Lösen von Textaufgaben

W. Kippels

25. März 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einleitung

Sehr oft liegt ein Problem mit mathematischem Hintergrund nicht in Form einer (oder mehrerer) Gleichung(en) vor, sondern in Textform. Dann muss der Text in eine mathematich bearbeitbare Form umgewandelt werden, also in eine oder (meist) mehrere Gleichung(en). Obwohl jeder Text anders ist, ist aber trotzdem eine strukturierte Vorgehensweise möglich und auch notwendig.

3 Grundsätzliche Vorgehensweise

Wie man dabei vorgehen kann, möchte ich anhand eines Beispiels erläutern. Vom Prinzip sieht der Leitfaden so aus:

1. Man bezeichnet alle gesuchten Größen mit einem geeigneten Formelbuchstaben.
2. Man stellt mögliche Zusammenhänge durch Terme dar, wobei man so tut, als seien die gesuchten Größen schon bekannt.
3. Irgendwann stellt man fest, dass bestimmte Zusammenhänge auf zwei unterschiedliche Arten angegeben werden können. Die zugehörigen Terme werden dann gleichgesetzt, wir erhalten (jeweils) eine Gleichung.

Da sich das alles sehr theoretisch anhört, möchte ich die Vorgehensweise an zwei Beispielen vorführen.

Beispiel 1

> **Zur Verfügung steht ein Behälter mit 30-prozentigem Alkokol und ein Behälter mit 40-prozentigem Alkohol. Durch geeignetes Zusammenmischen soll ein Liter 32-prozentiger Alkohol hergestellt werden. Wieviel aus jedem Behälter muss für diese Mischung verwendet werden?**

Schritt 1: Festlegung der Variablen

Gesucht sind die Mengen aus Behälter A und Behälter B. Daher bezeichne ich diese Mengen mit x und y. (Natürlich ist auch jedes andere Formelzeichen möglich.)

$$\begin{array}{rl} \text{Menge aus Behälter A:} & x \\ \text{Menge aus Behälter B:} & y \end{array}$$

Schritt 2: Aufstellen von Zusammenhängem

Man könnte fragen, wieviel Alkohol aus Behälter A bzw. B in der fertigen Mischung enthalten ist. Das geben wir an. Hierbei ist zu beachten, dass $30\% = 0,3$ und $40\% = 0,4$ ist.

$$\begin{array}{rl} \text{Alkoholmenge aus Behälter A:} & 0{,}3 \cdot x \\ \text{Alkoholmenge aus Behälter B:} & 0{,}4 \cdot x \end{array}$$

Hiermit können wir auch die Gesamtmenge an Alkohol in der fertigen Mischung angeben.

$$\text{Gesamt-Alkoholmenge:} \quad 0{,}3 \cdot x + 0{,}4 \cdot y$$

Schritt 3: Gleichung erstellen

Diese Gesamt-Alkoholmenge kann nun auch anders, nämlich mit Hilfe des vorgesehenen Prozentanteils der fertigen Mischung bestimmt werden. Dadurch erhalten wir eine Gleichung.

$$\text{Gesamt-Alkoholmenge:} \quad 0{,}3 \cdot x + 0{,}4 \cdot y \quad = \quad 0{,}32 \cdot 1\,\mathrm{l}$$

Da wir **zwei** Variable haben benötigen wir auch **zwei** Gleichungen. Es kommt also noch einmal Schritt 2 und Schritt 3.

Ein einfacher Zusammenhang, den wir auch aufstellen können, ist die gesamte Flüssigkeitsmenge. Diese ist zudem noch mit einem Liter bekannt. Wir erhalten sofort eine zweite Gleichung.

$$\text{Gesamt-Flüssigkeitsmenge:} \quad x + y \quad = \quad 1\,\mathrm{l}$$

Wir haben ein Gleichungssystem 2. Ordnung erhalten, das wir mit einem beliebigen Lösungsverfahren[1] lösen können.

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} (1) & 0{,}3\cdot x + 0{,}4\cdot y & = & 0{,}32\cdot 1\,\mathrm{l} \\ (2) & x+y & = & 1\,\mathrm{l} \end{array}}$$

Als Lösungsmethode möchte ich das Einsetzungsverfahren verwenden. Dazu löse ich Gleichung (2) nach x auf.

$$\begin{array}{rcll} x+y & = & 1\,\mathrm{l} & \quad | -y \\ x & = & 1\,\mathrm{l} - y & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} 0{,}3x + 0{,}4y & = & 0{,}32\,\mathrm{l} & \\ 0{,}3\cdot(1\,\mathrm{l} - y) + 0{,}4y & = & 0{,}32\,\mathrm{l} & \\ 0{,}3\,\mathrm{l} - 0{,}3y + 0{,}4y & = & 0{,}32\,\mathrm{l} & | - 0{,}3\,\mathrm{l} \\ 0{,}1y & = & 0{,}02\,\mathrm{l} & | : 0{,}1 \\ y & = & 0{,}2\,\mathrm{l} & \end{array}$$

Durch Einsetzen des Ergebnisses in die umgestellte Gleichung (2) erhalten wir sofort auch x.

$$x = 1\,\mathrm{l} - y = 1\,\mathrm{l} - 0{,}2\,\mathrm{l} = 0{,}8\,\mathrm{l}$$

Ergebnis:

Man erhält einen Liter 32-prozentigen Alkohol durch Mischung von 0,8 Liter 30-prozentigem und 0,2 Liter 40-prozentigem Alkohol.

[1] Lösungsverfahren für Lineargleichungssysteme z.B. siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

Beispiel 2

> **Auto A – ein Benziner – kostet 15 000 €. Es verbraucht auf 100 Kilometern 8 Liter Benzin. Auto B – ein Dieselfahrzeug – verbraucht auf 100 Kilometern 6 Liter Diesel und kostet 16 900 €. Nach welcher Wegstrecke lohnt sich das Dieselfahrzeug, wenn ein Liter Diesel 1,10 € und ein Liter Benzin 1,30 € kostet?**

Schritt 1: Festlegung der Variablen

Gesucht ist die Wegstrecke, bei der die Gesamtkosten beider Fahrzeuge gleich sind. Hierfür verwende ich den Formelbuchstaben $\boldsymbol{s}$.

Schritt 2: Aufstellen von Zusammenhängem

$$\begin{aligned}
\text{Auto A Betriebskosten je 100 km}: \quad 8 \cdot 1{,}30\,€ &= 10{,}40\,€ \\
\text{Auto B Betriebskosten je 100 km}: \quad 6 \cdot 1{,}10\,€ &= 6{,}60\,€
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Auto A Betriebskosten für Gesamtstrecke:} &\quad 10{,}40\,€ \cdot \frac{s}{100\,\text{km}} \\
\text{Auto B Betriebskosten für Gesamtstrecke:} &\quad 6{,}60\,€ \cdot \frac{s}{100\,\text{km}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Gesamtkosten Auto A:} &\quad 15\,000\,€ + 10{,}40\,€ \cdot \frac{s}{100\,\text{km}} \\
\text{Gesamtkosten Auto B:} &\quad 16\,900\,€ + 6{,}60\,€ \cdot \frac{s}{100\,\text{km}}
\end{aligned}$$

Schritt 3: Gleichung erstellen

Da die Strecke $\boldsymbol{s}$ gesucht ist, bei der die Gesamtkosten für beide Fahrzeuge gleich sind, können diese gleichgesetzt werden.

$$15\,000\,€ + 10{,}40\,€ \cdot \frac{s}{100\,\text{km}} = 16\,900\,€ + 6{,}60\,€ \cdot \frac{s}{100\,\text{km}}$$

Diese Gleichung kann nun gelöst werden.

$$\begin{aligned}
15\,000\,€ + 10{,}40\,€ \cdot \frac{s}{100\,\text{km}} &= 16\,900\,€ + 6{,}60\,€ \cdot \frac{s}{100\,\text{km}} && \left|\, - 15\,000\,€ - 6{,}60\,€ \cdot \frac{s}{100\,\text{km}}\right. \\
3{,}80\,€ \cdot \frac{s}{100\,\text{km}} &= 1\,900\,€ && \left|\, \cdot \frac{100\,\text{km}}{3{,}80\,€}\right. \\
s &= 50\,000\,\text{km}
\end{aligned}$$

Ergebnis:

> **Nach 50 000 Kilometern lohnt sich das Dieselauto.**

4 Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

Ein Hotel bestätigt eine Buchung:„Wir haben für 50 Personen 36 Zimmer reserviert. Unsere Zimmer sind ausschließlich Einbett- und Zweibettzimmer.“ Wieviele Einbett- und wieviele Zweibettzimmer sind reserviert worden?

4.2 Aufgabe 2

Schäfer Anton sagt zu Schäfer Karl:„Gib mir zwei von deinen Schafen, dann habe ich doppelt so viele Schafe wie du.“ Darauf antwortet Schäfer Karl:„Gib mir lieben zwei von deinen Schafen, dann haben wir beide gleichviele Schafe.“ Wieviele Schafe hat Anton, wieviele Karl?

4.3 Aufgabe 3

Beim Marathonlauf (42,2 Kilometer) läuft da Costa mit einer Geschwindigkeit von 19 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ der Wendemarke bei km 21,1 entgegen. Der Läufer Baumann folgt mit einer Geschwindigkeit von 18,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. In welcher Entfernung von der Wendemarke gegegnen sie sich?

4.4 Aufgabe 4

Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 140 mm. Die dritte Seite ist 20 mm länger als die beiden Schenkel. Bestimmen Sie die Seitenlängen des Dreiecks!

4.5 Aufgabe 5

Drei Arbeitskollegen spielen einen Lotto-Systemtip und haben dafür wöchentlich 40,20 € zu zahlen. Davon zahlt A 20 €, B 10 € und C den Rest. Wie ist ein Lottogewinn von 35 000,- € aufzuteilen, wenn gerecht nach den Einzahlungsanteilen ausgezahlt werden soll?

4.6 Aufgabe 6

Ein PKW vom Typ A kostet 40 000,00 € bei der Anschaffung und benötigt pro 100 gefahrene Kilometer Wartungs- und Benzinkosten von 120,00 €; ein PKW vom Typ B kostet 35 000,00 € beim Kauf und verursacht Kosten von 130,00 € je 100 gefahrene Kilometer. Von welcher jährlichen Fahrstrecke an ist das Fahrzeug A preiswerter als Fahrzeug B, wenn man eine Nutzungsdauer von 8 Jahren zugrunde legt?

4.7 Aufgabe 7

Mit 100 m Zaun sollen 500 m^2 Feld abgesteckt werden. Das Feld soll **rechteckig** sein. Alle vier Seiten müssen mit einem Zaun versehen werden. Bestimmen Sie die Abmessungen des Rechteckes!

4.8 Aufgabe 8

Mit 100 m Zaun sollen 500 m^2 Feld abgesteckt werden. Das Feld soll **rechteckig** sein. Eine Seite grenzt an einen Fluss. Dort wird kein Zaun benötigt. Bestimmen Sie die Abmessungen des Rechteckes!

4.9 Aufgabe 9

Mit 100 m Zaun sollen 500 m^2 Feld abgesteckt werden. Das Feld soll **rechteckig** sein. Zwei benachbarte Seiten grenzen jeweils an einen Fluss. Dort wird kein Zaun benötigt. Bestimmen Sie die Abmessungen des Rechteckes!

4.10 Aufgabe 10

Mit 100 m Zaun sollen 500 m^2 Feld abgesteckt werden. Das Feld soll **rechteckig** sein. Eine Seite grenzt an einen Fluss und an einer benachbarten Seite soll ein 4 Meter breites Tor im Zaun vorgesehen werden. Bestimmen Sie die Abmessungen des Rechteckes!

5 Ergebnisse der Übungsaufgaben

5.1 Aufgabe 1

22 Einbettzimmer und 14 Zweibettzimmer

5.2 Aufgabe 2

Anton hat 14 und Karl 10 Schafe

5.3 Aufgabe 3

$s = 281\,\mathrm{m}$

5.4 Aufgabe 4

$a = b = 40\,\mathrm{mm}$ und $c = 60\,\mathrm{mm}$

5.5 Aufgabe 5

A: 17 412,93 €, B: 8 706,47 €, C: 8 880,60 €

5.6 Aufgabe 6

6 250 km

5.7 Aufgabe 7

Die Rechteckseiten betragen 13,82 m und 36,18 m.

5.8 Aufgabe 8

1. Lösung: Die Rechteckseite am Fluss beträgt 11,32 m, die andere Seite 44,34 m.
2. Lösung: Die Rechteckseite am Fluss beträgt 88,72 m, die andere Seite 5,64 m.

5.9 Aufgabe 9

Die Rechteckseiten betragen 94,72 m und 5,28 m.

5.10 Aufgabe 10

1. Lösung: Die Rechteckseite am Fluss beträgt 42,06 m, die andere Seite 11,88 m.
2. Lösung: Die Rechteckseite am Fluss beträgt 5,94 m, die andere Seite 84,12 m.

6 Komplette Lösungen der Übungsaufgaben

6.1 Aufgabe 1

Ein Hotel bestätigt eine Buchung:„Wir haben für 50 Personen 36 Zimmer reserviert. Unsere Zimmer sind ausschließlich Einbett- und Zweibettzimmer.“ Wieviele Einbett- und wieviele Zweibettzimmer sind reserviert worden?

Lösung:

Schritt 1: Festlegung der Variablen

$$\begin{array}{rl} \text{Anzahl der Einzelzimmer:} & e \\ \text{Anzahl der Doppelzimmer:} & d \end{array}$$

Schritt 2: Aufstellen von Zusammenhängen

$$\begin{array}{rrcl} \text{Gesamtanzahl der Zimmer:} & e+d & = & 36 \\ \text{Gesamtanzahl der Personen:} & e+2d & = & 50 \end{array}$$

Das Gleichungssystem kann bequem mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren[2] (oder einem beliebigen anderen Lösungsverfahren) gelöst werden.

$$\begin{array}{cccccl} (1) & e & +d & = & 36 & |- \\ (2) & e & +2d & = & 50 & | \\ \hline & & d & = & 14 & \end{array}$$

Durch Einsetzen des Ergebnisses in Gleichung (1) bestimme ich e.

$$\begin{array}{rcl} e+d & = & 36 \\ e+14 & = & 36|-14 \\ e & = & 22 \end{array}$$

Ergebnis:

$$\boxed{\text{Es wurden 22 Einbettzimmer und 14 Zweibettzimmer gebucht.}}$$

[2] Näheres dazu siehe z.B. hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf

6.2 Aufgabe 2

Schäfer Anton sagt zu Schäfer Karl:„Gib mir zwei von deinen Schafen, dann habe ich doppelt so viele Schafe wie du.“ Darauf antwortet Schäfer Karl:„Gib mir lieben zwei von deinen Schafen, dann haben wir beide gleichviele Schafe.“ Wieviele Schafe hat Anton, wieviele Karl?

Lösung:

Schritt 1: Festlegung der Variablen

$$\begin{aligned} \text{Anzahl Schafe Anton:} \quad & x \\ \text{Anzahl Schafe Karl:} \quad & y \end{aligned}$$

Schritt 2: Aufstellen von Zusammenhängen

$$\begin{aligned} \text{Anzahl Schafe Anton erster Tausch:} \quad & x+2 \\ \text{Anzahl Schafe Karl erster Tausch:} \quad & y-2 \end{aligned}$$

$$\text{Anzahl Schafe Anton erster Tausch:} \quad x+2 \;=\; 2\cdot(y-2)$$

$$\begin{aligned} \text{Anzahl Schafe Anton zweiter Tausch:} \quad & x-2 \\ \text{Anzahl Schafe Karl zweiter Tausch:} \quad & y+2 \end{aligned}$$

$$\text{Anzahl Schafe Anton zweiter Tausch:} \quad x-2 \;=\; y+2$$

Zunächst werden die beiden Gleichungen vereinfacht.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & x+2 & = & 2\cdot(y-2) & \\ (2) & x-2 & = & y+2 & \\ \hline (1) & x+2 & = & 2y-4 & |-2-2y \\ (2) & x-2 & = & y+2 & |+2-y \\ \hline (1) & x-2y & = & -6 & \\ (2) & x-y & = & 4 & \end{array}$$

Wir haben ein Gleichungssystem 2. Ordnung erhalten, das wir mit einem beliebigen Lösungsverfahren[3] lösen können. Es bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an.

$$\begin{array}{llrcll} (1) & x & -2y & = & -6 & |- \\ (2) & x & -y & = & 4 & | \\ \hline & & y & = & 10 & \end{array}$$

[3] Lösungsverfahren für Lineargleichungssysteme z.B. siehe hier:
http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

Das Ergebnis setze ich in (2) ein, um x zu bestimmen.

$$\begin{aligned} x - y &= 4 \\ x - 10 &= 4 \qquad | + 10 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

Ergebnis:

$\boxed{\text{Anton besitzt 14 und Karl 10 Schafe}}$

6.3 Aufgabe 3

Beim Marathonlauf (42,2 Kilometer) läuft da Costa mit einer Geschwindigkeit von 19 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ der Wendemarke bei km 21,1 entgegen. Der Läufer Baumann folgt mit einer Geschwindigkeit von 18,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. In welcher Entfernung von der Wendemarke gegegnen sie sich?

Lösung:

Schritt 1: Festlegung der Variablen

$$\text{Abstand Treffpunkt – Wendepunkt:} \quad x$$

Schritt 2: Aufstellen von Zusammenhängen

Zunächst wird die Grundformel für die Geschwindigkeit nach t umgestellt.

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} && | \cdot t \\ v \cdot t &= s && | : v \\ t &= \frac{s}{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Laufstrecke da Costa bis Treffpunkt:} &\quad 21{,}1 + x \\ \text{Laufstrecke Baumann bis Treffpunkt:} &\quad 21{,}1 - x \\ \text{Laufzeit da Costa bis Treffpunkt:} &\quad t = \frac{s}{v} = \frac{21{,}1 + x}{19} \\ \text{Laufzeit Baumann bis Treffpunkt:} &\quad t = \frac{s}{v} = \frac{21{,}1 - x}{18{,}5} \end{aligned}$$

Da beide Zeiten gleich sein müssen (sonst träfen sie sich ja nicht), können sie gleichgesetzt werden.

$$\begin{aligned} \frac{21{,}1 + x}{19} &= \frac{21{,}1 - x}{18{,}5} && | \cdot 19 \cdot 18{,}5 \\ (21{,}1 + x) \cdot 18{,}5 &= (21{,}1 - x) \cdot 19 \\ 390{,}35 + 18{,}5x &= 400{,}9 - 19x && | - 390{,}35 + 19x \\ 37{,}5x &= 10{,}55 && | : 37{,}5 \\ x &\approx 0{,}281 \end{aligned}$$

Ergebnis:

Sie treffen sich in einer Entfernung von 281 m von der Wendemarke.

6.4 Aufgabe 4

Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 140 mm. Die dritte Seite ist 20 mm länger als die beiden Schenkel. Bestimmen Sie die Seitenlängen des Dreiecks!

Lösung:

Schritt 1: Festlegung der Variablen

$$\begin{aligned} \text{Schenkellänge:} \quad & x \\ \text{dritte Seite:} \quad & y \end{aligned}$$

Schritt 2: Aufstellen von Zusammenhängen

$$\begin{aligned} \text{dritte Seite:} \quad & y = x + 20 \\ \text{Umfang:} \quad & 2x + y = 140 \end{aligned}$$

Damit haben wir zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Dieses Gleichungssystem wird sinnvollerweise gelöst, indem man das Ergebnis der ersten Gleichung ($y = x + 20$) in die zweite Gleichung einsetzt.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 140 \\ 2x + (x + 20) &= 140 \\ 2x + x + 20 &= 140 \quad | - 20 \\ 3x &= 120 \quad | : 3 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis kann mit Hilfe der ersten Gleichung y bestimmt werden.

$$y * x + 20 = 40 + 20 = 60$$

Ergebnis:

Die Schenkellänge beträgt 40 mm, die dritte Seite ist 60 mm lang.

6.5 Aufgabe 5

Drei Arbeitskollegen spielen einen Lotto-Systemtip und haben dafür wöchentlich 40,20 € zu zahlen. Davon zahlt A 20 €, B 10 € und C den Rest. Wie ist ein Lottogewinn von 35 000,- € aufzuteilen, wenn gerecht nach den Einzahlungsanteilen ausgezahlt werden soll?

Lösung:

Schritt 1: Festlegung der Variablen

$$\begin{aligned}
\text{Gewinn A:} &\quad a \\
\text{Gewinn B:} &\quad b \\
\text{Gewinn C:} &\quad c
\end{aligned}$$

Schritt 2: Aufstellen von Zusammenhängen

$$\begin{aligned}
\text{Beitrag A:} &\quad 20 \\
\text{Beitrag B:} &\quad 10 \\
\text{Beitrag C:} &\quad 40{,}20 - 20 - 10 = 10{,}20 \\
\text{Beitrag-Anteil A:} &\quad \frac{20}{40{,}20} = 0{,}497\,512\,438 \\
\text{Beitrag-Anteil B:} &\quad \frac{10}{40{,}20} = 0{,}248\,756\,219 \\
\text{Beitrag-Anteil C:} &\quad \frac{10{,}20}{40{,}20} = 0{,}253\,731\,343 \\
\text{Gewinn-Anteil A:} &\quad \frac{a}{35\,000} \\
\text{Gewinn-Anteil B:} &\quad \frac{b}{35\,000} \\
\text{Gewinn-Anteil C:} &\quad \frac{c}{35\,000} \\
\text{Gewinn-Anteil A=Beitrag-Anteil A} &\quad \frac{a}{35\,000} = 0{,}497\,512\,438 \\
\text{Gewinn-Anteil B=Beitrag-Anteil B} &\quad \frac{b}{35\,000} = 0{,}248\,756\,219 \\
\text{Gewinn-Anteil C=Beitrag-Anteil C} &\quad \frac{c}{35\,000} = 0{,}253\,731\,343
\end{aligned}$$

Mit diesen drei Gleichungen können die Gewinne a, b und c bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{35\,000} &= 0{,}497\,512\,438 \quad | \cdot 35\,000 \\
a &= 17\,412{,}93
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{b}{35\,000} &= 0{,}248\,756\,219 \quad | \cdot 35\,000 \\
a &= 8\,706{,}47
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{c}{35\,000} &= 0{,}253\,731\,343 \quad | \cdot 35\,000 \\
a &= 8\,880{,}60
\end{aligned}$$

Ergebnis:

Spieler A erhält 17 412,93 €, Spieler B 8 706,47 € und Spieler C 8 880,60 €.

6.6 Aufgabe 6

Ein PKW vom Typ A kostet 40 000,00 € bei der Anschaffung und benötigt pro 100 gefahrene Kilometer Wartungs- und Benzinkosten von 120,00 €; ein PKW vom Typ B kostet 35 000,00 € beim Kauf und verursacht Kosten von 130,00 € je 100 gefahrene Kilometer. Von welcher jährlichen Fahrstrecke an ist das Fahrzeug A preiswerter als Fahrzeug B, wenn man eine Nutzungsdauer von 8 Jahren zugrunde legt?

Lösung:

Schritt 1: Festlegung der Variablen

Jahres-Kilometer bei gleichen Kosten: x

Schritt 2: Aufstellen von Zusammenhängen

$$\begin{aligned}
\text{Jährliche Betriebskosten Fahrzeug A:}\quad & \frac{x}{100\,\text{km}} \cdot 120{,}00\,€ \\
\text{Jährliche Betriebskosten Fahrzeug B:}\quad & \frac{x}{100\,\text{km}} \cdot 130{,}00\,€ \\
\text{Betriebskosten Fahrzeug A in 8 Jahren:}\quad & \frac{x}{100\,\text{km}} \cdot 120{,}00\,€ \cdot 8 \\
\text{Betriebskosten Fahrzeug B in 8 Jahren:}\quad & \frac{x}{100\,\text{km}} \cdot 130{,}00\,€ \cdot 8 \\
\text{Gesamtkosten Fahrzeug A in 8 Jahren:}\quad & \frac{x}{100\,\text{km}} \cdot 120{,}00\,€ \cdot 8 + 40\,000\,€ \\
\text{Gesamtkosten Fahrzeug B in 8 Jahren:}\quad & \frac{x}{100\,\text{km}} \cdot 130{,}00\,€ \cdot 8 + 35\,000\,€
\end{aligned}$$

Da die Gesamtkosten beider Fahrzeuge bei der zu bestimmenden Jahreskilometerleistung gleich sind, können sie **gleichgesetzt** werden. Die Einheiten werden jetzt weggelassen.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{100} \cdot 120 \cdot 8 + 40\,000 &= \frac{x}{100} \cdot 130 \cdot 8 + 35\,000 \\
9{,}6x + 40\,000 &= 10{,}4x + 35\,000 && \mid -10{,}4x - 40\,000 \\
-0{,}8x &= -5\,000 && \mid :(-0{,}8) \\
x &= 6\,250
\end{aligned}$$

Ergebnis:

Ab einer jährlichen Fahrstrecke von 6 250 Kilometern ist Fahrzeug A günstiger.

6.7 Aufgabe 7

Mit 100 m Zaun sollen 500 m^2 Feld abgesteckt werden. Das Feld soll **rechteckig** sein. Alle vier Seiten müssen mit einem Zaun versehen werden. Bestimmen Sie die Abmessungen des Rechteckes!

Lösung:

Schritt 1: Festlegung der Variablen

$$\begin{array}{rl} \text{Länge 1:} & a \\ \text{Länge 2:} & b \end{array}$$

Schritt 2: Aufstellen von Zusammenhängen

$$\begin{array}{rl} \text{gesamte Zaunlänge:} & 2a + 2b = 100\,\text{m} \\ \text{Fläche des Feldes:} & a \cdot b = 500\,\text{m}^2 \end{array}$$

Damit haben wir bereits zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Zur Lösung stelle ich beispielsweise die erste Gleichung nach a um. In der Rechnung wird die Grundeinheit „Meter" verwendet, die während der Rechnung aus Vereinfachungsgründen weggelassen werden soll.

$$\begin{array}{rcll} 2a + 2b & = & 100 & \mid -2b \\ 2a & = & 100 - 2b & \mid :2 \\ a & = & 50 - b & \end{array}$$

Dieser Term wird in der zweiten Gleichung für a eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} a \cdot b & = & 500 & \\ (50 - b) \cdot b & = & 500 & \\ 50b - b^2 & = & 500 & \mid -500 \\ -b^2 + 50b - 500 & = & 0 & \mid :(-1) \\ b^2 - 50b + 500 & = & 0 & \mid \text{p-q-Formel} \\ b_{1/2} & = & 25 \pm \sqrt{25^2 - 500} & \\ b_{1/2} & = & 25 \pm \sqrt{625 - 500} & \\ b_{1/2} & = & 25 \pm \sqrt{125} & \\ b_{1/2} & \approx & 25 \pm 11{,}18 & \\ b_1 \approx 13{,}82 & & b_2 \approx 36{,}18 & \end{array}$$

Die zugehörigen Werte für a werden berechnet:

$$\begin{array}{rclrcl} a_1 & = & 50 - b_1 & a_2 & = & 50 - b_2 \\ a_1 & \approx & 50 - 13{,}82 & a_2 & \approx & 50 - 36{,}18 \\ a_1 & \approx & 36{,}18 & a_2 & \approx & 13{,}82 \end{array}$$

Wie man sieht, sind die zugehörigen a-Werte der jeweils andere b-Wert. Das Ergebnis lautet also:

$$\boxed{\text{Die Rechteckseiten betragen } 13{,}82\,\text{m und } 36{,}18\,\text{m.}}$$

6.8 Aufgabe 8

Mit 100 m Zaun sollen 500 m² Feld abgesteckt werden. Das Feld soll **rechteckig** sein. Eine Seite grenzt an einen Fluss. Dort wird kein Zaun benötigt. Bestimmen Sie die Abmessungen des Rechteckes!

Lösung:

Schritt 1: Festlegung der Variablen

$$\begin{aligned} \text{Länge am Fluss:} &\quad a \\ \text{Länge quer zum Fluss:} &\quad b \end{aligned}$$

Schritt 2: Aufstellen von Zusammenhängen

$$\begin{aligned} \text{gesamte Zaunlänge:} &\quad a + 2b = 100\,\text{m} \\ \text{Fläche des Feldes:} &\quad a \cdot b = 500\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Damit haben wir bereits zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Zur Lösung stelle ich beispielsweise die erste Gleichung nach a um. In der Rechnung wird die Grundeinheit „Meter“ verwendet, die während der Rechnung aus Vereinfachungsgründen weggelassen werden soll.

$$\begin{aligned} a + 2b &= 100 && \mid -2b \\ a &= 100 - 2b \end{aligned}$$

Dieser Term wird in der zweiten Gleichung für a eingesetzt.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 500 \\ (100 - 2b) \cdot b &= 500 \\ 100b - 2b^2 &= 500 && \mid -500 \\ -2b^2 + 100b - 500 &= 0 && \mid : (-2) \\ b^2 - 50b + 250 &= 0 && \mid \text{p-q-Formel} \\ b_{1/2} &= 25 \pm \sqrt{625 - 250} \\ b_{1/2} &= 25 \pm \sqrt{375} \\ b_{1/2} &\approx 25 \pm 19{,}36 \\ b_1 \approx 44{,}36 &\qquad b_2 \approx 5{,}64 \end{aligned}$$

Die zugehörigen Werte für a werden berechnet:

$$\begin{aligned} a_1 &= 100 - 2b_1 & a_2 &= 100 - 2b_2 \\ a_1 &\approx 100 - 2 \cdot 44{,}34 & a_2 &\approx 100 - 2 \cdot 5{,}64 \\ a_1 &\approx 11{,}32 & a_2 &\approx 88{,}72 \end{aligned}$$

Es gibt zwei unterschiedliche Lösungen:

Die Rechteckseite am Fluss beträgt 11,32 m, die andere Seite 44,34 m.

oder:

Die Rechteckseite am Fluss beträgt 88,72 m, die andere Seite 5,64 m.

6.9 Aufgabe 9

Mit 100 m Zaun sollen 500 m^2 Feld abgesteckt werden. Das Feld soll **rechteckig** sein. Zwei benachbarte Seiten grenzen jeweils an einen Fluss. Dort wird kein Zaun benötigt. Bestimmen Sie die Abmessungen des Rechteckes!

Lösung:

Schritt 1: Festlegung der Variablen

$$\begin{array}{rl} \text{Länge 1:} & a \\ \text{Länge 2:} & b \end{array}$$

Schritt 2: Aufstellen von Zusammenhängen

$$\begin{array}{rl} \text{gesamte Zaunlänge:} & a + b = 100\,\text{m} \\ \text{Fläche des Feldes:} & a \cdot b = 500\,\text{m}^2 \end{array}$$

Damit haben wir bereits zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Zur Lösung stelle ich beispielsweise die erste Gleichung nach a um. In der Rechnung wird die Grundeinheit „Meter“ verwendet, die während der Rechnung aus Vereinfachungsgründen weggelassen werden soll.

$$\begin{array}{rcll} a + b & = & 100 & \mid -b \\ a & = & 100 - b & \end{array}$$

Dieser Term wird in der zweiten Gleichung für a eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} a \cdot b & = & 500 & \\ (100 - b) \cdot b & = & 500 & \\ 100b - b^2 & = & 500 & \mid -500 \\ -b^2 + 100b - 500 & = & 0 & \mid :(-1) \\ b^2 - 100b + 500 & = & 0 & \mid \text{p-q-Formel} \\ b_{1/2} & = & 50 \pm \sqrt{50^2 - 500} & \\ b_{1/2} & = & 50 \pm \sqrt{2\,500 - 500} & \\ b_{1/2} & = & 50 \pm \sqrt{2\,000} & \\ b_{1/2} & \approx & 50 \pm 44{,}72 & \\ b_1 \approx 94{,}72 & & b_2 \approx 5{,}28 & \end{array}$$

Die zugehörigen Werte für a werden berechnet:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} a_1 & = & 100 - b_1 & a_2 & = & 100 - b_2 \\ a_1 & \approx & 100 - 94{,}72 & a_2 & \approx & 100 - 5{,}28 \\ a_1 & \approx & 5{,}28 & a_2 & \approx & 94{,}72 \end{array}$$

Wie man sieht, sind die zugehörigen a-Werte der jeweils andere b-Wert. Das Ergebnis lautet also:

$$\boxed{\text{Die Rechteckseiten betragen } 94{,}72\,\text{m und } 5{,}28\,\text{m.}}$$

6.10 Aufgabe 10

Mit 100 m Zaun sollen 500 m^2 Feld abgesteckt werden. Das Feld soll **rechteckig** sein. Eine Seite grenzt an einen Fluss und an einer benachbarten Seite soll ein 4 Meter breites Tor im Zaun vorgesehen werden. Bestimmen Sie die Abmessungen des Rechteckes!

Lösung:

Schritt 1: Festlegung der Variablen

$$\begin{aligned} \text{Länge am Fluss:} &\quad a \\ \text{Länge quer zum Fluss:} &\quad b \end{aligned}$$

Schritt 2: Aufstellen von Zusammenhängen

$$\begin{aligned} \text{Zaunlänge Seite mit Torlücke:} &\quad b - 4\,\text{m} \\ \text{gesamte Zaunlänge:} &\quad a + b + (b - 4\,\text{m}) = 100\,\text{m} \\ \text{Fläche des Feldes:} &\quad a \cdot b = 500\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Damit haben wir bereits zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Zur Lösung stelle ich beispielsweise die erste Gleichung nach a um. In der Rechnung wird die Grundeinheit „Meter“ verwendet, die während der Rechnung aus Vereinfachungsgründen weggelassen werden soll.

$$\begin{aligned} a + b + b - 4 &= 100 \qquad \mid -2b + 4 \\ a &= 96 - 2b \end{aligned}$$

Dieser Term wird in der zweiten Gleichung für a eingesetzt.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 500 \\ (96 - 2b) \cdot b &= 500 \\ 96b - 2b^2 &= 500 \qquad \mid -500 \\ -2b^2 + 96b - 500 &= 0 \qquad \mid : (-2) \\ b^2 - 48b + 250 &= 0 \qquad \mid \text{p-q-Formel} \\ b_{1/2} &= 24 \pm \sqrt{576 - 250} \\ b_{1/2} &= 24 \pm \sqrt{326} \\ b_{1/2} &\approx 24 \pm 18{,}06 \\ b_1 \approx 42{,}06 & \qquad b_2 \approx 5{,}94 \end{aligned}$$

Die zugehörigen Werte für a werden berechnet:

$$\begin{aligned} a_1 &= 96 - 2b_1 & a_2 &= 96 - 2b_2 \\ a_1 &\approx 96 - 2 \cdot 42{,}06 & a_2 &\approx 96 - 2 \cdot 5{,}94 \\ a_1 &\approx 11{,}88 & a_2 &\approx 84{,}12 \end{aligned}$$

Es gibt zwei unterschiedliche Lösungen:

$\boxed{\text{Die Rechteckseite am Fluss beträgt 42,06 m, die andere Seite 11,88 m.}}$ oder:

$\boxed{\text{Die Rechteckseite am Fluss beträgt 5,94 m, die andere Seite 84,12 m.}}$