Potenzen und Wurzeln

W. Kippels

20. Mai 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Potenzen

Die Definition für eine Potenz lautet:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Hierfür gilt: $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Im Klartext bedeutet das: a ist eine beliebige Reelle Zahl[1] und n ist eine Natürliche Zahl[2], aber n ist mindestens 2.

Die Beschränkung für n auf Natürliche Zahlen ab 2 ergibt sich durch n als **Anzahl** von Faktoren. Ein Produkt hat eben mindestens 2 Faktoren, sonst ist es kein Produkt. Es ist aber möglich, den Definitionsbereich so zu erweitern, dass man für n jede beliebige Ganze Zahl verwenden kann. Man kann zeigen, dass diese Erweiterungen des Definitionsbereiches von n zu den selben Rechenregeln passen, die etwas später hier aufgeführt sind.

Die Erweiterung des Definitionsbereiches für n wird durch nachfolgende Definitionen in drei Schritten auf $\mathbb{Z}$[3] erweitert:

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Nachdem wir nun die Potenz komplett definiert haben, können wir uns um die Rechengesetze kümmern. Auf die zugehörigen Beweise möchte ich an dieser Stelle verzichten.

Für das Rechnen mit Potenzen gibt es 5 Potenzrechengesetze. Sie lauten:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \tag{1}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \tag{2}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{3}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \tag{4}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n \tag{5}$$

***Warnung:* Leider sind in Schülerkreisen noch zwei Gesetze in Gebrauch, die aber ungültig sind. Ich stelle sie hier vor, um ausdrücklich davor zu warnen!**

$\boxed{a^n + b^n \neq (a+b)^n}$ $\boxed{a^n + a^m \neq a^{n+m}}$

Beachten Sie bitte, dass diese Gesetze falsch sind!

[1] Reelle Zahlen sind alle Zahlen, die auf einem Zahlenstrahl darstellbar sind.

[2] Natürliche Zahlen sind Zahlen, mit denen man zählt, also 1, 2, 3 , usw.

[3] $\mathbb{Z}$ ist die Menge aller Ganzen Zahlen, positive wie auch negative. Auch die Null gehört dazu.

3 Wurzeln

Die Wurzel ist eine Umkehrung der Potenz. Es gilt folgender Zusammenhang, der gleichzeitig die Wurzel definiert.

$$b = a^n \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt[n]{b}$$

Ein Problem ergibt sich für die Definitionsmenge von a. Während für Potenzen für a noch gilt: $a \in \mathbb{R}$, muss für **geradzahlige** n die Einschränkung gemacht werden: $a \in \mathbb{R}^+$. Warum? **Jede** Zahl, die mit 2, 4, 6, ... potenziert wird, ist **positiv**. Daher können wir aus einer **negativen** Zahl keine 2., 4., 6., ... Wurzel ziehen.

Aus der Definition leiten sich 5 Wurzelrechengesetze ab, die zu den 5 Potenzrechengesetzen in Bezug stehen.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \tag{6}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{7}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}} \tag{8}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a^{m-n}} \tag{9}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \tag{10}$$

Die Gesetze (8) und (9) wirken kaum verständlich und sind auch nicht einfach zu merken. Nun kann man glücklicherweise zeigen, dass die Wurzelrechnung auf die Potenzrechnung zurückgeführt werden kann, indem man folgende Definition macht.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Mit dieser Definition muss allerdings der Definitionsbereich von a eingeschränkt werden auf: $a \in \mathbb{R}^+$. Anderenfalls käme es zu Unstimmigkeiten. Beispielsweise wäre dann möglicherweise $a^{\frac{1}{3}} \neq a^{\frac{2}{6}}$. Da das nicht sein darf, schränkt man den Definitionsbereich für a auf $\mathbb{R}^+$ ein. Immerhin ist es so aber möglich, dass man die „ungeliebten“ Wurzelgesetze umgeht.

Warnung: **Auch hier sind in Schülerkreisen zwei Gesetze in Gebrauch, die ungültig sind. Ich stelle sie hier ebenfalls vor, um ausdrücklich davor zu warnen!**

$$\boxed{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}} \qquad \boxed{\sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{a} \neq \sqrt[n+m]{a}}$$

Beachten Sie bitte, dass diese Gesetze falsch sind!

Darüber hinaus werden die Gesetze (8) und (9) sehr oft missachtet.

4 Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a)

$$a^2 \cdot a^3 + a^4 \cdot 2a = \dots$$

b)

$$(6a)^2 = \dots$$

c)

$$m \cdot m^2 + m^2 \cdot m^2 = \dots$$

d)

$$4a^2 + 3a^2 = \dots$$

e)

$$2a^3 : a^2 = \dots$$

f)

$$\frac{5a^4b^3c^5}{3ab^5c^3} = \dots$$

4.2 Aufgabe 2

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a)

$$\frac{(2a)^n}{a^n} = \dots$$

b)

$$\frac{(5x)^p}{5^p} = \dots$$

c)

$$\frac{(x-y)^{n+2}}{(x-y)^3} = \dots$$

4.3 Aufgabe 3

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a)

$$\sqrt[6]{x^7 \cdot y^2} \cdot \sqrt[6]{x^5 \cdot y^4} = \ldots$$

b)

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^{10}}} = \ldots$$

c)

$$\sqrt[3]{a} + 2 \cdot \sqrt[3]{a} = \ldots$$

d)

$$\sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{y^3 \cdot y^5} = \ldots$$

e)

$$\sqrt[4]{\sqrt[6]{a^7} \cdot \sqrt[2]{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}} = \ldots$$

f)

$$\frac{4V}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)^2} = \ldots$$

5 Lösungen der Übungsaufgaben

5.1 Aufgabe 1

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a)

$$\underbrace{a^2 \cdot a^3}_{\text{Ges. } 3} + \underbrace{a^4 \cdot 2a}_{\text{Ges. } 3} = a^{2+3} + 2a^{4+1} = \underbrace{a^5 + 2a^5}_{a^5 \text{ auskl.}} = a^5 \cdot (1+2) = 3a^5$$

b)

$$\underbrace{(6a)^2}_{\text{Ges. } 1} = 6^2 \cdot a^2 = 36a^2$$

c)

$$\underbrace{m \cdot m^2}_{\text{Ges. } 3} + \underbrace{m^2 \cdot m^2}_{\text{Ges. } 3} = m^{1+2} + m^{2+2} = m^3 + m^4$$

Achtung! Diese Terme lassen sich **nicht** weiter zusammenfassen, auch wenn man das vielleicht gern möchte. Dafür gibt es kein passendes Potenzrechengesetz.

d)

$$\underbrace{4a^2 + 3a^2}_{a^2 \text{ auskl.}} = (4+3)a^2 = 7a^2$$

e)

$$\underbrace{2a^3 : a^2}_{\text{Ges. } 4} = \frac{2a^3}{a^2} = 2a^{3-2} = 2a^1 = 2a$$

f)

$$\frac{5a^4b^3c^5}{3ab^5c^3} = \frac{5}{3} \cdot a^{4-1} \cdot b^{3-5} \cdot c^{5-3} = \frac{5}{3} \cdot a^3 \cdot b^{-2} \cdot c^2 = \frac{5a^3c^2}{3b^2}$$

Hierbei ist es gleichgültig, ob man die letzte oder die vorletzte Form als Endergebnis wählt.

5.2 Aufgabe 2

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a)

$$\frac{\overbrace{(2a)^n}^{\text{Ges. 2}}}{a^n} = \left(\frac{2a}{a}\right)^n = 2^n$$

b)

$$\frac{\overbrace{(5x)^p}^{\text{Ges. 2}}}{5^p} = \left(\frac{5x}{5}\right)^p = x^p$$

c)

$$\frac{\overbrace{(x-y)^{n+2}}^{\text{Ges. 4}}}{(x-y)^3} = (x-y)^{n+2-3} = (x-y)^{n-1}$$

5.3 Aufgabe 3

Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a)

$$\underbrace{\sqrt[6]{x^7 \cdot y^2} \cdot \sqrt[6]{x^5 \cdot y^4}}_{\text{Ges. } 6} = \underbrace{\sqrt[6]{x^7 \cdot y^2 \cdot x^5 \cdot y^4}}_{\text{Ges. } 3} = \underbrace{\sqrt[6]{x^{12} \cdot y^6}}_{\text{Ges. } 6} = \underbrace{\sqrt[6]{x^{12}} \cdot \sqrt[6]{y^6}}_{\text{jeweils kürzen}} = x^2 \cdot y$$

b)

$$\underbrace{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^{10}}}}_{\text{Ges. } 10} = \sqrt[4\cdot 5]{x^{10}} = \underbrace{\sqrt[20]{x^{10}}}_{\text{als Potenz schreiben}} = x^{\frac{10}{20}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

c)

$$\sqrt[3]{a} + 2 \cdot \sqrt[3]{a} = 1 \cdot \sqrt[3]{a} + 2 \cdot \sqrt[3]{a} = (1+2) \cdot \sqrt[3]{a} = 3 \cdot \sqrt[3]{a}$$

d)

$$\sqrt[6]{x^5} \cdot \underbrace{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}}_{\text{Ges. } 10} + \underbrace{\sqrt{y^3 \cdot y^5}}_{\text{Ges. } 3} = \sqrt[6]{x^5} \cdot \underbrace{\sqrt[12]{x^2}}_{\text{kürzen}} + \sqrt{y^{3+5}} = \underbrace{\sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[6]{x}}_{\text{Ges. } 6} + \sqrt{y^8} = \ldots$$

$$\ldots = \underbrace{\sqrt[6]{x^5 \cdot x}}_{\text{Ges. } 3} + y^4 = \sqrt[6]{x^6} + y^4 = x + y^4$$

e)

$$\sqrt[4]{\sqrt[6]{a^7} \cdot \sqrt[2]{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}} = \sqrt[4]{a^{\frac{7}{6}} \cdot \sqrt[2]{a \cdot a^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt[4]{a^{\frac{7}{6}} \cdot \left(a \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(a^{\frac{7}{6}} \cdot \left(a^{\frac{3}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = \ldots$$

$$\ldots = \left(a^{\frac{7}{6}} \cdot \left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{7}{6}} \cdot a^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{7}{6}+\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{12}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{12}{6}\cdot\frac{1}{4}} = a^{\frac{12}{24}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

f)

$$\frac{4V}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)^2} = \frac{4V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{4^2V^2}{\pi^2}}} = \frac{4V}{\sqrt[3]{\frac{\pi^3 \cdot 4^2V^2}{\pi^2}}} = \frac{4V}{\sqrt[3]{\pi \cdot 4^2V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4^3V^3}{\pi \cdot 4^2V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$