Potenzen

Die Definition für eine Potenz lautet:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Hierfür gilt: $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
Der Definitionsbereich für n wird durch nachfolgende Definitionen auf $\mathbb{Z}$ erweitert:

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Für das Rechnen mit Potenzen gibt es 5 Potenzrechengesetze. Sie lauten:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \tag{1}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \tag{2}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{3}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \tag{4}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n \tag{5}$$

***Warnung:* Leider sind in Schülerkreisen noch zwei Gesetze in Gebrauch, die aber ungültig sind. Ich stelle sie hier vor, um ausdrücklich davor zu warnen!**

$\boxed{a^n + b^n \neq (a+b)^n}$ $\boxed{a^n + a^m \neq a^{n+m}}$

Beachten Sie bitte, dass diese Gesetze falsch sind!

Wurzeln

Die Wurzel ist eine Umkehrung der Potenz. Es gilt folgender Zusammenhang, der gleichzeitig die Wurzel definiert.

$$b = a^n \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt[n]{b}$$

Ein Problem ergibt sich für die Definitionsmenge von a. Während für Potenzen für a noch gilt: $a \in \mathbb{R}$, muss für **geradzahlige** n die Einschränkung gemacht werden: $a \in \mathbb{R}^+$. Warum? **Jede** Zahl, die mit 2, 4, 6, ... potenziert wird, ist **positiv**. Daher können wir aus einer **negativen** Zahl keine 2., 4., 6., ... Wurzel ziehen.

Aus der Definition leiten sich 5 Wurzelrechengesetze ab, die zu den 5 Potenzrechengesetzen in Bezug stehen.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \tag{6}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{7}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}} \tag{8}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a^{m-n}} \tag{9}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \tag{10}$$

Die Gesetze (8) und (9) wirken kaum verständlich und sind auch nicht einfach zu merken. Nun kann man glücklicherweise zeigen, dass die Wurzelrechnung auf die Potenzrechnung zurückgeführt werden kann, indem man folgende Definition macht.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Mit dieser Definition muss allerdings der Definitionsbereich von a eingeschränkt werden auf: $a \in \mathbb{R}^+$. Anderenfalls käme es zu Unstimmigkeiten. Beispielsweise wäre dann möglicherweise $a^{\frac{1}{3}} \neq a^{\frac{2}{6}}$. Da das nicht sein darf, schränkt man den Definitionsbereich für a auf $\mathbb{R}^+$ ein. Immerhin ist es so aber möglich, dass man die „ungeliebten" Wurzelgesetze umgeht.

Warnung: **Auch hier sind in Schülerkreisen zwei Gesetze in Gebrauch, die ungültig sind. Ich stelle sie hier ebenfalls vor, um ausdrücklich davor zu warnen!**

$$\boxed{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}} \qquad \boxed{\sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{a} \neq \sqrt[n+m]{a}}$$

Beachten Sie bitte, dass diese Gesetze falsch sind!

Darüber hinaus werden die Gesetze (8) und (9) sehr oft missachtet.

Übungsaufgaben

1. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a)

$$a^2 \cdot a^3 + a^4 \cdot 2a = \dots$$

b)

$$(6a)^2 = \dots$$

c)

$$m \cdot m^2 + m^2 \cdot m^2 = \dots$$

d)

$$4a^2 + 3a^2 = \dots$$

e)

$$2a^3 : a^2 = \dots$$

f)

$$\frac{5a^4b^3c^5}{3ab^5c^3} = \dots$$

2. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a)

$$\frac{(2a)^n}{a^n} = \dots$$

b)

$$\frac{(5x)^p}{5^p} = \dots$$

c)

$$\frac{(x-y)^{n+2}}{(x-y)^3} = \dots$$

3. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a)

$$\sqrt[6]{x^7 \cdot y^2} \cdot \sqrt[6]{x^5 \cdot y^4} = \ldots$$

b)

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^{10}}} = \ldots$$

c)

$$\sqrt[3]{a} + 2 \cdot \sqrt[3]{a} = \ldots$$

d)

$$\sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{y^3 \cdot y^5} = \ldots$$

e)

$$\sqrt[4]{\sqrt[6]{a^7} \cdot \sqrt[2]{a \cdot \sqrt[3]{a^2}}} = \ldots$$

f)

$$\frac{4V}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)^2} = \ldots$$

Lösungen der Übungsaufgaben

1. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a)

$$\underbrace{a^2 \cdot a^3}_{\text{Ges. } 3} + \underbrace{a^4 \cdot 2a}_{\text{Ges. } 3} = a^{2+3} + 2a^{4+1} = \underbrace{a^5 + 2a^5}_{a^5 \text{ auskl.}} = a^5 \cdot (1+2) = 3a^5$$

b)

$$\underbrace{(6a)^2}_{\text{Ges. } 1} = 6^2 \cdot a^2 = 36a^2$$

c)

$$\underbrace{m \cdot m^2}_{\text{Ges. } 3} + \underbrace{m^2 \cdot m^2}_{\text{Ges. } 3} = m^{1+2} + m^{2+2} = m^3 + m^4$$

Achtung! Diese Terme lassen sich **nicht** weiter zusammenfassen, auch wenn man das vielleicht gern möchte. Dafür gibt es kein passendes Potenzrechengesetz.

d)

$$\underbrace{4a^2 + 3a^2}_{a^2 \text{ auskl.}} = (4+3)a^2 = 7a^2$$

e)

$$\underbrace{2a^3 : a^2}_{\text{Ges. } 4} = \frac{2a^3}{a^2} = 2a^{3-2} = 2a^1 = 2a$$

f)

$$\frac{5a^4b^3c^5}{3ab^5c^3} = \frac{5}{3} \cdot a^{4-1} \cdot b^{3-5} \cdot c^{5-3} = \frac{5}{3} \cdot a^3 \cdot b^{-2} \cdot c^2 = \frac{5a^3c^2}{3b^2}$$

Hierbei ist es gleichgültig, ob man die letzte oder die vorletzte Form als Endergebnis wählt.

2. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a)

$$\frac{\overbrace{(2a)^n}^{\text{Ges. } 2}}{a^n} = \left(\frac{2a}{a}\right)^n = 2^n$$

b)

$$\frac{\overbrace{(5x)^p}^{\text{Ges. } 2}}{5^p} = \left(\frac{5x}{5}\right)^p = x^p$$

c)

$$\frac{\overbrace{(x-y)^{n+2}}^{\text{Ges. } 4}}{(x-y)^3} = (x-y)^{n+2-3} = (x-y)^{n-1}$$

3. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a)

$$\underbrace{\sqrt[6]{x^7\cdot y^2}\cdot\sqrt[6]{x^5\cdot y^4}}_{\text{Ges. } 6} = \underbrace{\sqrt[6]{x^7\cdot y^2\cdot x^5\cdot y^4}}_{\text{Ges. } 3} = \underbrace{\sqrt[6]{x^{12}\cdot y^6}}_{\text{Ges. } 6} = \underbrace{\sqrt[6]{x^{12}}\cdot\sqrt[6]{y^6}}_{\text{jeweils kürzen}} = x^2\cdot y$$

b)

$$\underbrace{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^{10}}}}_{\text{Ges. } 10} = \sqrt[4\cdot 5]{x^{10}} = \underbrace{\sqrt[20]{x^{10}}}_{\text{als Potenz schreiben}} = x^{\frac{10}{20}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

c)

$$\sqrt[3]{a} + 2\cdot\sqrt[3]{a} = 3\cdot\sqrt[3]{a}$$

d)

$$\sqrt[6]{x^5}\cdot\underbrace{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}}_{\text{Ges. } 10} + \underbrace{\sqrt{y^3\cdot y^5}}_{\text{Ges. } 3} = \sqrt[6]{x^5}\cdot\underbrace{\sqrt[12]{x^2}}_{\text{kürzen}} + \sqrt{y^{3+5}} = \underbrace{\sqrt[6]{x^5}\cdot\sqrt[6]{x}}_{\text{Ges. } 6} + \sqrt{y^8} = \ldots$$

$$\ldots = \underbrace{\sqrt[6]{x^5\cdot x}}_{\text{Ges. } 3} + y^4 = \sqrt[6]{x^6} + y^4 = x + y^4$$

e)

$$\sqrt[4]{\sqrt[6]{a^7}\cdot\sqrt[2]{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}} = \sqrt[4]{a^{\frac{7}{6}}\cdot\sqrt[2]{a\cdot a^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt[4]{a^{\frac{7}{6}}\cdot\left(a\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(a^{\frac{7}{6}}\cdot\left(a^{\frac{3}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = \ldots$$

$$\ldots = \left(a^{\frac{7}{6}}\cdot\left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{7}{6}}\cdot a^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{7}{6}+\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{12}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{12}{6}\cdot\frac{1}{4}} = a^{\frac{12}{24}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

f)

$$\begin{aligned}
\frac{4V}{\pi\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)^2} &= \frac{4V}{\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{4^2V^2}{\pi^2}}}\\
&= \frac{4V}{\sqrt[3]{\frac{\pi^3\cdot 4^2V^2}{\pi^2}}}\\
&= \frac{4V}{\sqrt[3]{\pi\cdot 4^2V^2}}\\
&= \sqrt[3]{\frac{4^3V^3}{\pi\cdot 4^2V^2}}\\
&= \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}
\end{aligned}$$