Herleitung der Leistungsformel für eine Gleichspannung mit überlagerter Wechselspannung

Problem: Eine Gleichspannung U_{Gl} und eine überlagerte (hochfrequente) Wechselspannung mit dem Effektivwert U_{HF} wirken auf einen Widerstand R ein. Kann man bei der Leistungsberechnung einfach die Gleichstromleistung P_{Gl} und die Wechselstromleistung P_{HF} einzeln berechnen und addieren, um die Gesamtleistung zu berechnen? Gemeint sind damit die Effektivwerte.

Ich gehe von einer Mischspannung gemäß folgender Funktion aus:

$$u(t) = U_{Gl} + \sqrt{2} \cdot U_{HF} \cdot \sin \omega t$$

Hierbei ist U_{Gl} der Gleichspannungsanteil und U_{HF} der Effektivwert des Wechselspannungsanteils. Den Faktor $\sqrt{2}$ benötige ich, um als Vorfaktor der Sinusfunktion den Scheitelwert zu erhalten. Für den Momentanwert der Leistung an einem Widerstand R erhalte ich:

$$\begin{aligned}
p(t) &= \frac{u^2(t)}{R} \\
&= \frac{(U_{Gl} + \sqrt{2} \cdot U_{HF} \cdot \sin \omega t)^2}{R} \\
&= \frac{U_{Gl}^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot U_{Gl} \cdot U_{HF} \cdot \sin \omega t + (\sqrt{2} \cdot U_{HF} \cdot \sin \omega t)^2}{R} \\
p(t) &= \frac{U_{Gl}^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot U_{Gl} \cdot U_{HF} \cdot \sin \omega t + 2 \cdot U_{HF}^2 \cdot \sin^2 \omega t}{R}
\end{aligned}$$

Nun bestimme ich die Arbeit für die Periodendauer T:

$$\begin{aligned}
W_T &= \int_0^T p(t)\,dt \\
&= \int_0^T \frac{U_{Gl}^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot U_{Gl}\cdot U_{HF}\cdot\sin\omega t + 2\cdot U_{HF}^2\cdot\sin^2\omega t}{R}\,dt \\
&= \frac{1}{R}\cdot\int_0^T U_{Gl}^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot U_{Gl}\cdot U_{HF}\cdot\sin\omega t + 2\cdot U_{HF}^2\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2\omega t)\,dt \\
&= \frac{1}{R}\cdot\int_0^T U_{Gl}^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot U_{Gl}\cdot U_{HF}\cdot\sin\omega t + U_{HF}^2 - U_{HF}^2\cdot\cos 2\omega t)\,dt \\
&= \frac{1}{R}\cdot\left[U_{Gl}^2\cdot t - \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\omega}\cdot U_{Gl}\cdot U_{HF}\cdot\cos\omega t + U_{HF}^2\cdot t - \frac{U_{HF}^2}{2\omega}\cdot\sin 2\omega t\right]_0^T \\
&= \frac{1}{R}\cdot\left[\left(U_{Gl}^2\cdot T - \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\omega}\cdot U_{Gl}\cdot U_{HF} + U_{HF}^2\cdot T - 0\right) - \left(0 - \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\omega}\cdot U_{Gl}\cdot U_{HF} + 0 - 0\right)\right] \\
W_T &= \frac{T}{R}\cdot\left(U_{Gl}^2 + U_{HF}^2\right)
\end{aligned}$$

Hiermit bestimme ich jetzt die mittlere Gesamt-Leistung:

$$\begin{aligned}
P_{ges} &= \frac{W_T}{T} \\
&= \frac{\frac{T}{R}\cdot\left(U_{Gl}^2 + U_{HF}^2\right)}{T} \\
&= \frac{1}{R}\cdot\left(U_{Gl}^2 + U_{HF}^2\right) \\
&= \frac{U_{Gl}^2}{R} + \frac{U_{HF}^2}{R} \\
P_{ges} &= P_{Gl} + P_{HF}
\end{aligned}$$

Fazit: Die Effektivwerte der Gleichstrom- und der Wechselstromleistung können einfach addiert werden, um die Gesamtleistung zu bestimmen.