Lehrsatz des Pythagoras

W. Kippels

5. November 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

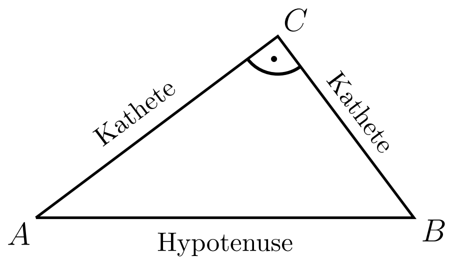
> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einleitung

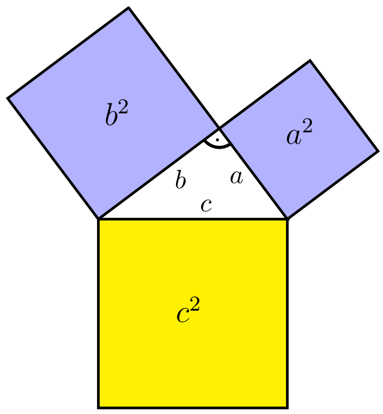
Dieses Dokument soll kein Lehrbuch ersetzen, ich möchte nur die wesentlichen Dinge kurz zusammenfassen, um anschließend mit einigen Beispielen das Ganze anwendungsbezogen verständlich zu machen.



Der Satz des Pythagoras beschäftigt sich mit den drei Seitenlängen eines **Rechtwinkligen** Dreieckes. Die beiden Seiten, die die Schenkel des Rechten Winkels bilden, heißen **Katheten**, die Seite, die dem Rechten Winkel **gegenüber** liegt, nennt man **Hypotenuse**.[1] Die Hypotenuse ist auch die längste Dreieckseite.

3 Der Lehrsatz

Nebenstehend ist der Lehrsatz des Pythagoras mit den drei quadratischen Flächen a^2, b^2 und c^2 abgebildet. Manche Leute merken sich am besten diese bildhafte Form.



Viele merken sich den Satz des Pythagoras gern in der Form einer Formel. Wenn man das tun möchte, dann muss man zunächst die Dreieckseiten mit einem Formelzeichen bezeichnen. Ich lege folgende Bezeichnungen fest:
a : erste Kathete
b : zweite Kathete
c : Hypotenuse
Mit diesen Bezeichnungen kann der Satz des Pythagoras als Formel aufgeschrieben werden. Wichtig ist dabei immer, dass man darauf achtet, dass beim Anwenden dieses Satzes **immer *c* die Hypotenuse** ist. **Nur dann gilt der Lehrsatz des Pythagoras mit dieser Formel:**

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Der Lehrsatz des Pythagoras kann auch in Textform angegeben werden:

> ***Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.***

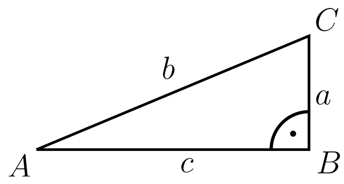
[1] Eine Merkregel zur Rechtschreibung: Sowohl **Kathete** als auch **Hypotenuse** schreibt man mit genau einem **h**.

4 Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

In nebenstehendem Rechtwinkligen Dreieck sind folgende Seiten bekannt:

$a = 2{,}5\,\mathrm{cm}$
$c = 6\,\mathrm{cm}$

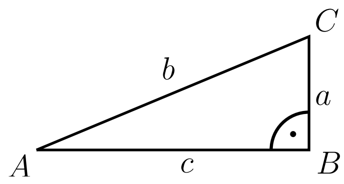


Berechnen Sie die Länge der Seite b!

4.2 Aufgabe 2

In nebenstehendem Rechtwinkligen Dreieck sind folgende Seiten bekannt:

$a = 4\,\mathrm{cm}$
$b = 10{,}4\,\mathrm{cm}$

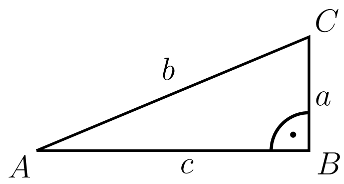


Berechnen Sie die Länge der Seite c!

4.3 Aufgabe 3

In nebenstehendem Rechtwinkligen Dreieck sind folgende Seiten bekannt:

$b = 26\,\mathrm{cm}$
$c = 24\,\mathrm{cm}$



Berechnen Sie die Länge der Seite a!

4.4 Aufgabe 4

Die Ägypter benötigten beim Bau ihrer Pyramiden mit quadratischem Grundriss ein Hilfsmittel, um im Gelände einen Rechten Winkel zu markieren. Dazu verwendeten sie ein Seil, an dem sich in gleichen Abständen hinreichend viele Knoten befanden. Dann legten sie das Seil in Dreieckform auf den Boden, wobei eine Seite drei Knotenlängen, die zweite Seite vier Knotenlängen und die dritte 5 Knotenlängen lang war. Sie waren davon überzeugt, dass sie einen Rechten Winkel erhielten, wenn sie das Seil strammgezogen in Dreieckform auf den Boden legten. Prüfen Sie die Vermutung der Ägypter durch eine Rechnung nach!

4.5 Aufgabe 5

Eine Leiter mit einer Länge von $l = 3{,}25\,\mathrm{m}$ wird im Abstand von $a = 1{,}25\,\mathrm{m}$ an eine Hauswand angelehnt. In welcher Höhe h lehnt die Leiter an der Wand?

4.6 Aufgabe 6

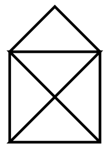
Ein rechteckiger Platz hat eine Länge von $l = 80\,\mathrm{m}$ und eine Breite von $b = 39\,\mathrm{m}$. Wie lang ist der Weg w, wenn man diagonal über den Platz läuft?

4.7 Aufgabe 7

Das Tragseil einer Seilbahn mit einer Länge von $l = 110{,}4\,\mathrm{m}$ ist waagerecht über einen Fluß gespannt. Hängt in der Mitte des Seiles die Gondel, dann dehnt sich das Seil um 10 Zentimeter. Um welche Strecke h bewegt sich dadurch die Seilmitte nach unten?

4.8 Aufgabe 8

Das „Haus vom Nikolaus“ soll mit einem einzigen Strich gezeichnet werden. Wie lang ist dieser Strich insgesamt?



Das Quadrat in der Figur hat eine Kantenlänge von 4 Zentimeter, das Dach hat eine Höhe von 2 Zentimeter.

5 Ergebnisse der Übungsaufgaben

5.1 Aufgabe 1

$b = 6{,}5\,\mathrm{cm}$

5.2 Aufgabe 2

$c = 9{,}6\,\mathrm{cm}$

5.3 Aufgabe 3

$a = 10\,\mathrm{cm}$

5.4 Aufgabe 4

$3^2 + 4^2 = 5^2$

5.5 Aufgabe 5

$h = 3\,\mathrm{cm}$

5.6 Aufgabe 6

$w = 89\,\mathrm{m}$

5.7 Aufgabe 7

$h = 2{,}35\,\mathrm{m}$

5.8 Aufgabe 8

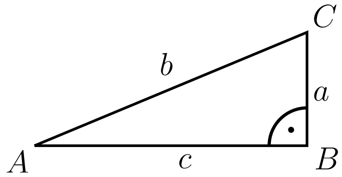
$l \approx 32{,}971\,\mathrm{cm}$

6 Lösungen der Übungsaufgaben

6.1 Aufgabe 1

In nebenstehendem Rechtwinkligen Dreieck sind folgende Seiten bekannt:

$a = 2{,}5\,\mathrm{cm}$
$c = 6\,\mathrm{cm}$



Berechnen Sie die Länge der Seite b!

Lösung: Die gesuchte Seite b ist die Hypotenuse. Damit lautet der Satz des Pythagoras wie folgt:

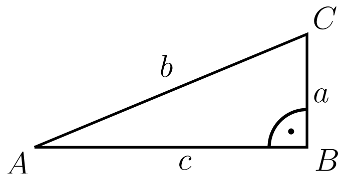
$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 && |\sqrt{} \\ b &= \sqrt{a^2 + c^2} \\ &= \sqrt{(2{,}5\,\mathrm{cm})^2 + (6\,\mathrm{cm})^2} \\ &= \sqrt{42{,}25\,\mathrm{cm}^2} \\ b &= 6{,}5\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Seite b ist 6,5 Zentimeter lang.

6.2 Aufgabe 2

In nebenstehendem Rechtwinkligen Dreieck sind folgende Seiten bekannt:

$a = 4\,\mathrm{cm}$
$b = 10{,}4\,\mathrm{cm}$



Berechnen Sie die Länge der Seite c!

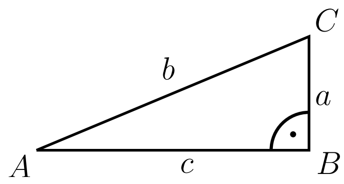
Lösung: Die gegebene Seite b ist die Hypotenuse. Die Formel für den Satz des Pythagoras muss daher noch nach c umgestellt werden.

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= b^2 && |-a^2 \\ c^2 &= b^2 - a^2 && |\sqrt{} \\ c &= \sqrt{b^2 - a^2} \\ &= \sqrt{(10{,}4\,\mathrm{cm})^2 - (4\,\mathrm{cm})^2} \\ &= \sqrt{92{,}16\,\mathrm{cm}^2} \\ c &= 9{,}6\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Seite c ist 9,6 Zentimeter lang.

6.3 Aufgabe 3

In nebenstehendem Rechtwinkligen Dreieck sind folgende Seiten bekannt:



$b = 26\,\mathrm{cm}$
$c = 24\,\mathrm{cm}$

Berechnen Sie die Länge der Seite a!

Lösung: Die gegebene Seite b ist die Hypotenuse. Die Formel für den Satz des Pythagoras muss daher noch nach a umgestellt werden.

$$\begin{aligned}
a^2 + c^2 &= b^2 && \mid -c^2 \\
a^2 &= b^2 - c^2 && \mid \sqrt{} \\
a &= \sqrt{b^2 - c^2} \\
&= \sqrt{(26\,\mathrm{cm})^2 - (24\,\mathrm{cm})^2} \\
&= \sqrt{100\,\mathrm{cm}^2} \\
a &= 10\,\mathrm{cm}
\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Seite a ist 10 Zentimeter lang.

6.4 Aufgabe 4

Die Ägypter benötigten beim Bau ihrer Pyramiden mit quadratischem Grundriss ein Hilfsmittel, um im Gelände einen Rechten Winkel zu markieren. Dazu verwendeten sie ein Seil, an dem sich in gleichen Abständen hinreichend viele Knoten befanden. Dann legten sie das Seil in Dreieckform auf den Boden, wobei eine Seite drei Knotenlängen, die zweite Seite vier Knotenlängen und die dritte 5 Knotenlängen lang war. Sie waren davon überzeugt, dass sie einen Rechten Winkel erhielten, wenn sie das Seil strammgezogen in Dreieckform auf den Boden legten. Prüfen Sie die Vermutung der Ägypter durch eine Rechnung nach!

Lösung: Nennen wir die Dreieckseiten a, b und c. Gerechtet wird in der Einheit „Knotenlänge".

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 4 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

Die Seite c ist die längste und damit die Hypotenuse, falls das Dreieck tatsächlich **rechtwinklig** ist. Dann müsste der Satz des Pythagoras gelten:

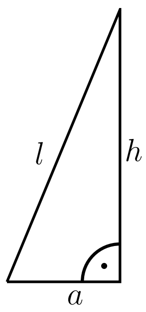
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\stackrel{?}{=} c^2 \\ 3^2 + 4^2 &\stackrel{?}{=} 5^2 \\ 9 + 16 &\stackrel{?}{=} 25 \\ 25 &= 25 \end{aligned}$$

<u>Ergebnis:</u> Das Seildreieck hat einen Rechten Winkel zwischen den beiden kürzeren Seilstücken.

6.5 Aufgabe 5

Eine Leiter mit einer Länge von $l = 3{,}25\,\mathrm{m}$ wird im Abstand von $a = 1{,}25\,\mathrm{m}$ an eine Hauswand angelehnt. In welcher Höhe h lehnt die Leiter an der Wand?

Lösung: Nebenstehnd ist eine Planskizze dargestellt, die die Leiter an der Wand zeigt.



Im Rechtwinkligen Dreieck sind a und h die Katheten und l die Hypothenuse. Der Satz des Pythagoras kann angewendet werden.

$$a^2 + h^2 = l^2$$

Diese Formel muss nach h umgestellt werden. Anschließend werden die bekannten Werte für l und h eingesetzt.

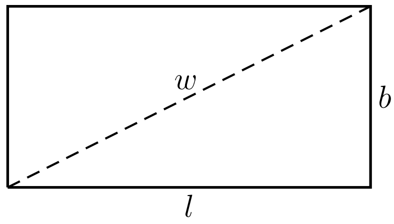
$$\begin{aligned}
a^2 + h^2 &= l^2 && \mid -a^2 \\
h^2 &= l^2 - a^2 && \mid \sqrt{} \\
h &= \sqrt{l^2 - a^2} \\
&= \sqrt{(3{,}25\,\mathrm{m})^2 - (1{,}25\,\mathrm{m})^2} \\
&= \sqrt{10{,}5625\,\mathrm{m}^2 - 1{,}5625\,\mathrm{m}^2} \\
&= \sqrt{9\,\mathrm{m}^2} \\
h &= 3\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Leiter lehnt in einer Höhe von 3 Metern an der Wand.

6.6 Aufgabe 6

Ein rechteckiger Platz hat eine Länge von $l = 80\,\mathrm{m}$ und eine Breite von $b = 39\,\mathrm{m}$. Wie lang ist der Weg w, wenn man diagonal über den Platz läuft?

Lösung: Nebenstehend ist der Platz dargestellt. Der diagonale Weg w ist gestrichelt eingezeichnet.



Die Diagonale teilt das Rechteck in zwei Rechtwinklige Dreiecke. In jedem dieser Teildreiecke kann man den Satz des Pythagoras anwenden. Dabei sind jeweils l und b die Katheten und w ist die Hypotenuse. Damit kann der Satz des Pythagoras zur Bestimmung des Weges w angewendet werden.

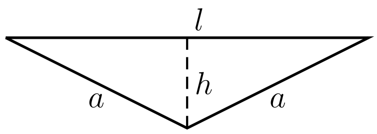
$$\begin{aligned}
w^2 &= l^2 + b^2 \qquad |\sqrt{\ } \\
w &= \sqrt{l^2 + b^2} \\
&= \sqrt{(80\,\mathrm{m})^2 + (39\,\mathrm{m})^2} \\
&= \sqrt{6\,400\,\mathrm{m}^2 + 1\,521\,\mathrm{m}^2} \\
&= \sqrt{7\,921\,\mathrm{m}^2} \\
w &= 89\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Ergebnis: Der diagonale Weg hat eine Länge von 89 Metern.

6.7 Aufgabe 7

Das Tragseil einer Seilbahn mit einer Länge von $l = 110{,}4\,\mathrm{m}$ ist waagerecht über einen Fluß gespannt. Hängt in der Mitte des Seiles die Gondel, dann dehnt sich das Seil um 10 Zentimeter. Um welche Strecke h bewegt sich dadurch die Seilmitte nach unten?

Lösung: Nebenstehend ist das Seil in gespannter und in entlasteter Position dargestellt. In der Skizze ist eine Hälfte des verlängerten Seiles jeweils mit a bezeichnet, die Normallänge des gesamten Seiles mit l. Wir haben zwei gleiche Rechtwinklige Dreiecke. Die Katheten sind h und $\frac{l}{2}$, die Hypotenuse a.



Bevor der Satz des Pythagoras angewendet wird, soll erst die Länge a berechnet werden.

$$\begin{aligned}
2a &= l + 10\,\mathrm{cm} \\
&= 110{,}4\,\mathrm{m} + 0{,}1\,\mathrm{m} \\
2a &= 110{,}5\,\mathrm{m} && |:2 \\
a &= 55{,}25\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

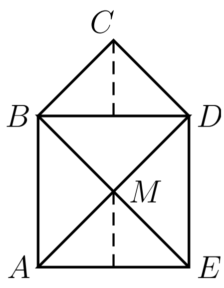
In jedem der beiden Rechtwinkligen Teildreiecke gilt der Satz des Pythagoras. Hierbei sind h und $\frac{l}{2}$ die Katheten und a die Hypotenuse.

$$\begin{aligned}
h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 &= a^2 && \left| - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \right. \\
h^2 &= a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 && |\sqrt{\;} \\
h &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{(55{,}25\,\mathrm{m})^2 - \left(\frac{110{,}4\,\mathrm{m}}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{3\,052{,}5625\,\mathrm{m}^2 - 3\,047{,}04\,\mathrm{m}^2} \\
&= \sqrt{5{,}5225\,\mathrm{m}^2} \\
h &= 2{,}35\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Seilmitte bewegt sich um 2,35 Meter nach unten, wenn die Gondel dort hängt.

6.8 Aufgabe 8

Das „Haus vom Nikolaus“ soll mit einem einzigen Strich gezeichnet werden. Wie lang ist dieser Strich insgesamt?



Das Quadrat in der Figur hat eine Kantenlänge von 4 Zentimeter, das Dach hat eine Höhe von 2 Zentimeter.

Lösung: Zur Lösung bezeichne ich zunächst die Eckpunkte mit den Buchstaben von A bis E. So kann besser angegeben werden, welche Strecke jeweils gemeint ist.

Es gibt drei verschieden lange Strecken:

- die Kanten des Quadrates $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ und $\overline{AE}$
- die beiden Diagonalen $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$
- die beiden Dachschrägen $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$

Die Kanten des Quadrates sind gegeben:

$$\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{DE} = \overline{AE} = 4\,\text{cm}$$

Die beiden Diagonalen sind gleich lang. Ich berechne die Diagonale $\overline{AD}$ im Dreieck ΔADE. Hier sind die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{DE}$ die Katheten und $\overline{AD}$ die Hypotenuse.

$$\begin{aligned}
(\overline{AD})^2 &= (\overline{AE})^2 + (\overline{DE})^2 \\
&= (4\,\text{cm})^2 + (4\,\text{cm})^2 \\
&= 16\,\text{cm}^2 + 16\,\text{cm}^2 \\
(\overline{AD})^2 &= 32\,\text{cm}^2 \qquad |\sqrt{\ } \\
\overline{AD} &= \sqrt{32}\,\text{cm} \\
\overline{AD} &\approx 5{,}657\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Die beiden Dachschrägen $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ sind jeweils genau so lang, wie eine halbe Diagonale. Warum? Die (hier gestrichelt eingezeichneten) Höhen der Dreiecke ΔAME und ΔBCD sind gleich, weil die gegebene Dachhöhe die Hälfte einer Quadratseite sein soll. Zusammen sind die beiden Dachschrägen also genau so lang wie eine Diagonele. Damit kann die Strichlänge berechnet werden:

$$\begin{aligned}
l &= (\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EA}) + (\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{CB} + \overline{BE}) \\
&\approx 4 \cdot 4\,\text{cm} + 3 \cdot 5{,}657\,\text{cm} \\
l &\approx 32{,}971\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Ergebnis: Der Strich ist ungefähr 32,971 Zentimeter lang.