Kippels

1. Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	3
2	Einführung	3
3	Verschiebungen	4
4	Stauchungen und Dehnungen	6
4.1	Vertikale Stauchungen und Dehnungen	6
4.2	Horizontale Stauchungen und Dehnungen	7
5	Spiegelungen	8
5.1	Achsen Spiegelungen	8
5.1.1	Spiegelung an der Abszisse	8
5.1.2	Spiegelung an der Ordinate	9
5.2	Punkt Spiegelungen	10
6	Kombinierte Transformationen	11
6.1	Spiegelungen an beliebigen Achsen	11
6.1.1	Spiegelung an waagerechter Achse	11
6.1.2	Spiegelung an vertikaler Achse	13
6.2	Spiegelungen an beliebigen Punkten	16
7	Übungsaufgaben	20
7.1	Aufgabe 1	20
7.2	Aufgabe 2	20
7.3	Aufgabe 3	20
7.4	Aufgabe 4	20
7.5	Aufgabe 5	20
7.6	Aufgabe 6	20
7.7	Aufgabe 7	20

7.8	Aufgabe 8	21
7.9	Aufgabe 9	21
7.10	Aufgabe 10	21
8	Lösungen der Übungsaufgaben	22
8.1	Aufgabe 1	22
8.2	Aufgabe 2	23
8.3	Aufgabe 3	24
8.4	Aufgabe 4	25
8.5	Aufgabe 5	27
8.6	Aufgabe 6	28
8.7	Aufgabe 7	29
8.8	Aufgabe 8	30
8.9	Aufgabe 9	32
8.10	Aufgabe 10	34

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einführung

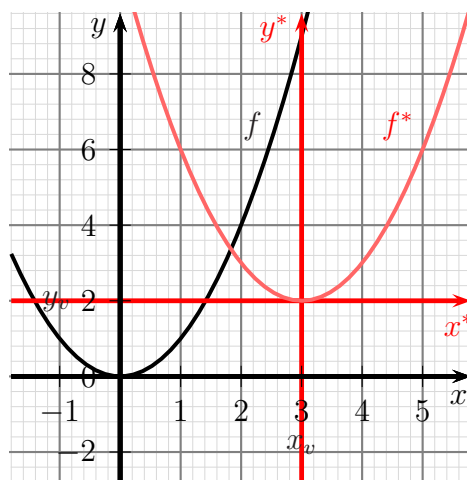
Man kann an Funktionen diverse **Transformationen** durchführen. Hierbei beziehe ich mich auf den **Funktionsgraphen**. Man kann ihn verschieben, man kann ihn stauchen oder dehnen und man kann ihn auf unterschiedliche Art spiegeln. Diese unterschiedlichen Transformationen sollen hier dargestellt werden.

3 Verschiebungen

Die Verschiebung möchte ich am Beispiel der Normalparabel darstellen. Das ist die Funktion mit der Gleichung:

$$f(x) = x^2$$

Die Parabel soll um x_v Einheiten nach **rechts** und um y_v Einheiten nach **oben** verschoben werden. Im nebenstehenden Beispiel ist $x_v = 3$ und $y_v = 2$.



Zur Lösung des Problems zeichne ich ein (hier **rot** dargestelltes) Hilfs-Koordinatensystem ein. Dieses Hilfs-Koordinatensystem ist gegenüber dem eigentlichen Koordinatensystem um x_v Einheiten nach **rechts** und um y_v Einheiten nach **oben** verschoben. Im Original-Koordinatensystem gilt für die vorgegebenen Funktion:

$$y = f(x)$$

Für das verschobene Koordinatensystem gilt entsprechend für die verschobene Funktion:

$$y^* = f(x^*)$$

Um nun die verschobene Funktion f^* mit den Original-Koordinaten x und y beschreiben zu können, müssen die Stern-Koordinaten in die Original-Koordinaten umgerechnet werden. Wie man leicht erkennen kann, gilt:

$$\begin{aligned} x^* &= x - x_v \\ y^* &= y - y_v \end{aligned}$$

Damit kann die verschobene Funktion f^* mit Hilfe von f , x_v und y_v dargestellt werden.

$$\begin{aligned} y^* &= f(x^*) && | \text{Koordinaten ersetzen} \\ y - y_v &= f(x - x_v) && | + y_v \\ y &= f(x - x_v) + y_v && | \text{ersetzen: } y = f^*(x) \\ f^*(x) &= f(x - x_v) + y_v \end{aligned}$$

Damit gilt für eine um x_v nach rechts und y_v nach oben verschobene Funktion f diese Verschiebeformel:

$$f^*(x) = f(x - x_v) + y_v$$

In Worten ausgedrückt:

Man ersetzt in der gegebenen Funktion überall das x durch $(x - x_v)$

und addiert am Schluss noch y_v .

Wenden wir das auf unser Beispiel $f(x) = x^2$ an.

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f(x - x_v) + y_v \\ f^*(x) &= (x - 3)^2 + 2 \end{aligned}$$

Ein Beispiel: Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

Der Funktionsgraph soll um 5 Einheiten nach **links** und um 3 Einheiten nach **oben** verschoben werden.

Da die x -Verschiebung nach **rechts** als **positiv** definiert ist, jetzt aber nach **links** verschoben wird, ist das Vorzeichen des Verschiebewertes **negativ**. Wir erhalten folgende Werte:

$$\begin{aligned}x_v &= -5 \\y_v &= 3\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}f^*(x) &= 2 \cdot (x + 5)^2 - 3 \cdot (x + 5) + 1 + 3 \\&= 2 \cdot (x^2 + 10x + 25) - 3x - 15 + 1 + 3 \\&= 2x^2 + 20x + 50 - 3x - 15 + 1 + 3 \\f^*(x) &= 2x^2 + 17x + 40\end{aligned}$$

4 Stauchungen und Dehnungen

Funktionsgraphen kann man sowohl horizontal als auch vertikal stauchen oder dehnen. Dies wird in den nachfolgenden Kapiteln untersucht.

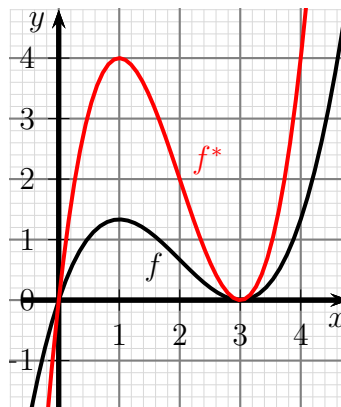
4.1 Vertikale Stauchungen und Dehnungen

Als Beispielfunktion möchte ich die Kubische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

verwenden. Der zugehörige Funktionsgraph ist nebenstehend dargestellt.

Dieser Funktionsgraph soll **vertikal** um den Faktor 3 gedehnt werden, so dass dabei die in **rot** dargestellte Funktion $f^*(x)$ entsteht. Da jeder Funktionswert das Dreifache des Funktionswertes von $f(x)$ darstellt, liegt es nahe, die ganze Funktion mit diesem Faktor zu multiplizieren. Das dies tatsächlich so ist, kann man leicht mit einem grafikfähigen Taschenrechner überprüfen. Wir erhalten diese Transformationsformel für die **vertikale Dehnung**:



$$f^*(x) = k \cdot f(x)$$

Dabei bedeutet:

$$\begin{aligned} f^* &: \text{ die neue Funktion} \\ k &: \text{ der vertikale Dehnungsfaktor} \end{aligned}$$

Ist k ein sehr großer Wert, dann haben wir eine große Dehnung. Bei $k = 1$ verändert sich nichts. Wird k kleiner als 1, bleibt aber positiv, dann wird der Funktionsgraph vertikal **gestaucht**. Bei einem negativen k dreht sich der Funktionsgraph um, wird also an der x -Achse gespiegelt. Darauf wird in einem **besonderen Kapitel** eingegangen.

Die Wirkung von k kann man so zusammenfassen:

$$\begin{aligned} k > 1 & \Leftrightarrow \text{Dehnung} \\ 0 < k < 1 & \Leftrightarrow \text{Stauchung} \end{aligned}$$

Führen wir das für unsere Beispielfunktion mit dem Dehnungsfaktor 3 durch.

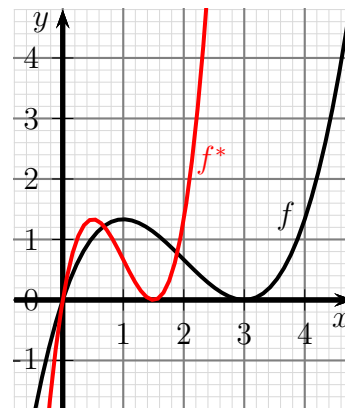
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \\ f^*(x) &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right) \\ f^*(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \end{aligned}$$

4.2 Horizontale Stauchungen und Dehnungen

Etwas komplizierter stellt sich eine horizontale Stauchung oder Dehnung dar. Nebenstehend ist wieder die aus dem vorangehenden Kapitel bekannte Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

dargestellt. Es liegt nahe, für eine horizontale – also in x -Richtung wirkende – Dehnung nicht den y -Wert (wie bei der vertikalen Dehnung) mit einem Faktor zu multiplizieren, sondern den x -Wert. Die nebenstehend in **rot** dargestellte Kurve zeigt den Funktionsgraphen von



$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \\ f^*(x) &= \frac{1}{3} \cdot (2x)^3 - 2 \cdot (2x)^2 + 3 \cdot (2x) \\ f^*(x) &= \frac{8}{3}x^3 - 8x^2 + 6x \end{aligned}$$

Es wurde also jedes x durch $2x$ ersetzt. Interessanterweise haben wir jetzt aber keine **Dehnung**, sondern eine **Stauchung** mit dem Faktor 2 erreicht. Wieso ist das so?

Multipliziert man (bei der vertikalen Dehnung) den Funktionswert mit einem Faktor k , so wird der y -Wert mit k multipliziert, denn der y -Wert einer Funktion ist immer der Funktionswert. Daher ist der y -Wert k mal so groß wie vorher. Multipliziert man aber den x -Wert mit einem Faktor k , so verhält sich dann die Funktion an der Stelle x so, wie die Ursprungsfunktion an der Stelle $k \cdot x$. Der Tiefpunkt der Originalfunktion f bei $x_T = 3$ unseres Beispiels liegt in der transformierten Funktion f^* dann schon bei $x_T^* = 1,5$, denn es ist $2 \cdot 1,5 = 3$. Die Wirkung von k kann man daher hier so zusammenfassen:

$$\begin{aligned} k > 1 &\Leftrightarrow \text{Stauchung} \\ 0 < k < 1 &\Leftrightarrow \text{Dehnung} \end{aligned}$$

Ähnlich wie bei der vertikalen Dehnung bewirkt ein **negativer** Wert für k hier eine **horizontale** Spiegelung, auf die aber erst in einem [späteren Kapitel](#) eingegangen wird.

Wir können das Ergebnis als **Stauchungsformel** für die horizontale Stauchung aufschreiben:

$$f^*(x) = f(k \cdot x)$$

Dabei bedeutet:

- f^* : die neue Funktion
- k : der horizontale Stauchungsfaktor

5 Spiegelungen

Es gibt grundsätzlich zwei verschiedene Arten von Spiegelungen. Man spricht von „Achsenpiegelungen“ und von „Punktspiegelungen“. Diese beiden verschiedenen Spiegelungen werden in den beiden nachfolgenden Unterkapiteln abgehandelt.

5.1 Achsenpiegelungen

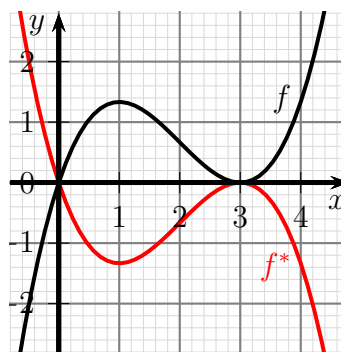
Die bekannteste Spiegelung ist eine Achsenpiegelung. Dabei stellt sich eine Gerade als Spiegelachse dar. Die Spiegelung erfolgt dann sehr ähnlich einem Spiegel, den man in jedem Badezimmer findet. Hier soll aber nicht eine beliebige Gerade als Spiegelachse dienen, sondern zunächst nur eine der beiden Koordinatenachsen. Andere Spiegelungen werden als Kombination mehrerer Transformationen [später](#) beschrieben. Hier muss daher nur zwischen der Spiegelung an der Abszisse¹ und der Ordinate² unterschieden werden.

5.1.1 Spiegelung an der Abszisse

Soll ein Funktionsgraph an der Abszisse (der x -Achse) gespiegelt werden, muss nur das Vorzeichen des y -Wertes umgekehrt werden. Nebenstehend ist wieder das Standardbeispiel

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

dargestellt. Vorzeichenumkehr ist identisch mit einer Multiplikation mit (-1) . Dem entspricht eine „Dehnung“ wie [hier](#) im Kapitel *Vertikale Stauchungen und Dehnungen* beschrieben mit dem Faktor $k = -1$. Wird die Funktionsgleichung von f mit (-1) multipliziert, erhält man diese Funktion.



$$f^*(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$$

Wir können damit diese Formel für die **vertikalen Spiegelung** angeben:

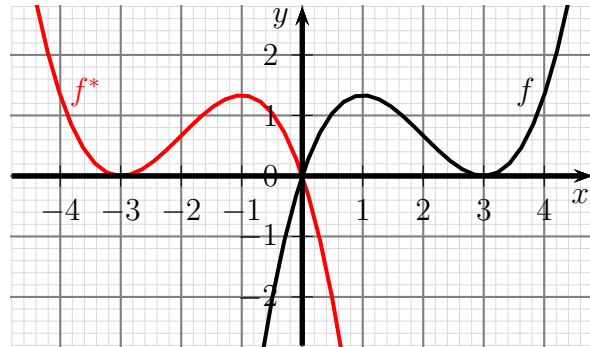
$$f^*(x) = -f(x)$$

¹Die **Abszisse** ist die waagerechte Achse. Meist wird sie als x -Achse bezeichnet.

²Die **Ordinate** ist die vertikale Achse. Meist wird sie als y -Achse bezeichnet.

5.1.2 Spiegelung an der Ordinate

Wenn wir an der Ordinate (der y -Achse) spiegeln wollen, müssen wir gewissermaßen die x -Achse „umdrehen“. Das geschieht einfach dadurch, dass man überall das x durch ein $-x$ ersetzt. Man kann das auch auffassen als horizontale Stauchung (siehe weiter vorn in diesem Skript) mit dem Faktor (-1) .



Dargestellt ist wieder unser Standardbeispiel:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

Ersetzt man x durch $-x$ erhält man die horizontal gespiegelte Funktion:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \\ f^*(x) &= \frac{1}{3} \cdot (-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 + 3 \cdot (-x) \\ f^*(x) &= -\frac{1}{3}x^3 - 2 \cdot x^2 - 3x \end{aligned}$$

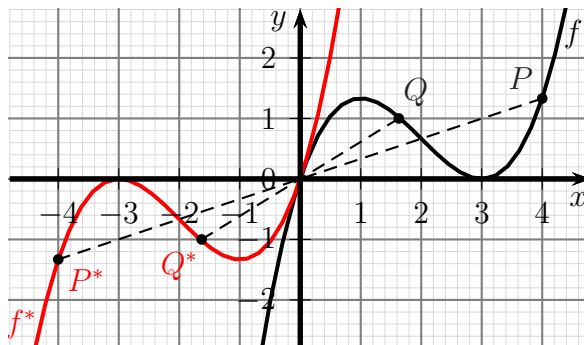
Diese ist wieder in **rot** dargestellt.

Wir können damit diese Formel für die **horizontale Spiegelung** angeben:

$$f^*(x) = f(-x)$$

5.2 Punktspiegelungen

Die Punktspiegelung ist nicht sofort einsichtig als Spiegelung im klassischen Sinne erkennbar. Im Prinzip kann man an jedem beliebigen Punkt spiegeln. In diesem Skript stelle ich aber zunächst nur die Spiegelung am Koordinatenursprung dar. Wie das mit anderen Punkten möglich ist, wird etwas **später** beschrieben. Wie ist die Punktspiegelung definiert?



Zu jedem Punkt des Funktionsgraphen muss ein Spiegelpunkt erzeugt werden. Das geschieht dadurch, dass man von dem fraglichen Punkt aus eine Gerade zum Spiegelpunkt (hier dem Koordinatenursprung) zeichnet und diese um den Abstand des fraglichen Punktes zum Spiegelpunkt verlängert. In der Skizze ist dies an unserer bekannten Beispielfunktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

beispielhaft für zwei Punkte P und Q angedeutet. Anschaulich bewirkt diese Konstruktion eine Drehung des Funktionsgraphen um 180° um den Spiegelpunkt herum. Man kann die Punktspiegelung auch als Ausführung einer vertikalen und einer horizontalen Achsenspiegelung nacheinander betrachten.

Schaut man sich die Spiegelung am Punktepaar $P - P^*$ oder $Q - Q^*$ an, so erkennt man, dass sich bei der Spiegelung die Vorzeichen beider Koordinaten umdrehen. Das führt uns zu der Formel für die **Punktspiegelung am Koordinatenursprung**:

$$f^* = -f(-x)$$

Rechnen wir das für unser Standard-Beispiel durch:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \\ f^*(x) &= -\left(\frac{1}{3} \cdot (-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 + 3 \cdot (-x)\right) \\ f^*(x) &= \frac{1}{3}x^3 + 2 \cdot x^2 + 3x \end{aligned}$$

6 Kombinierte Transformationen

Möchte man eine Spiegelung nicht an einer Koordinatenachse bzw. dem Koordinatensprung durchführen, dann kann man mehrere Transformationen nacheinander durchführen, um das Ziel zu erreichen. Dies wird in den folgenden Kapiteln im einzelnen beschrieben.

6.1 Spiegelungen an beliebigen Achsen

Bisher konnten wir Achsenspiegelungen nur an Ordinate und Abszisse durchführen. Wie bereits erwähnt, sind aber auch andere Achsen möglich. Damit das Ganze überschaubar bleibt, beschränke ich mich hier nur auf waagerechte und senkrechte Achsen. Spiegelungen an „schrägen“ Achsen sind zwar möglich, ergeben aber in der Regel keine Funktion, sondern nur eine Relation. Daher soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden, zumal diese Spiegelungen deutlich komplizierter zu berechnen sind.

6.1.1 Spiegelung an waagerechter Achse

Ein Beispiel soll das Verfahren erläutern. Unsere bekannte Standardfunktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

soll an der Achse $y = 2$, also an einer waagerechten Achse auf der Höhe 2, gespiegelt werden. Das geht dann in drei Schritten:

1. Verschiebung um 2 Einheiten nach unten
2. Spiegelung an der Abszisse (x -Achse)
3. Verschiebung zurück um 2 Einheiten nach oben

Rechentechisch sieht das dann so aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x && |2 \downarrow \\ f_1(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 2 && | \text{ spiegeln} \\ f_2(x) &= - \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 2 \right) \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 2 && |2 \uparrow \\ f^*(x) &= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 2 + 2 \\ f^*(x) &= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 4 \end{aligned}$$

Man kann das natürlich auch allgemein durchführen und leitet sich damit eine universell anwendbare Formel her.

Gegeben sei eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$. Der Funktionsgraph soll an der waagerechten Achse $y = y_s$ gespiegelt werden.

Wir gehen wie zuvor im Beispiel in drei Schritten vor.

1. Verschiebung nach unten Wir verschieben f um y_s Einheiten nach unten und erhalten:

$$f_1(x) = f(x) - y_s$$

2. Vertikale Spiegelung Wir spiegeln f_1 an der x -Achse und erhalten:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -f_1(x) \\ &= -\left(f(x) - y_s\right) \\ f_2(x) &= -f(x) + y_s \end{aligned}$$

3. Verschiebung wieder hoch Wir verschieben f_2 wieder um y_s Einheiten nach oben und erhalten:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f_2(x) + y_s \\ &= \left(-f(x) + y_s\right) + y_s \\ f^*(x) &= -f(x) + 2 \cdot y_s \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Formel für eine Spiegelung von f an der Achse $y = y_s$ erhalten:

$$f^*(x) = -f(x) + 2 \cdot y_s$$

Wenden wir diese Formel auf unser obiges Beispiel an, um die Ergebnisse zu vergleichen. Zur Erinnerung: Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

soll an der Achse $y = 2$ gespiegelt werden. Damit ist $y_s = 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \\ f^*(x) &= -f(x) + 2 \cdot y_s \\ &= -\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right) + 2 \cdot 2 \\ f^*(x) &= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 4 \end{aligned}$$

Wie man leicht sieht, stimmen die Ergebnisse wie erwartet überein.

6.1.2 Spiegelung an vertikaler Achse

Auch hier soll ein Beispiel das Verfahren erläutern. Unsere bekannte Standardfunktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

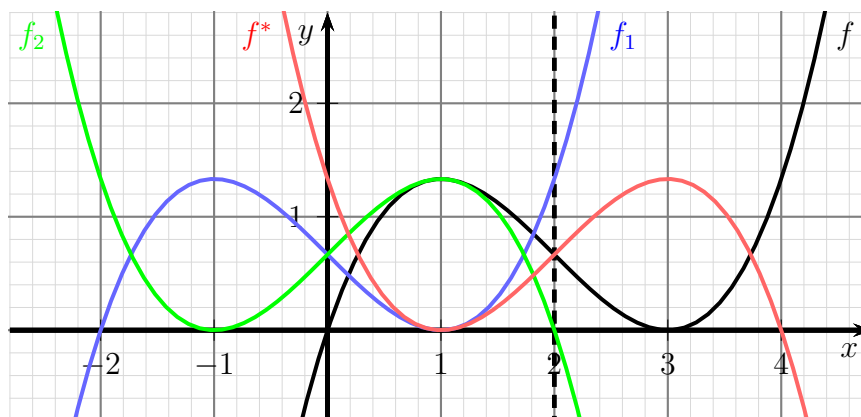
soll an der Achse $x = 2$, also an einer vertikalen Achse an der Stelle $x = 2$ gespiegelt werden. Das geht auch hier in drei Schritten:

1. Verschiebung um 2 Einheiten nach links
2. Spiegelung an der Ordinate (y -Achse)
3. Verschiebung zurück um 2 Einheiten nach rechts

Rechentechisch sieht das dann so aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x && |2 \leftarrow \\ f_1(x) &= \frac{1}{3} \cdot (x+2)^3 - 2 \cdot (x+2)^2 + 3 \cdot (x+2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - 2 \cdot (x^2 + 4x + 4) + 3x + 6 \\ &= \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + \frac{8}{3} - 2x^2 - 8x - 8 + 3x + 6 \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3} && | \text{ spiegeln} \\ f_2(x) &= \frac{1}{3}(-x)^3 - (-x) + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{2}{3} && |2 \rightarrow \\ f^*(x) &= -\frac{1}{3} \cdot (x-2)^3 + (x-2) + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + x - 2 + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + \frac{8}{3} + x - 2 + \frac{2}{3} \\ f^*(x) &= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Das Ergebnis f^* ist nachfolgend in **Rot** dargestellt, die Ausgangsfunktion f in Schwarz. Die Spiegelachse ist gestrichelt eingezeichnet. Die beiden Zwischenstufen (f_1 nach der ersten Verschiebung in **Blau** und f_2 nach der Spiegelung von f_1 an der y -Achse in **Grün**) sind ebenfalls mit eingetragen.



Auch die horizontale Spiegelung an einer beliebigen vertikalen Achse kann man natürlich auch allgemein herleiten und erhält dann eine universell anwendbare Formel. Gegeben sei eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$. Der Funktionsgraph soll an der vertikalen Achse $x = x_s$ gespiegelt werden.

Wir gehen wie zuvor im Beispiel in drei Schritten vor.

1. Verschiebung nach links Wir verschieben f um x_s Einheiten nach links und erhalten:

$$f_1(x) = f(x + x_s)$$

2. Horizontale Spiegelung Wir spiegeln f_1 an der y -Achse und erhalten:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(-x) \\ f_2(x) &= f(-x + x_s) \end{aligned}$$

3. Verschiebung wieder nach rechts Wir verschieben f_2 wieder um x_s Einheiten nach rechts und erhalten:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f_2(x - x_s) \\ &= f\left(- (x - x_s) + x_s\right) + y_s \\ f^*(x) &= f(-x + 2 \cdot x_s) \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Formel für eine horizontale Spiegelung von f an der vertikalen Achse $x = x_s$ erhalten:

$$f^*(x) = f(-x + 2 \cdot x_s)$$

Natürlich prüfen wir auch diese Formel mit unserem obigen Beispiel. Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

soll an der Achse $x = 2$ gespiegelt werden. Damit ist $x_s = 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \\ f^*(x) &= f(-x + 2 \cdot 2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (-x + 2 \cdot 2)^3 - 2 \cdot (-x + 2 \cdot 2)^2 + 3 \cdot (-x + 2 \cdot 2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (-x + 4)^3 - 2 \cdot (-x + 4)^2 + 3 \cdot (-x + 4) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (-x^3 + 12x^2 - 48x + 64) - 2 \cdot (x^2 - 8x + 16) - 3x + 12 \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 16x + \frac{64}{3} - 2x^2 + 16x - 32 - 3x + 12 \\ f^*(x) &= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist identisch mit dem aus dem ersten Lösungsweg.

6.2 Spiegelungen an beliebigen Punkten

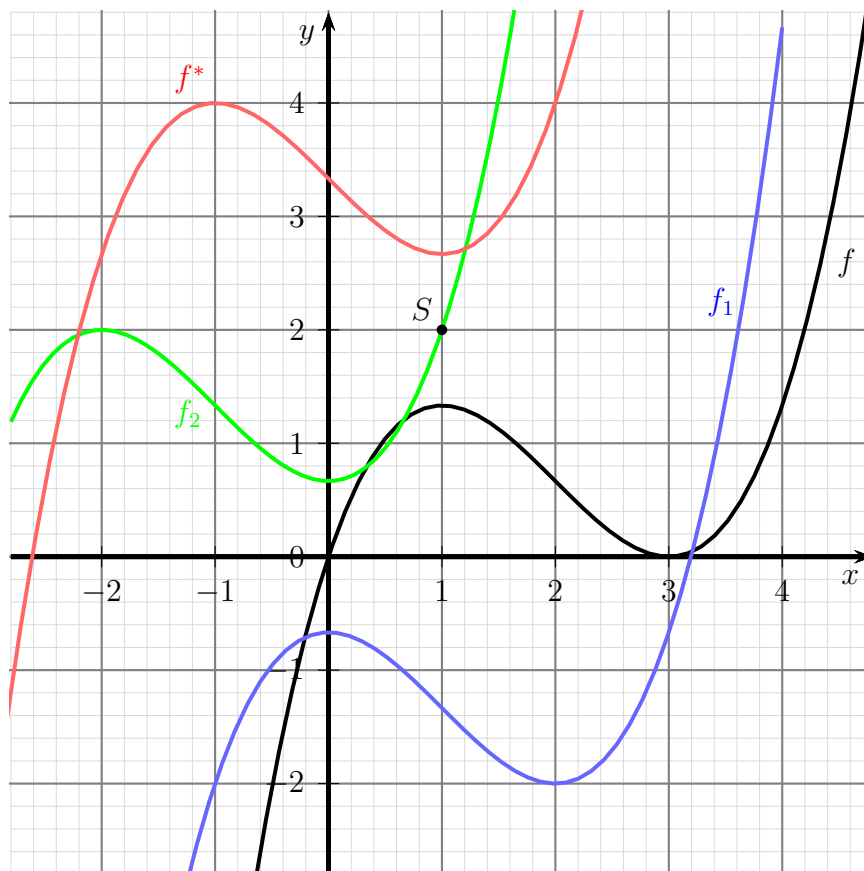
Auch wenn wir eine Punktspiegelung an einem beliebigen Spiegelpunkt $S(x_s|y_s)$ durchführen wollen, gehen wir dreistufig vor. Die Kurve wird zuerst so verschoben, dass der Spiegelpunkt auf dem Koordinatenursprung liegt. Dort kann die Punktspiegelung durchgeführt werden, bevor die Kurve wieder zurückverschoben wird. Konkret sieht das so aus:

1. Verschiebung um x_s Einheiten nach links und y_s nach unten
2. Spiegelung am Koordinatenursprung
3. Verschiebung zurück um x_s Einheiten nach rechts und y_s nach oben

An unserem Standardbeispiel führen wir eine Punktspiegelung am Spiegelpunkt $S(1|2)$ durch. Damit sollte die Vorgehensweise deutlich sein.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x && |1 \leftarrow 2 \downarrow \\
 f_1(x) &= \frac{1}{3} \cdot (x+1)^3 - 2 \cdot (x+1)^2 + 3 \cdot (x+1) - 2 \\
 &= \frac{1}{3} \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) + 3x + 3 - 2 \\
 &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} - 2x^2 - 4x - 2 + 3x + 1 \\
 &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{2}{3} && | \text{ spiegeln} \\
 f_2(x) &= - \left(\frac{1}{3} \cdot (-x)^3 - (-x)^2 - \frac{2}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{2}{3} && |1 \rightarrow 2 \uparrow \\
 f^*(x) &= \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3 + (x-1)^2 + \frac{2}{3} + 2 \\
 &= \frac{1}{3} \cdot (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + x^2 - 2x + 1 + \frac{8}{3} \\
 &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} + x^2 - 2x + \frac{11}{3} \\
 f^*(x) &= \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis f^* ist nachfolgend in Rot dargestellt, die Ausgangsfunktion f in Schwarz. Der Spiegelpunkt S ist schwarz eingezeichnet. Die beiden Zwischenstufen (f_1 nach der ersten Verschiebung in Blau und f_2 nach der Spiegelung von f_1 am Koordinatenursprung in Grün) sind ebenfalls mit eingetragen.



Auch die Punktspiegelung an einem beliebigen Punkt kann man natürlich allgemein herleiten und erhält dann eine universell anwendbare Formel. Gegeben sei eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x)$. Der Funktionsgraph soll am Punkt $s(x_s|y_s)$ gespiegelt werden.

Wir gehen wieder wie im Beispiel in drei Schritten vor.

1. Verschiebung: Wir verschieben f um x_s Einheiten nach links und um y_s Einheiten nach unten. Dadurch liegt jetzt der Punkt S im Koordinatenursprung. Wir erhalten:

$$f_1(x) = f(x + x_s) - y_s$$

2. Punktspiegelung: Wir spiegeln f_1 am Koordinatenursprung und erhalten:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -f_1(-x) \\ &= -\left(f(-x + x_s) - y_s\right) \\ f_2(x) &= -f(-x + x_s) + y_s \end{aligned}$$

3. Verschiebung wieder zurück:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= f_2(x - x_s) + y_s \\ &= -f\left(-x + x_s + x_s\right) + y_s + y_s \\ &= -f(-x + 2x_s) + 2y_s \\ f^* &= -f(-x + 2x_s) + 2y_s \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Formel für eine Punktspiegelung von f am Spiegelpunkt $S(x_s|y_s)$ erhalten:

$$f^*(x) = -f(-x + 2x_s) + 2y_s$$

Natürlich prüfen wir auch diese Formel wieder mit unserem obigen Beispiel. Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

soll an dem Spiegelpunkt $S(1|2)$ gespiegelt werden. Damit ist $x_s = 1$ und $y_s = 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \\ f^*(x) &= -f(-x + 2x_s) + 2y_s \\ &= -\left(\frac{1}{3} \cdot (-x + 2 \cdot 1)^3 - 2 \cdot (-x + 2 \cdot 1)^2 + 3 \cdot (-x + 2 \cdot 1)\right) + 2 \cdot 2 \\ &= -\frac{1}{3} \cdot (-x + 2)^3 + 2 \cdot (-x + 2)^2 - 3 \cdot (-x + 2) + 4 \\ &= -\frac{1}{3} \cdot (-x^3 + 6x^2 - 12x + 8) + 2 \cdot (x^2 - 4x + 4) + 3x - 6 + 4 \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - \frac{8}{3} + 2x^2 - 8x + 8 + 3x - 6 + 4 \\ f^*(x) &= \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Das Ergebnis stimmt wie erwartet mit dem Ergebnis aus dem ersten Lösungsweg überein.

7 Übungsaufgaben

Es folgen einige Übungsaufgaben zu allen Themen. Die zugehörigen Lösungen befinden sich im nächsten Kapitel.

7.1 Aufgabe 1

Die nachfolgende Funktion soll um den Faktor 3 vertikal gedehnt werden.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$$

7.2 Aufgabe 2

Die nachfolgende Funktion soll um den Faktor 3 horizontal gedehnt werden.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$$

7.3 Aufgabe 3

Die nachfolgende Funktion soll um eine Einheit nach oben und um zwei Einheiten nach rechts verschoben werden.

$$f(x) = -2x^3 + x^2 - 4x + 1$$

7.4 Aufgabe 4

Die nachfolgende Funktion soll so verschoben werden, dass ihr **Hochpunkt** bei $H(2|3)$ liegt.

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 9$$

7.5 Aufgabe 5

Die nachfolgende Funktion soll an der x -Achse gespiegelt werden.

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 9$$

7.6 Aufgabe 6

Die nachfolgende Funktion soll an der y -Achse gespiegelt werden.

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 9$$

7.7 Aufgabe 7

Die nachfolgende Funktion soll am Koordinatenursprung gespiegelt werden.

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 9$$

7.8 Aufgabe 8

Die nachfolgende Funktion soll an der Achse $y = -1$ gespiegelt werden.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 9$$

7.9 Aufgabe 9

Die nachfolgende Funktion soll an der Achse $x = 1$ gespiegelt werden.

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x + 1$$

7.10 Aufgabe 10

Die nachfolgende Funktion soll am Spiegel-Punkt $S(-2 | -4)$ gespiegelt werden.

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 9$$

8 Lösungen der Übungsaufgaben

Die aufgezeigten Lösungswege in der nachfolgenden Musterlösung sind nicht die einzig möglichen.

8.1 Aufgabe 1

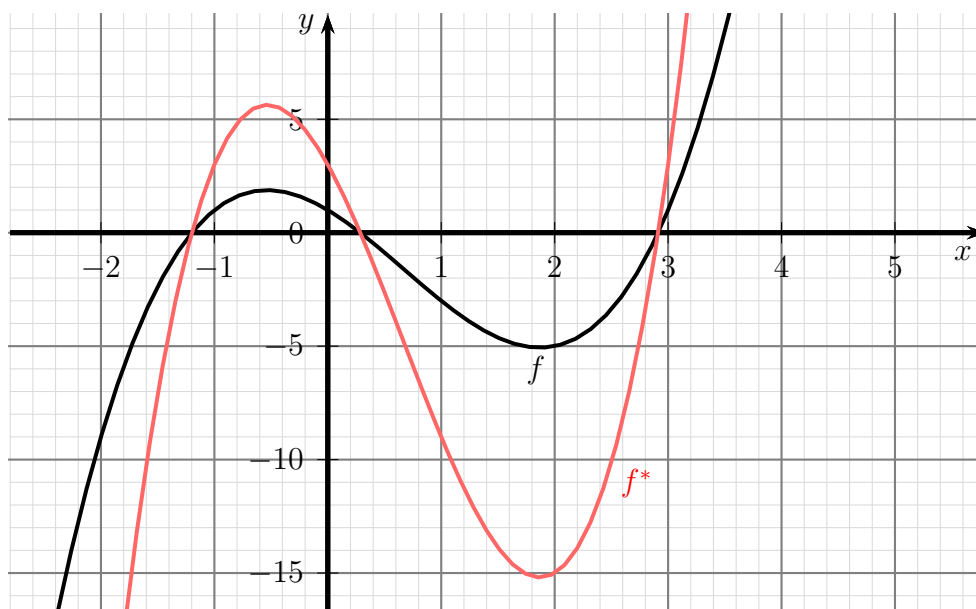
Die nachfolgende Funktion soll um den Faktor 3 vertikal gedehnt werden.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - 3x + 1 \\ f^*(x) &= 3 \cdot f(x) \\ f^*(x) &= 3 \cdot (x^3 - 2x^2 - 3x + 1) \\ f^*(x) &= 3x^3 - 6x^2 - 9x + 3 \end{aligned}$$

Für den besseren Überblick hier die beiden Funktionsgraphen:



8.2 Aufgabe 2

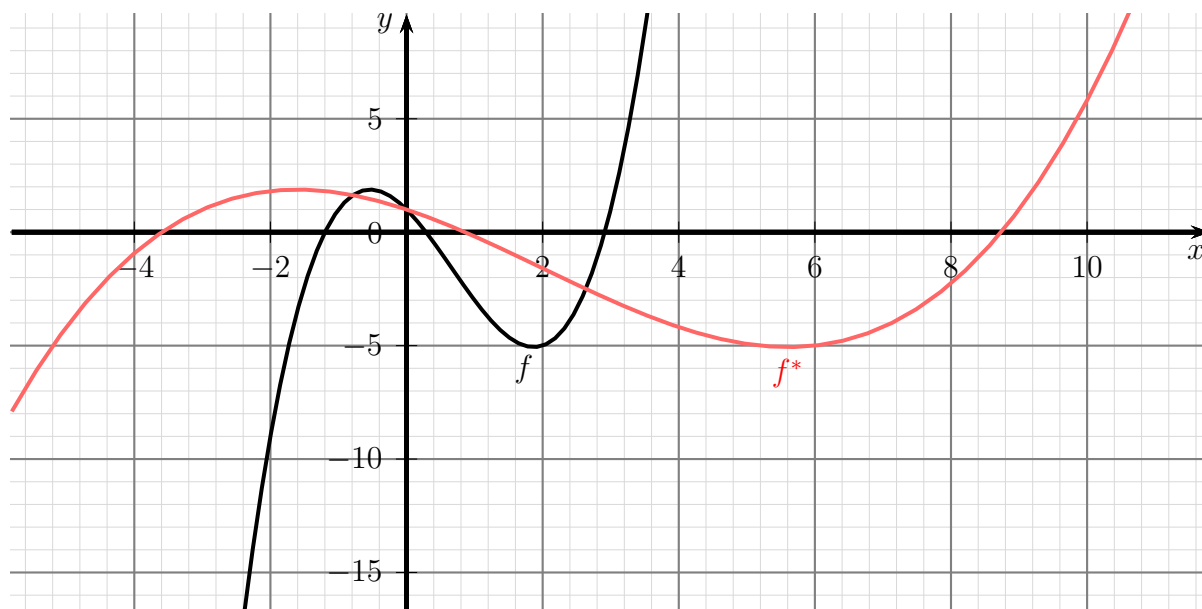
Die nachfolgende Funktion soll um den Faktor 3 horizontal gedehnt werden.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$$

Lösung: Hier muss man aufpassen! Ein Faktor 3 wäre keine Dehnung, sondern eine Stauchung! Der Faktor muss daher $\frac{1}{3}$ lauten.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - 3x + 1 \\ f^*(x) &= f\left(\frac{1}{3} \cdot x\right) \\ f^*(x) &= \left(\frac{x}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{x}{3} + 1 \\ f^*(x) &= \frac{1}{27}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

Für den besseren Überblick hier die beiden Funktionsgraphen:



8.3 Aufgabe 3

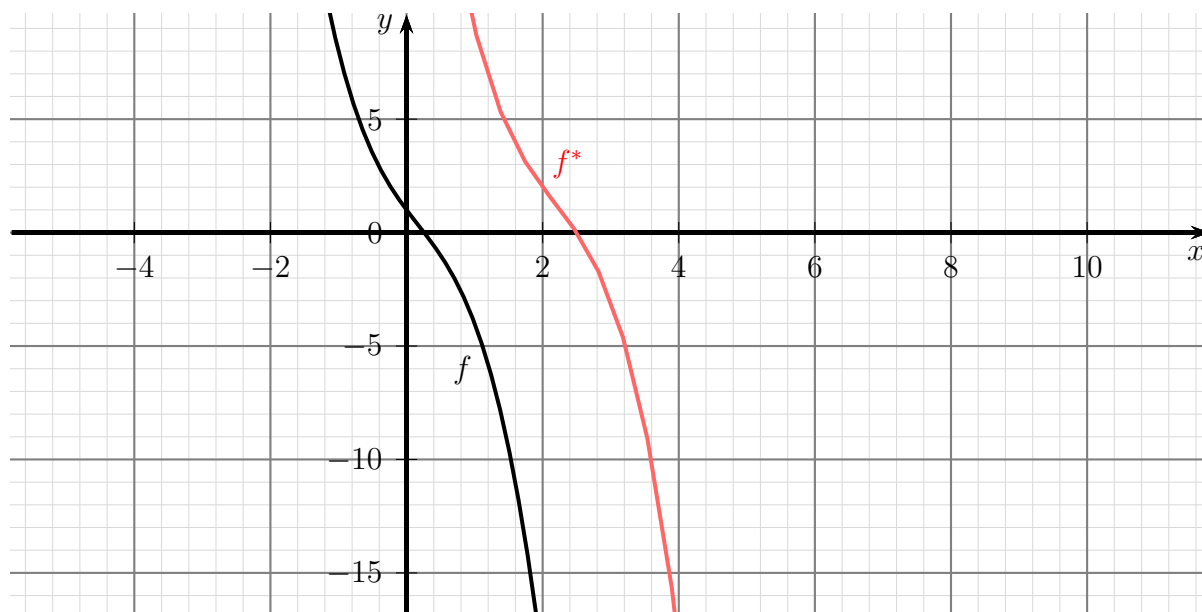
Die nachfolgende Funktion soll um eine Einheit nach oben und um zwei Einheiten nach rechts verschoben werden.

$$f(x) = -2x^3 + x^2 - 4x + 1$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^3 + x^2 - 4x + 1 \\ f^*(x) &= f(x - 2) + 1 \\ f^*(x) &= -2 \cdot (x - 2)^3 + (x - 2)^2 - 4 \cdot (x - 2) + 1 + 1 \\ &= -2 \cdot (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + x^2 - 4x + 4 - 4x + 8 + 1 + 1 \\ &= -2x^3 + 12x^2 - 24x + 16 + x^2 - 4x + 4 - 4x + 8 + 1 + 1 \\ f^*(x) &= -2x^3 + 13x^2 - 32x + 30 \end{aligned}$$

Für den besseren Überblick hier die beiden Funktionsgraphen:



8.4 Aufgabe 4

Die nachfolgende Funktion soll so verschoben werden, dass ihr **Hochpunkt** bei $H(2|3)$ liegt.

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 9$$

Lösung: Hier muss zuerst der Hochpunkt ermittelt werden. Dazu muss die erste Ableitung gleich Null gesetzt werden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 24x + 45 \\ 0 &= 3x_E^2 - 24x_E + 45 && | : 3 \\ 0 &= x_E^2 - 8x_E + 15 && | p-q-Formel \\ x_{E1/2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 15} \\ &= 4 \pm 1 \\ x_{E1} &= 3 && x_{E2} = 5 \end{aligned}$$

Jetzt muss geprüft werden, ob bei x_1 oder bei x_2 ein Hochpunkt vorliegt. Das kann mit dem Vorzeichenkriterium geschehen.

Untersuchung für $x_{E1} = 3$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= 3 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 45 = 9 > 0 \\ f'(4) &= 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 45 = -3 < 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von + nach - \Rightarrow Hochpunkt bei $x_{E1} = 3$

Der zugehörige y -Wert ist der Funktionswert an der Stelle $x_{E1} = 3$. Dieser wird berechnet:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = f(3) = 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 45 \cdot 3 - 9 = 45$$

Ergebnis: Hochpunkt $H^*(3|45)$

Untersuchung für $x_{E2} = 5$:

$$\begin{aligned} f'(4) &= 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 45 = -3 < 0 \\ f'(6) &= 3 \cdot 6^2 - 24 \cdot 6 + 45 = 9 > 0 \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel von - nach + \Rightarrow Tiefpunkt bei $x_{E2} = 5$

Da kein Tiefpunkt gesucht ist, erübrigt es sich, den zugehörigen Funktionswert zu berechnen.

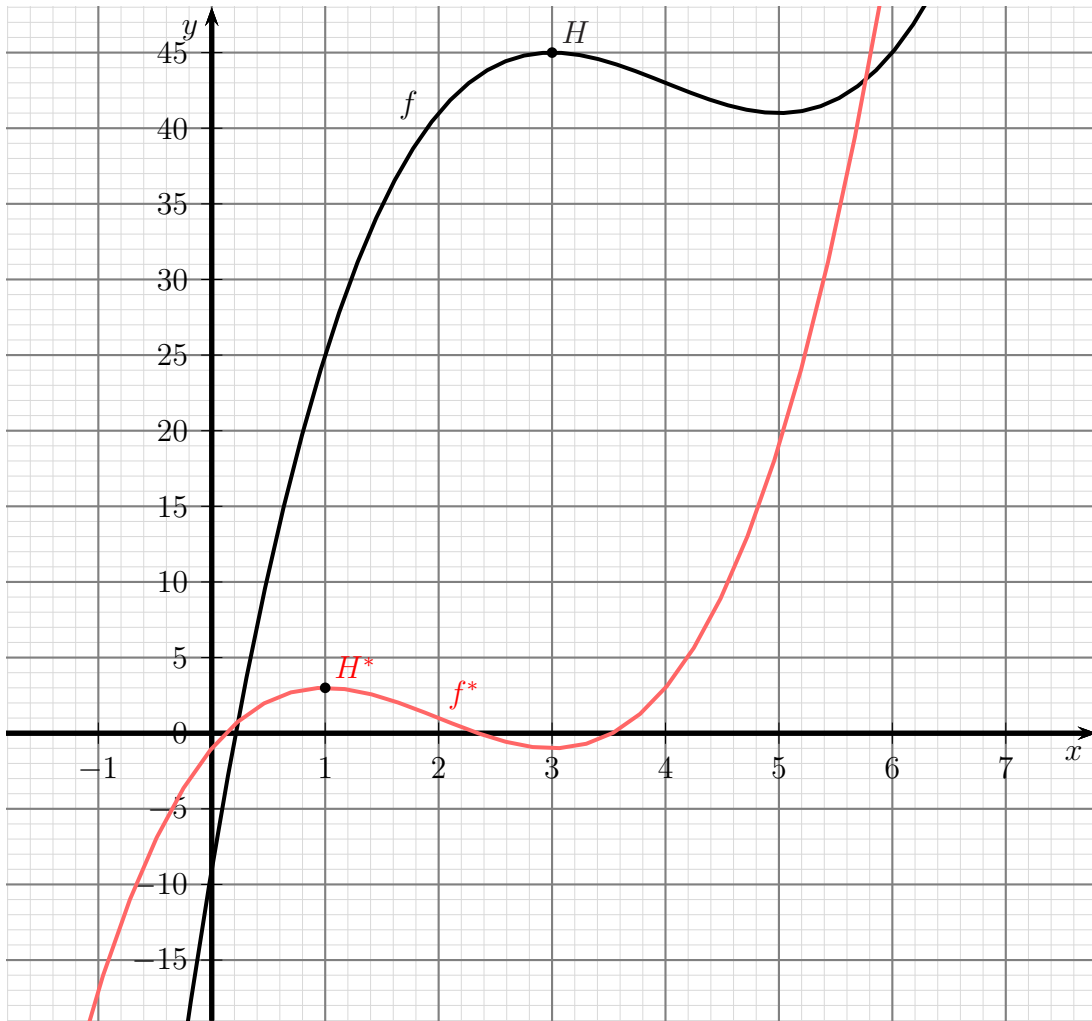
Der Hochpunkt liegt bei $H^*(3|45)$, er soll nach $H(2|3)$ verschoben werden. Das bedeutet diese Verschiebewerte:

$$\begin{aligned} x_s &= -2 \\ y_v &= -42 \end{aligned}$$

Die verschobene Funktion kann angegeben werden.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 - 12x^2 + 45x - 9 \\
 f^*(x) &= f(x+2) - 42 \\
 f^*(x) &= (x+2)^3 - 12 \cdot (x+2)^2 + 45 \cdot (x+2) - 9 - 42 \\
 &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 12 \cdot (x^2 + 4x + 4) + 45x + 90 - 9 - 42 \\
 &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 12x^2 - 48x - 48 + 45x + 90 - 9 - 42 \\
 f^*(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x - 1
 \end{aligned}$$

Für den besseren Überblick hier die beiden Funktionsgraphen:



8.5 Aufgabe 5

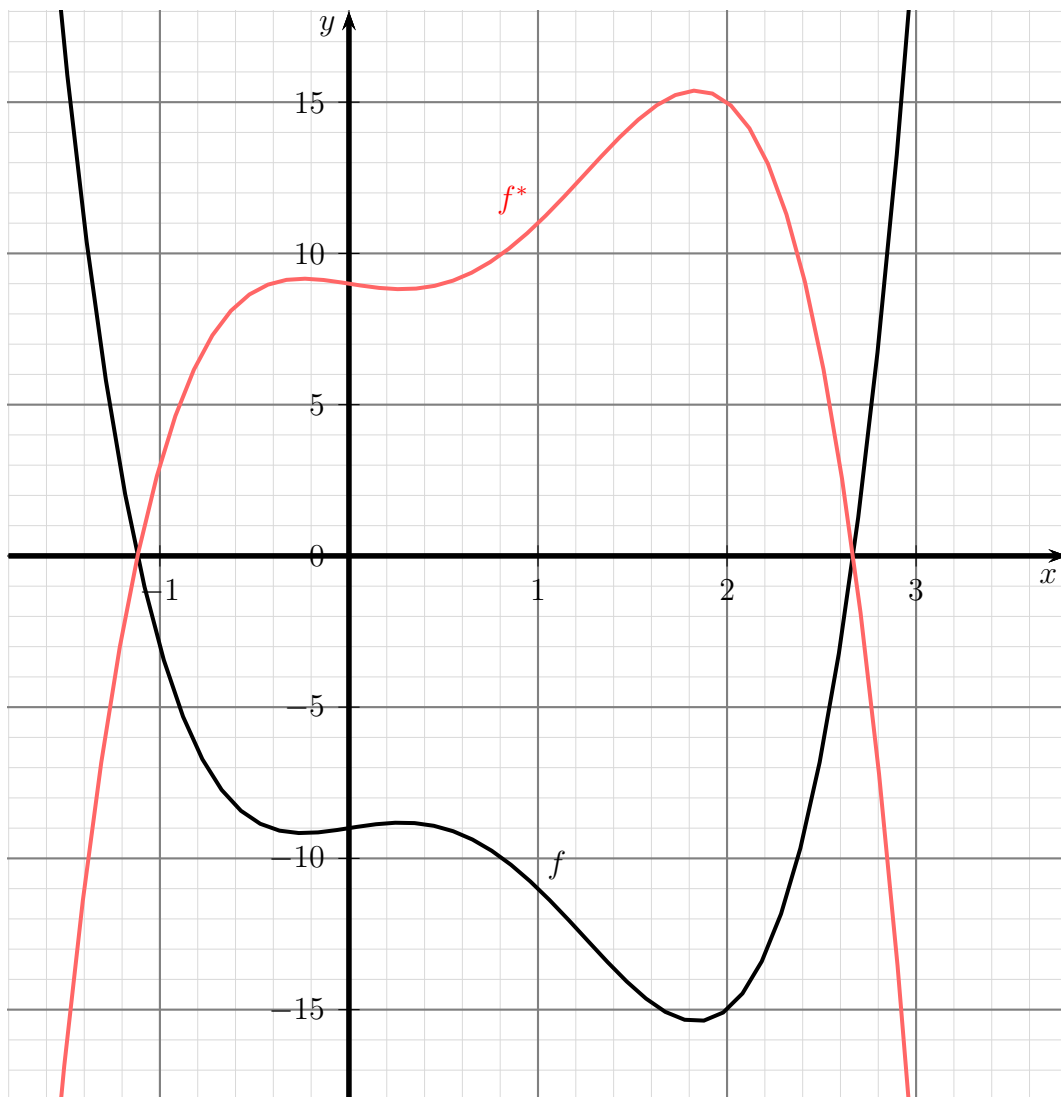
Die nachfolgende Funktion soll an der x -Achse gespiegelt werden.

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 9$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 5x^3 + x - 9 \\ f^*(x) &= -f(x) \\ f^*(x) &= -(2x^4 - 5x^3 + x - 9) \\ f^*(x) &= -2x^4 + 5x^3 - x + 9 \end{aligned}$$

Für den besseren Überblick hier die beiden Funktionsgraphen:



8.6 Aufgabe 6

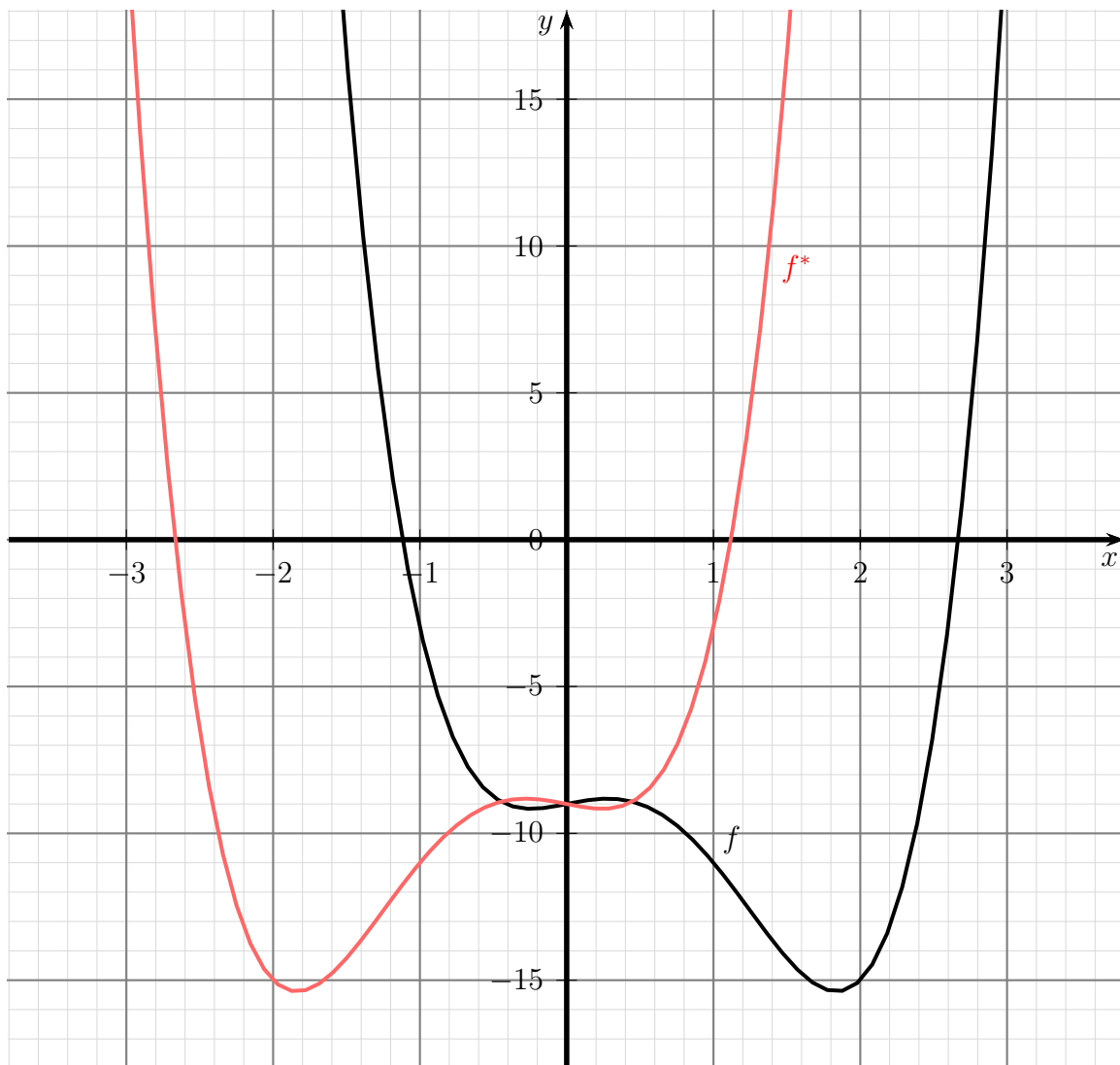
Die nachfolgende Funktion soll an der y -Achse gespiegelt werden.

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 9$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 5x^3 + x - 9 \\ f^*(x) &= f(-x) \\ f^*(x) &= 2 \cdot (-x)^4 - 5 \cdot (-x)^3 + (-x) - 9 \\ f^*(x) &= 2x^4 + 5x^3 - x - 9 \end{aligned}$$

Für den besseren Überblick hier die beiden Funktionsgraphen:



8.7 Aufgabe 7

Die nachfolgende Funktion soll am Koordinatenursprung gespiegelt werden.

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 9$$

Lösung:

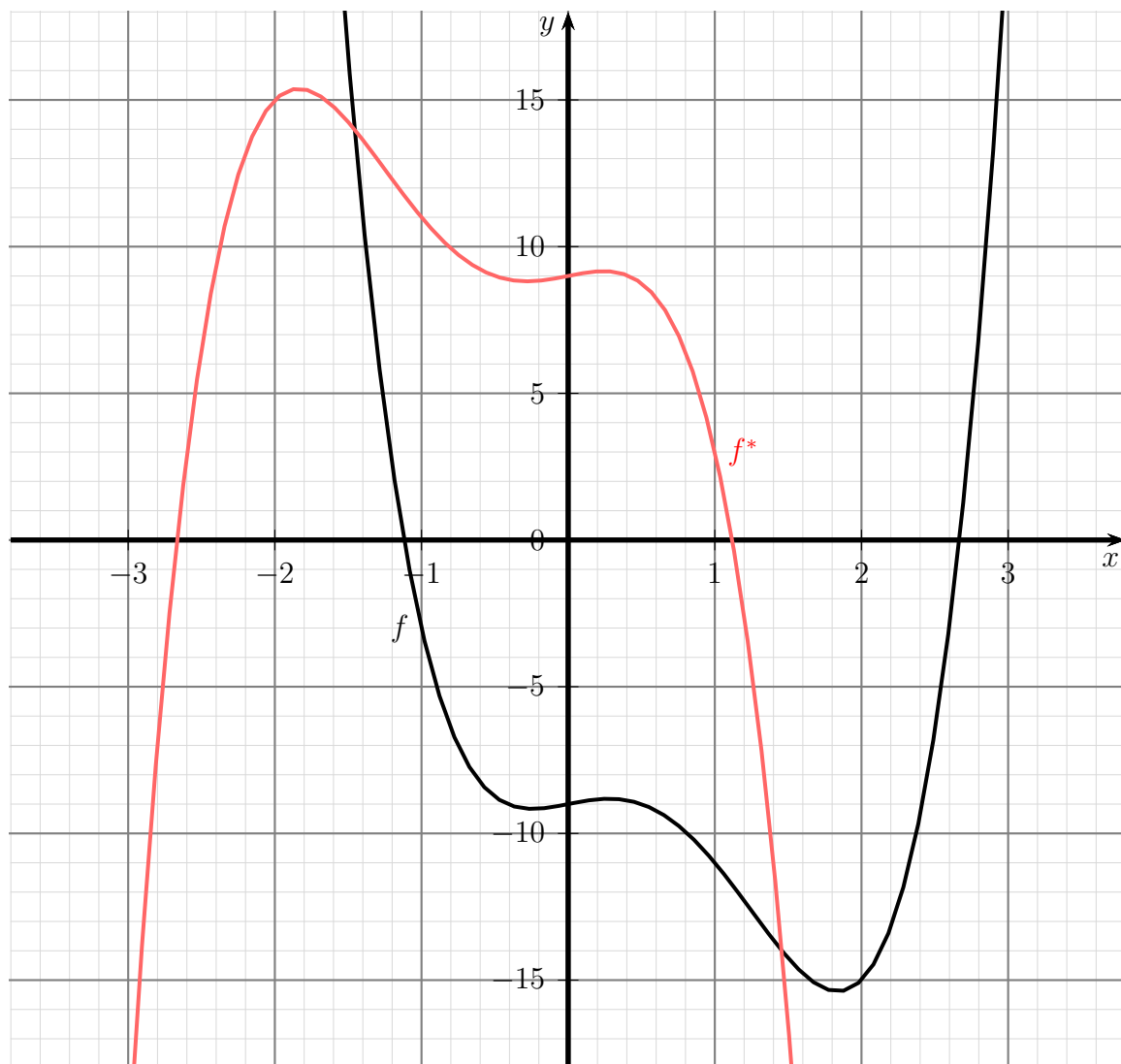
$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 9$$

$$f^*(x) = -f(-x)$$

$$f^*(x) = -\left(2 \cdot (-x)^4 - 5 \cdot (-x)^3 + (-x) - 9\right)$$

$$f^*(x) = -2x^4 - 5x^3 + x + 9$$

Für den besseren Überblick hier die beiden Funktionsgraphen:



8.8 Aufgabe 8

Die nachfolgende Funktion soll an der Achse $y = -1$ gespiegelt werden.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 9$$

Lösung:

Teil 1: Verschiebung um 1 Einheiten nach oben:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 9 \\ f_1(x) &= f(x) + 1 \\ &= x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 9 + 1 \\ f_1(x) &= x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 8 \end{aligned}$$

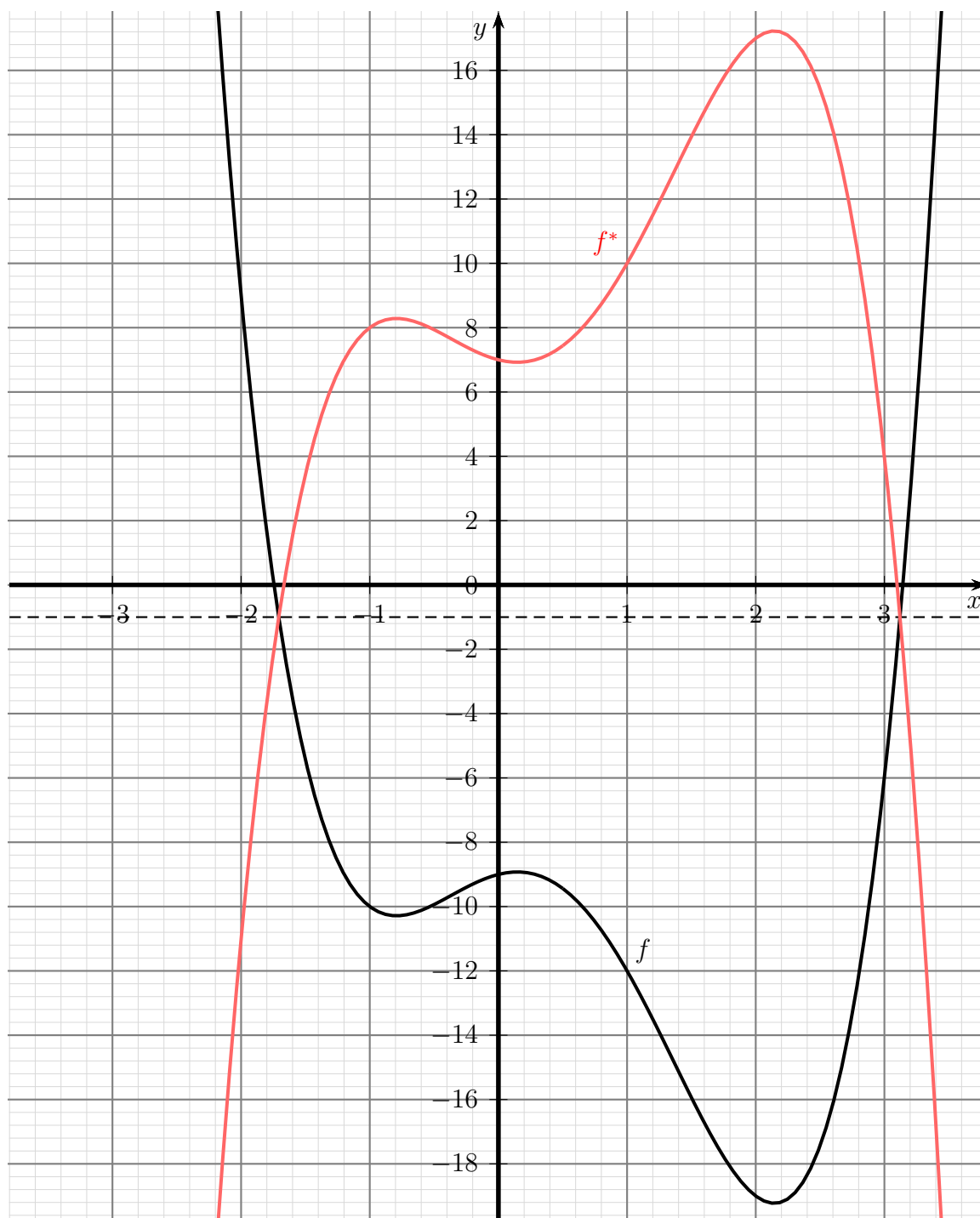
Teil 2: Spiegelung an der x -Achse:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 8 \\ f_2(x) &= -f_1(x) \\ &= -(x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 8) \\ f_2(x) &= -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 8 \end{aligned}$$

Teil 3: Verschiebung um 1 Einheiten wieder nach unten:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 8 \\ f^*(x) &= f_2(x) - 1 \\ &= -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 8 - 1 \\ f^*(x) &= -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 7 \end{aligned}$$

Für den besseren Überblick hier die beiden Funktionsgraphen:



8.9 Aufgabe 9

Die nachfolgende Funktion soll an der Achse $x = 1$ gespiegelt werden.

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x + 1$$

Lösung:

Teil 1: Verschiebung um eine Einheit nach links:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x + 1 \\ f_1(x) &= f(x+1) \\ &= (x+1)^4 - 8 \cdot (x+1)^3 + 19 \cdot (x+1)^2 - 12 \cdot (x+1) + 1 \\ &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - 8 \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \dots \\ &\quad \dots + 19 \cdot (x^2 + 2x + 1) - 12x - 12 + 1 \\ &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - 8x^3 - 24x^2 - 24x - 8 \dots \\ &\quad \dots + 19x^2 + 38x + 19 - 12x - 12 + 1 \\ f_1(x) &= x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

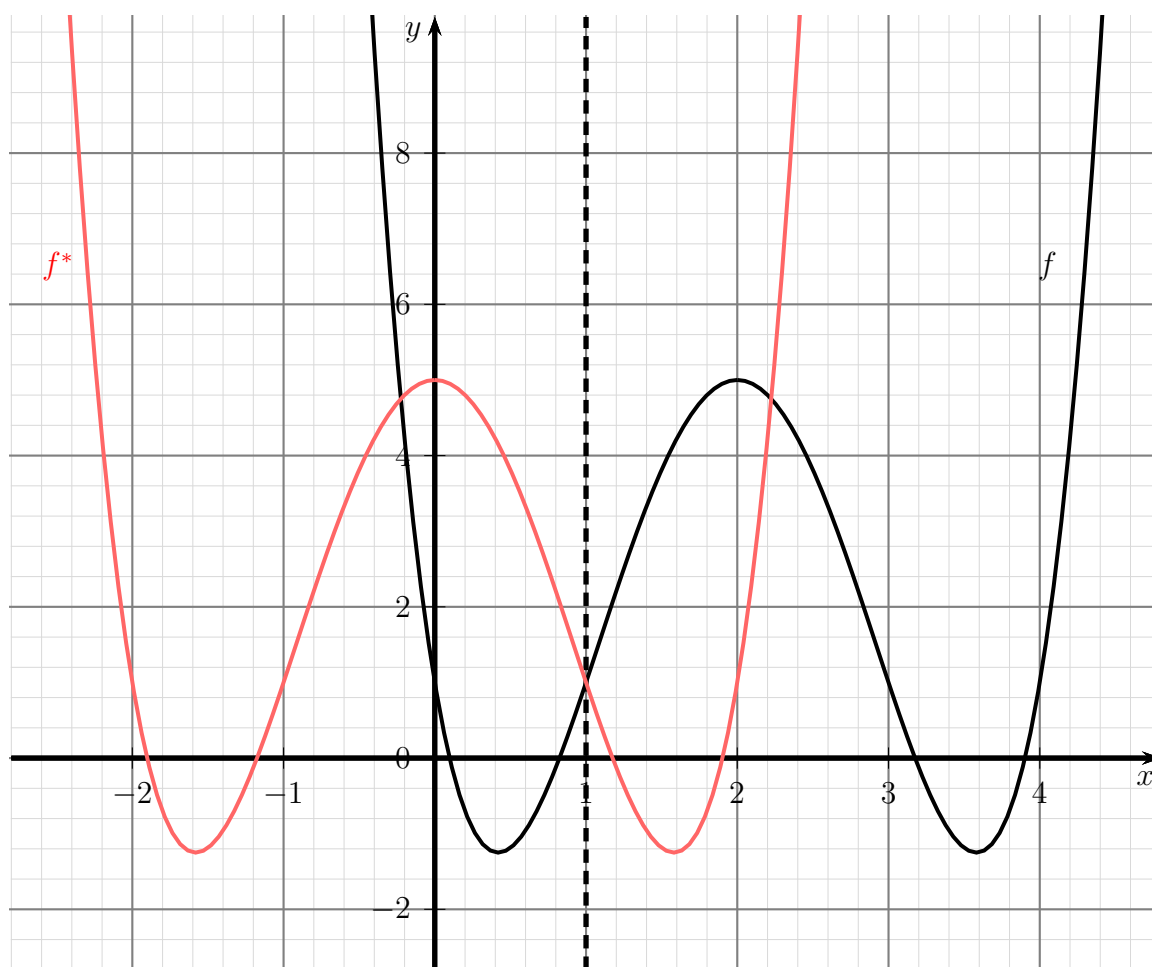
Teil 2: Spiegelung an y -Achse:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 1 \\ f_2(x) &= f_1(-x) \\ &= (-x)^4 - 4 \cdot (-x)^3 + (-x)^2 + 6 \cdot (-x) + 1 \\ f_2(x) &= x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 1 \end{aligned}$$

Teil 3: Verschiebung um eine Einheit zurück nach rechts:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 1 \\ f^*(x) &= f_2(x-1) \\ &= (x-1)^4 + 4 \cdot (x-1)^3 + (x-1)^2 - 6 \cdot (x-1) + 1 \\ &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 + 4 \cdot (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + x^2 - 2x + 1 - 6x + 6 + 1 \\ &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 + 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 + x^2 - 2x + 1 - 6x + 6 + 1 \\ f^*(x) &= x^4 - 5x^2 + 5 \end{aligned}$$

Für den besseren Überblick hier die beiden Funktionsgraphen:



8.10 Aufgabe 10

Die nachfolgende Funktion soll am Spiegel-Punkt $S(-2 | -4)$ gespiegelt werden.

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 9$$

Lösung:

Teil 1: Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts und 4 nach oben:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^4 - 3x^2 + x - 9 \\f_1(x) &= f(x - 2) + 4 \\&= (x - 2)^4 - 3 \cdot (x - 2)^2 + (x - 2) - 9 + 4 \\&= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 - 3 \cdot (x^2 - 4x + 4) + x - 2 - 9 + 4 \\&= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 - 3x^2 + 12x - 12 + x - 2 - 9 + 4 \\f_1(x) &= x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 19x - 3\end{aligned}$$

Teil 2: Punktspiegelung am Koordinatenursprung:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 19x - 3 \\f_2(x) &= -f_1(-x) \\&= -\left((-x)^4 - 8 \cdot (-x)^3 + 21 \cdot (-x)^2 - 19 \cdot (-x) - 3\right) \\&= -(x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 19x - 3) \\f_2(x) &= -x^4 - 8x^3 - 21x^2 - 19x + 3\end{aligned}$$

Teil 3: Verschiebung zurück um 2 Einheiten nach links und 4 nach unten:

$$\begin{aligned}f_2(x) &= -x^4 - 8x^3 - 21x^2 - 19x + 3 \\f^*(x) &= f_2(x + 2) - 4 \\&= -(x + 2)^4 - 8 \cdot (x + 2)^3 - 21 \cdot (x + 2)^2 - 19 \cdot (x + 2) + 3 - 4 \\&= -(x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16) - 8 \cdot (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) \dots \\&\quad \dots - 21 \cdot (x^2 + 4x + 4) - 19x - 38 + 3 - 4 \\&= -x^4 - 8x^3 - 24x^2 - 32x - 16 - 8x^3 - 48x^2 - 96x - 64 \dots \\&\quad \dots - 21x^2 - 84x - 84 - 19x - 38 + 3 - 4 \\f^*(x) &= -x^4 - 16x^3 - 93x^2 - 231x - 203\end{aligned}$$

Für den besseren Überblick hier die beiden Funktionsgraphen:

