Polynome

W. Kippels

13. September 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Definition

Ein Polynom ist eine Funktion, die sich in dieser Form darstellen lässt:

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0}$$

Hierbei heißt n der **Grad des Polynoms**.

Wegen $x^1 = x$ und $x^0 = 1$ kann man diese Definition auch etwas einfacher so schreiben:

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

2 Polynome 1. und 2. Grades

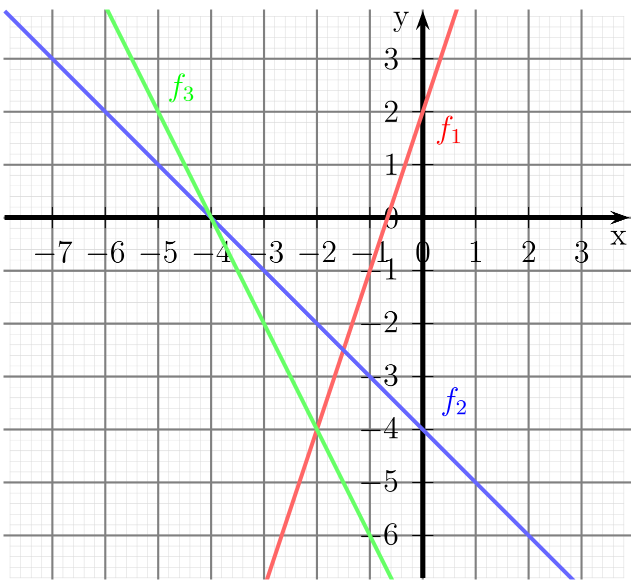
Wählen wir $n = 1$, erhalten wir als Polynom ersten Grades:

$$f(x) = a_1 x + a_0$$

Das kennen wir bereits als „Lineare Funktion“, auch wenn wir dort anstelle von a_1 m und anstelle von a_0 b geschrieben haben, also so:

$$f(x) = mx + b$$

Nebenstehend sind als Beispiel drei Lineare Funktionen mit den Funktionsgleichungen
$f_1(x) = 3x + 2$,
$f_2(x) = -x - 4$ und
$f_3(x) = -2x - 8$
dargestellt.

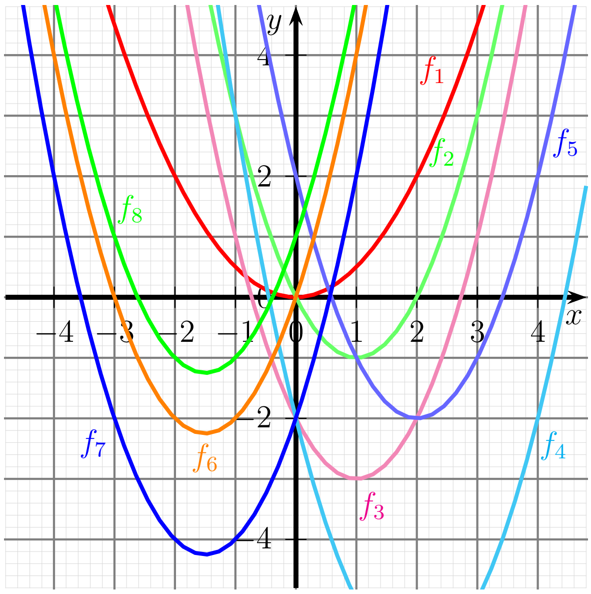


Ausführliche Einzelheiten zur Linearen Funktion finden Sie hier:
http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lin.pdf

Mit $n = 2$ erhalten wir als Polynom 2. Grades die „Quadratische Funktion“:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{oder bekannter in dieser Form:} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

Nebenstehend habe ich einige Quadratische Funktionen dargestellt. Die Funktionsgleichungen lauten:
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f_2(x) = x^2 - 2x$
$f_3(x) = x^2 - 2x - 2$
$f_4(x) = x^2 - 4x - 2$
$f_5(x) = x^2 - 4x + 2$
$f_6(x) = x^2 + 3x$
$f_7(x) = x^2 + 3x - 2$
$f_8(x) = x^2 + 3x + 1$



Auf Einzelheiten zur Quadratischen Funktion möchte ich an dieser Stelle nicht weiter eingehen. Bei Interesse finden Sie alles Weitergehende hier:
http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/quadfkt.pdf

3 Polynome 3. Grades

Nach der zuvor genannten Definition haben sie diese Form:

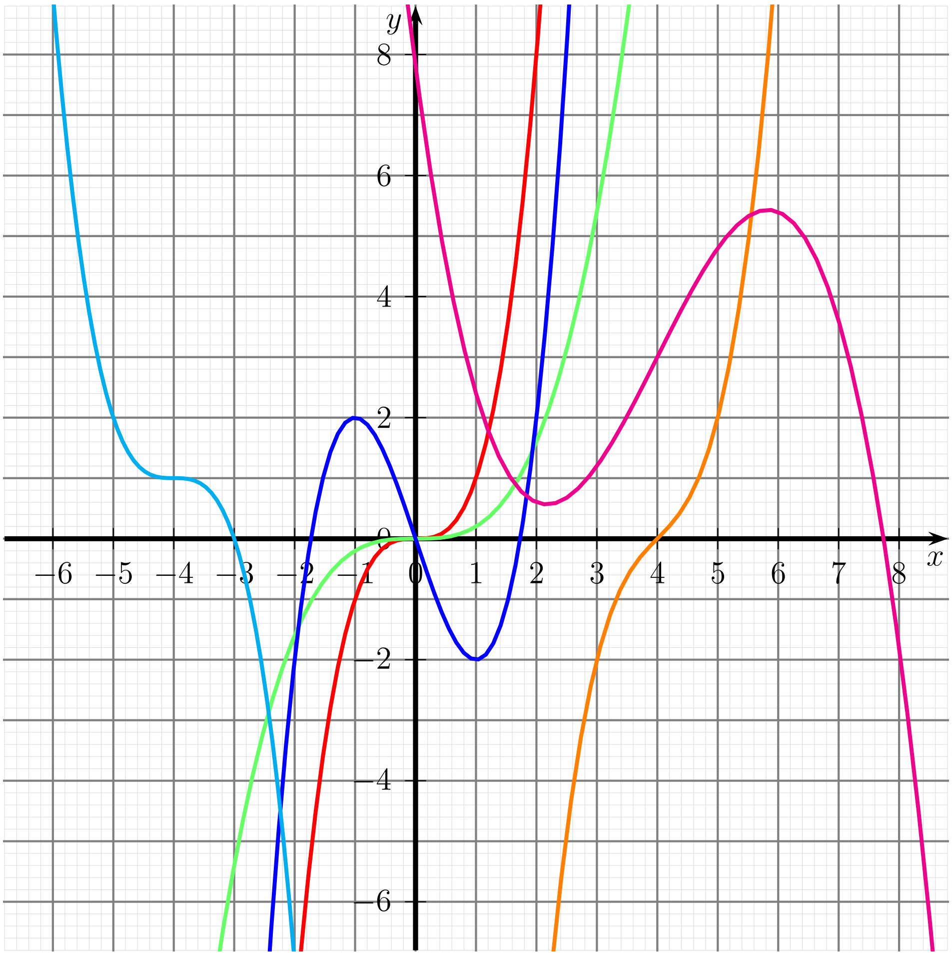
$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Damit man nicht so viel mit den lästigen Indizes zu tun hat, schreibt man das allgemeine Polynom dritten Grades in der Regel so:

$$\boxed{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

Wenn man die Parameter a, b, c und d kennt, dann kennt man auch das Polynom.

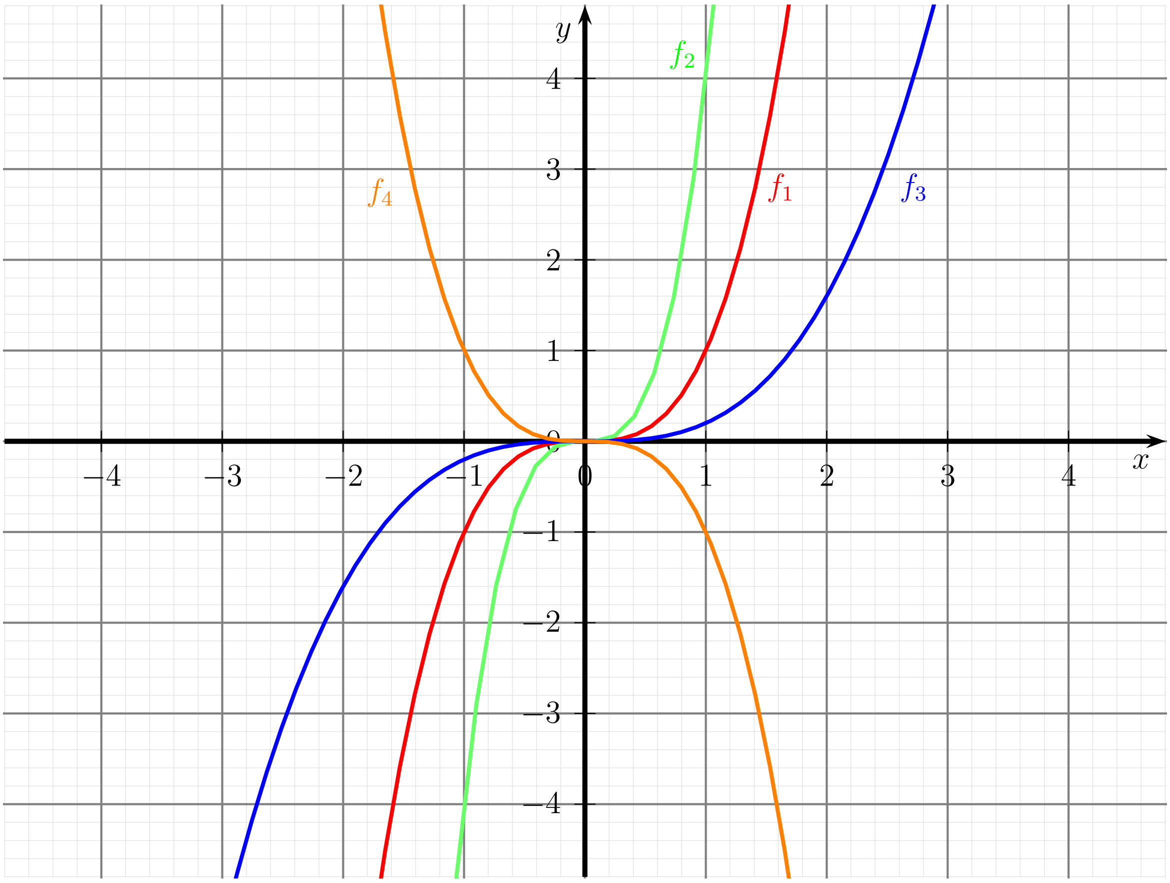
Nachfolgend möchte ich ungeordnet ein paar Polynome dritten Grades darstellen.



Während wir beim Polynom 2. Grades (der Quadratischen Funktion) ausschließlich Parabeln als Funktionsgraphen erhalten haben (mal breit, mal schmal, mal nach oben, mal nach unten geöffnet), bekommen wir hier unterschiedliche Formen. Es lohnt sich also zu untersuchen, welchen Einfluss die Parameter a, b, c und d haben.

Beginnen wir mit dem Parameter a. Dargestellt werden die Funktionen:

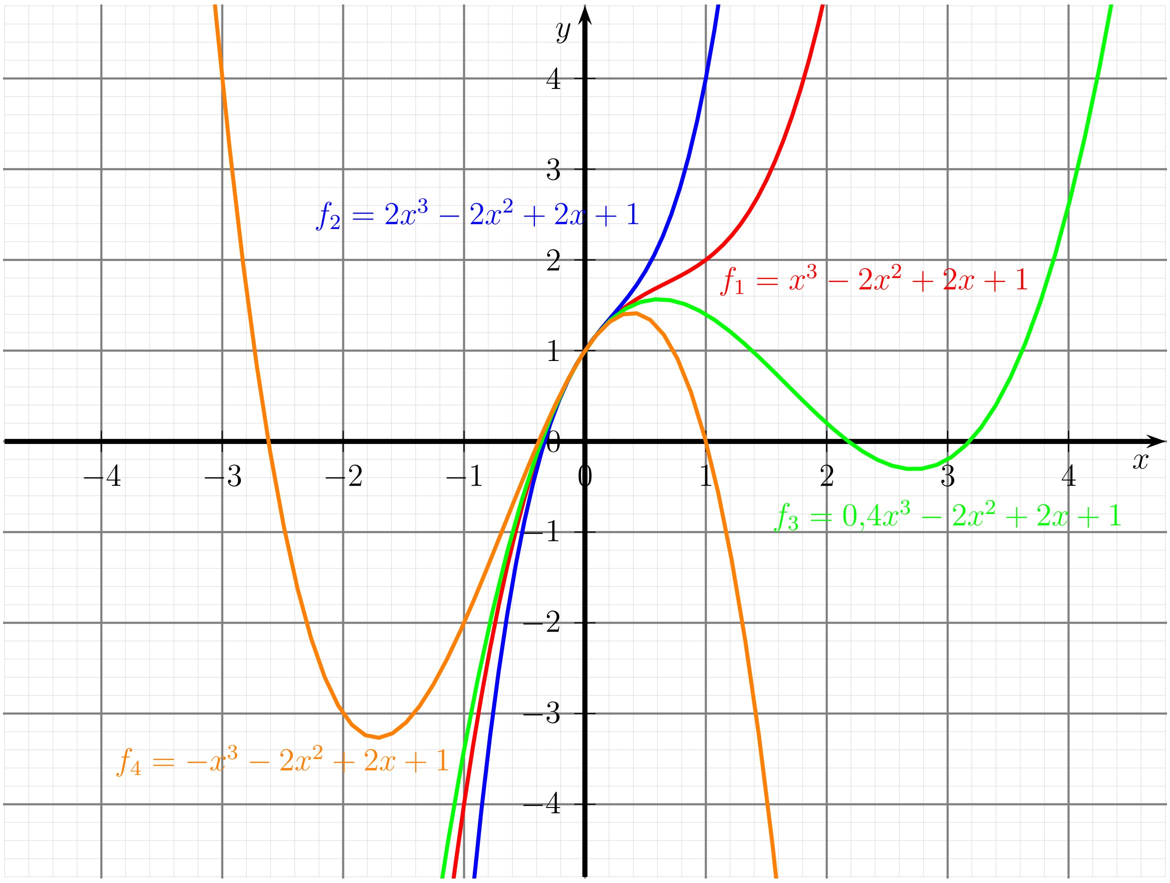
$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3 \\ f_2(x) &= 4x^3 \\ f_3(x) &= 0{,}2x^3 \\ f_4(x) &= -x^3 \end{aligned}$$



Wir erkennen, dass durch Verändern von a die Kurve nur gedehnt, gestaucht oder vertikal gespiegelt wird. Mit **großem** a verlaufen die Kurven **steiler**, mit **kleinem** a **flacher**. Ist a **positiv**, verlaufen die Kurven **von links unten nach rechts oben**, bei **negativem** a verlaufen sie **von links oben nach rechts unten**.

Alle Kurven verlaufen waagerecht durch den Koordinatenursprung im Punkt $P(0|0)$.

Wie sieht es aber aus, wenn für b, c und d Zahlenwerte $\neq 0$ ausgewählt werden? Dazu habe ich ebenfalls vier Funktionen verwendet, die sich nur durch Parameter a unterscheiden.



Die Kurvenformen sind jetzt durchaus sehr unterschiedlich. Mal schlängelt sie sich fast gerade von unten nach oben durch, wie bei f_1 oder erst recht bei f_2, und manchmal erhalten wir eine erhebliche „Beule“, bei der die Kurve zwischendurch auch mal die Richtung wechselt, wie bei f_3 und f_4.

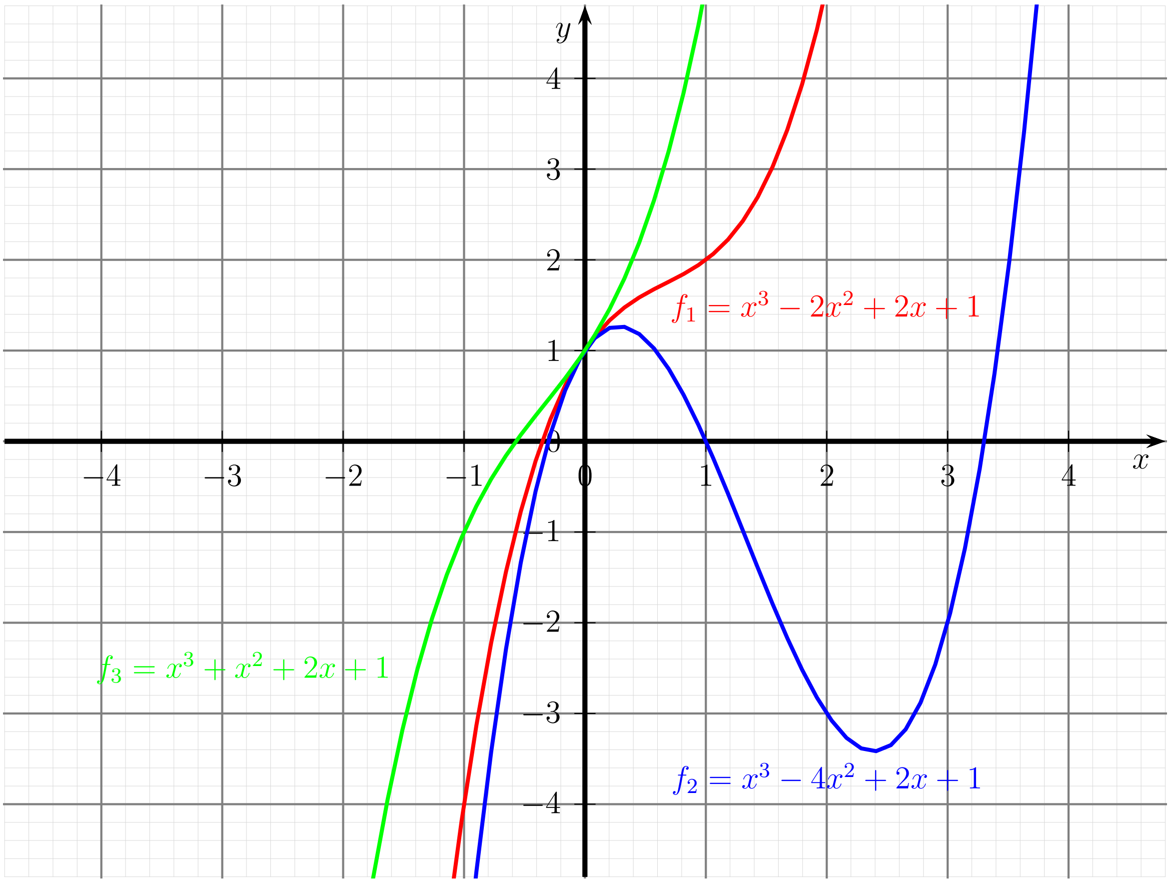
Es gibt allerdings auch Übereinstimmungen zwischen allen Kurven. Beispielsweise schneiden **alle** die y-Achse bei $y_0 = 1$. Außerdem „schmiegen“ sich in diesem Bereich alle Kurven aneinander an, verlaufen dort also gleich steil. Geblieben ist auch das zuvor bereits festgestellte Verhalten in Richtung $\pm\infty$.

Erinnern wir uns: Das war doch schon vorher bei den Funktionen mit $b = c = d = 0$ ähnlich. Die Kurven liefen alle durch den y-Achsenabschnitt $y_0 = 0$, hier durch $y_0 = 1$. Woher kommt das?

Die Antwort ist ganz einfach. Wenn $x = 0$ ist, bleibt von jeder Funktion nur der Parameter d als Funktionswert übrig. Bei $d = 0$ verlaufen die Kurven durch den Koordinatenursprung und bei $d = 1$ durch den y-Achsenabschnitt $y_0 = 1$. Zusammengefasst kann man also sagen: $\boxed{d = y_0}$

Bleibt noch die Frage klären, welcher Parameter wohl dafür verantwortlich ist, dass die Kurven beim Schneiden der y-Achse alle parallel[1] verlaufen.

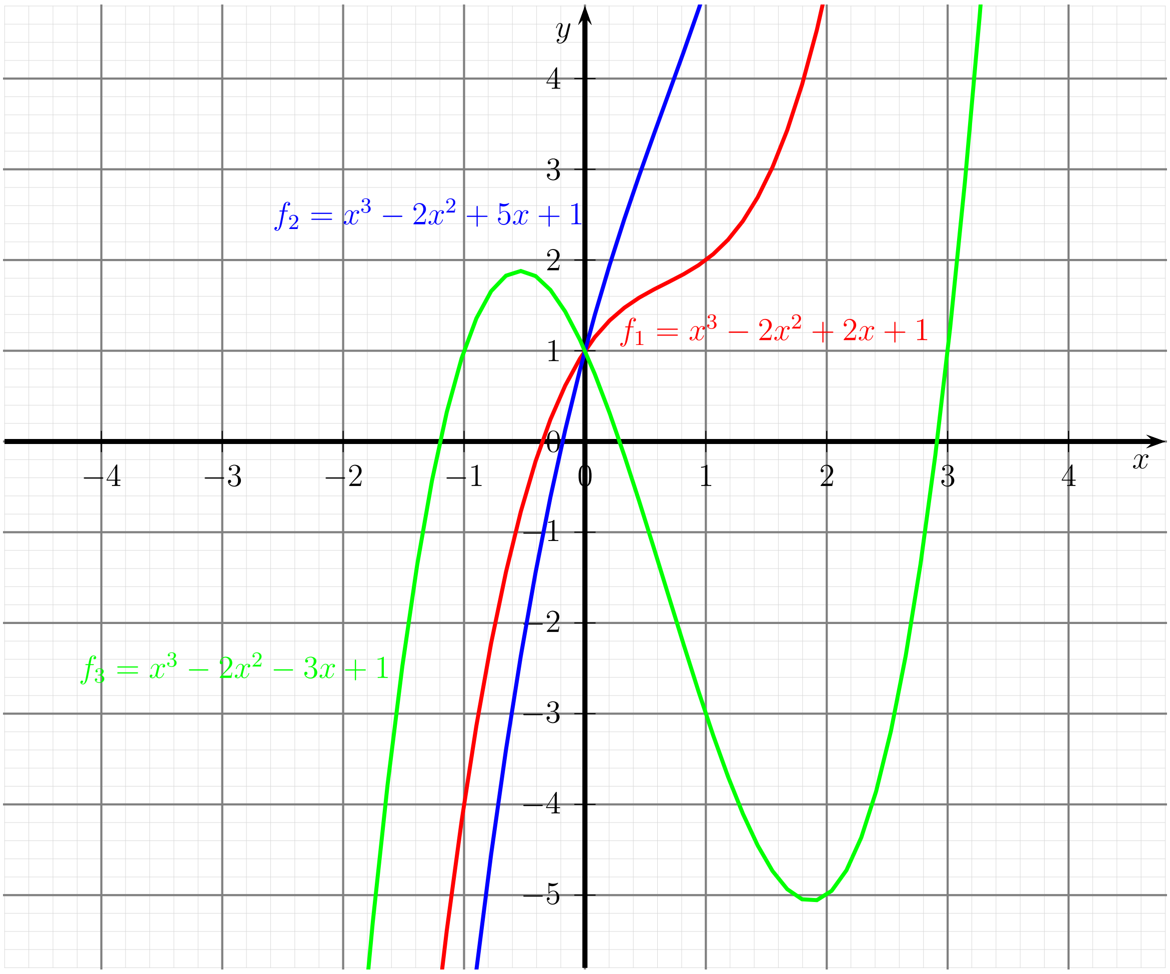
Variieren wir nun den Parameter b. Dazu habe ich drei Funktionen ausgewählt, die sich nur durch unterschiedliche Werte für den Parameter b unterscheiden.



Wieder fällt auf, dass alle Kurven den selben y-Achsenabschnitt haben, nämlich wieder $y_0 = 1$. Das bestätigt unsere Vermutung von vorhin, dass offenbar $y_0 = d$ ist. Ein offensichtlicher eindeutiger Einfluss des Parameters b auf die Kurvenform ist aber leider nicht erkennbar.

Prüfen wir nun den Einfluss des Parameters c durch drei Funktionen mit unterschiedlichem Wert für c.

[1] **Parallel** bedeutet **gleiche Steigung**. Was es aber mit der Steigung einer gekrümmten Kurve auf sich hat, ist nicht ganz trivial. Die **Differentialrechnung** befasst sich mit genau diesem Thema. Die Hintergründe findet man beispielsweise hier: http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/diffrech.pdf



Es fällt auf, dass nun alle Kurven unterschiedlich steil durch den y-Achsenabschnitt bei $y_0 = 1$ verlaufen. Das war zuvor bei den Funktionen mit dem identischen Parameter c nicht der Fall. Wir sehen, dass bei f_1 mit $c = 2$ die Kurve dort **flacher** verläuft, als bei f_2 mit $c = 5$. In beiden Fällen steigt die Kurve aber **nach rechts an**. Bei f_3 mit $c = -3$ dagegen fällt die Kurve **nach rechts ab**. Offenbar bestimmt der Parameter c die Steigung beim Schneiden der y-Achse.

Zusammenfassung: Der Parameter a bestimmt den Verlauf Richtung $\pm\infty$. Mit **großem** a verlaufen die Kurven **steiler**, mit **kleinem** a **flacher**. Ist a **positiv**, verlaufen die Kurven **von links unten nach rechts oben**, bei **negativem** a verlaufen sie **von links oben nach rechts unten**. Ein einfach zu überblickender Einfluss des Parameters b ist nicht erkennbar. Der Parameter c bestimmt, wie steil die y-Achse geschnitten wird und der Parameter d gibt den y-Achsenabschnitt y_0 an.

Möchte man die Nullstellen eines Polynomes dritten Grades bestimmen, hilft dieses Skript weiter: `http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/nullst.pdf`

4 Polynome 4. Grades

Bei Polynomen 4. Grades hat man diese allgemeine Form:

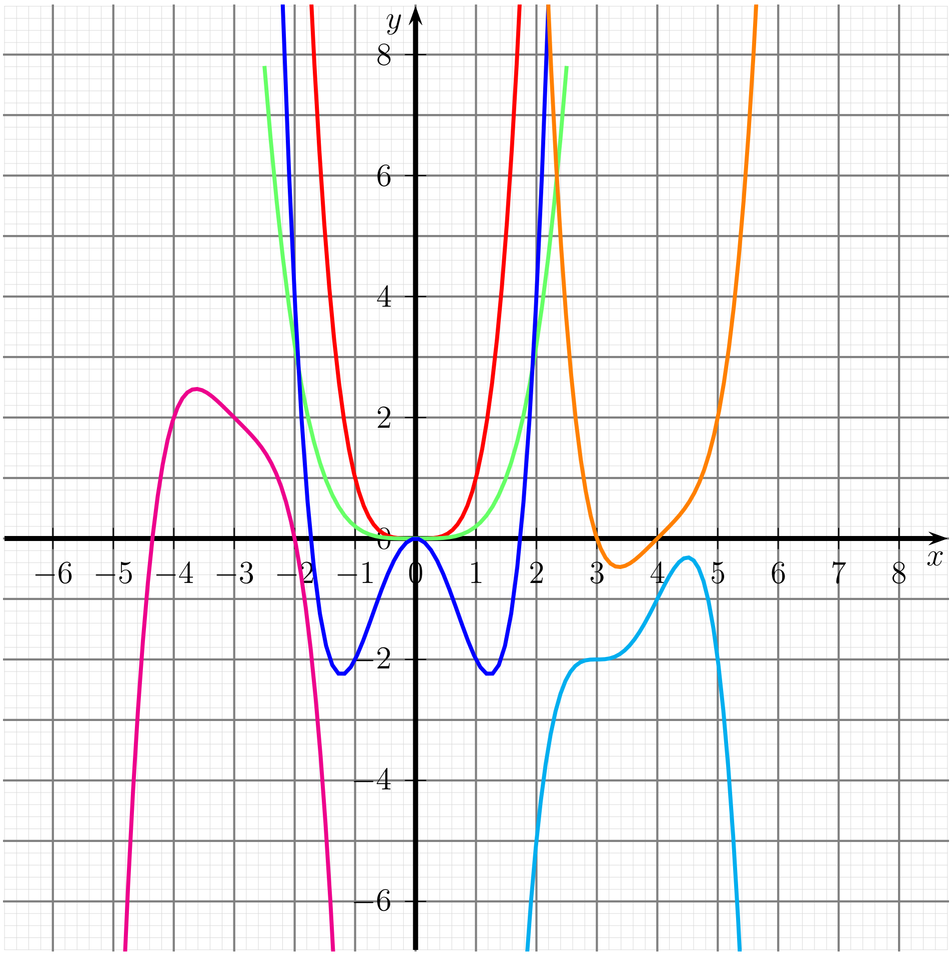
$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Damit man nicht so viel mit den lästigen Indizes zu tun hat, schreibt man das allgemeine Polynom 4. Grades (ähnlich, wie wir es schon beim Polynom 3. Grades gemacht haben) in der Regel so:

$$\boxed{f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$$

Wenn man die Parameter a bis e kennt, dann kennt man auch das Polynom.

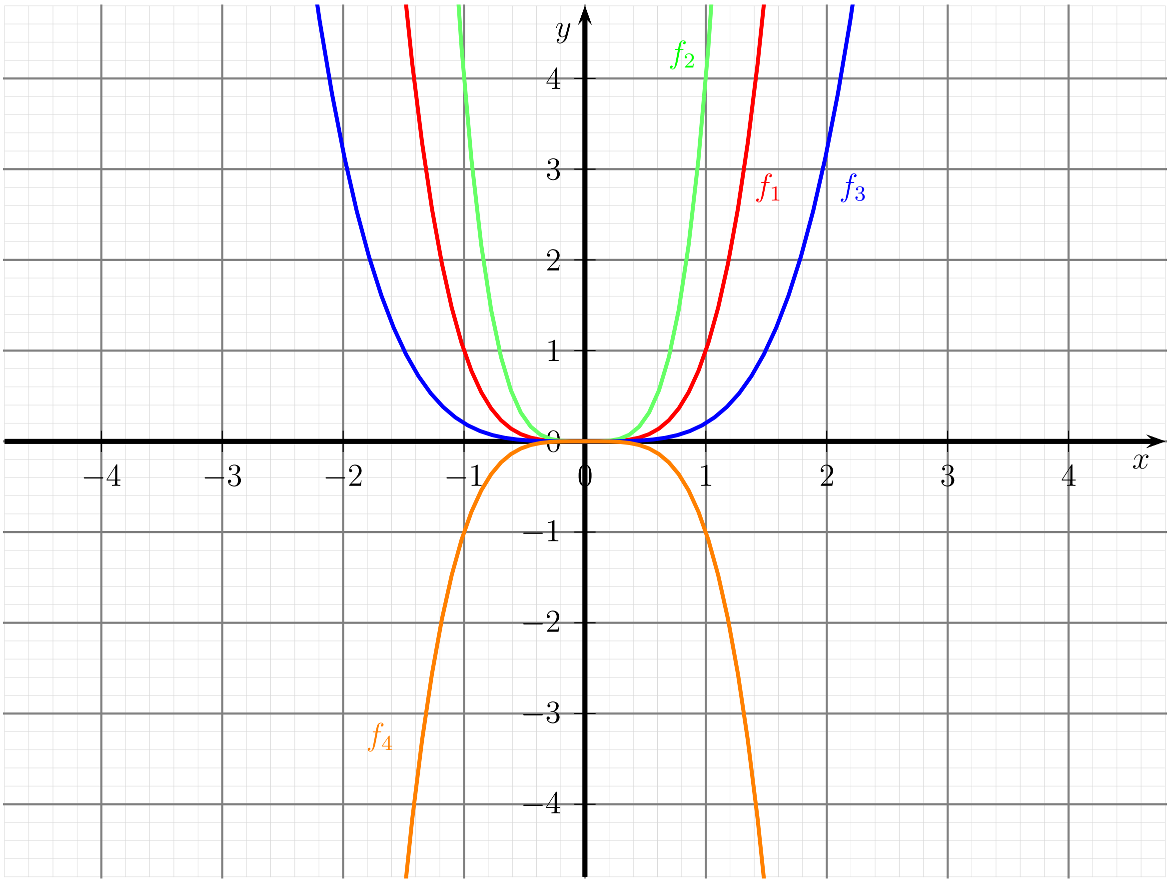
Nachfolgend möchte ich ungeordnet ein paar typische Polynome 4. Grades darstellen.



Wenn wir uns die Kurvenformen ansehen, dann können wir erkennen, dass einige an eine Parabel erinnern (zum Teil etwas “mit dem Hammer plattgeklopft“, wie die rote und die grüne), andere dagegen haben deutliche Beulen wie die violetteoder die orangfarbene, oder sie laufen mehrfach auf und ab, wie die dunkelblaue. Die hellblaue stellt einen Grenzfall dazwischen dar.

Um den Zusammenhang zu den Parametern a bis e zu untersuchen schauen wir uns zunächst ein paar Kurven mit unterschiedlichem a und mit $b = c = d = e = 0$ an. Dargestellt werden die Funktionen:

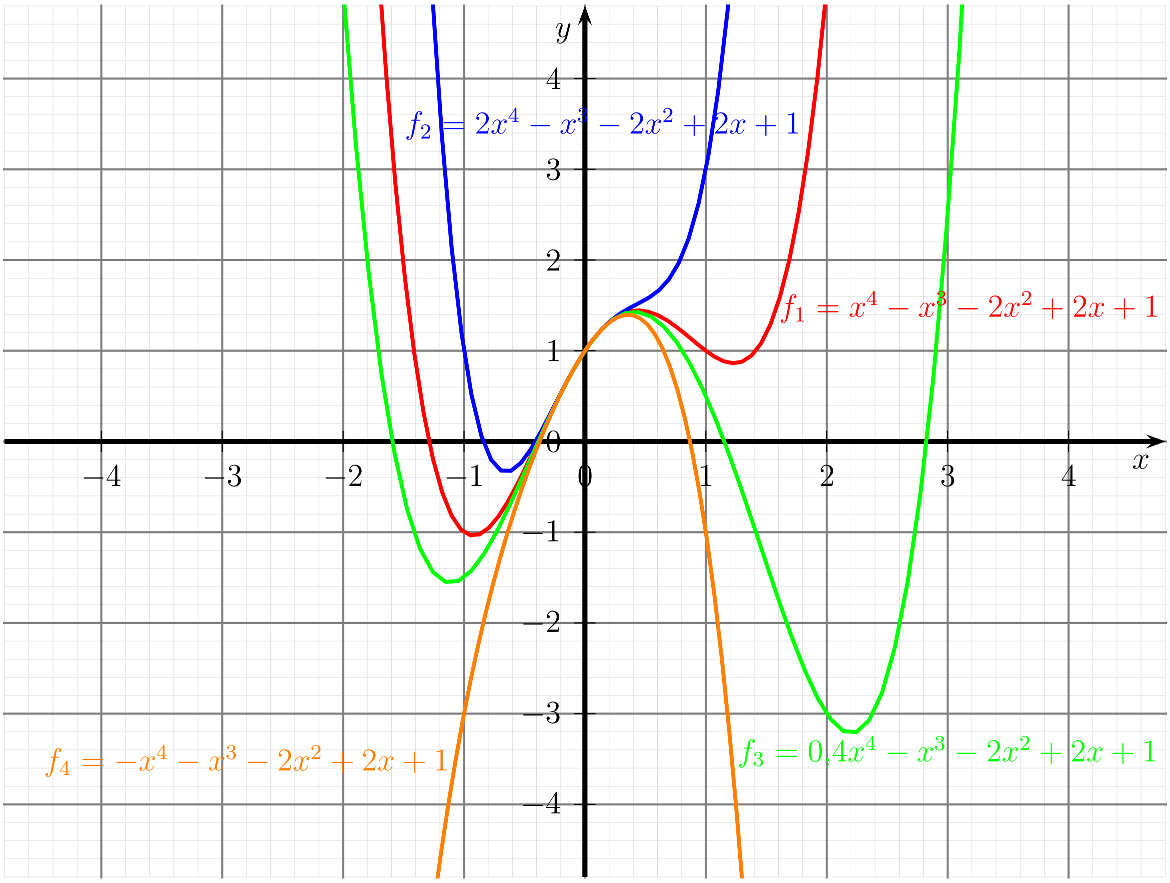
$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^4 \\ f_2(x) &= 4x^4 \\ f_3(x) &= 0{,}2x^4 \\ f_4(x) &= -x^4 \end{aligned}$$



Wir erkennen, dass ähnlich wie bei Polynomen 3. Grades, durch Verändern von a die Kurve nur gedehnt, gestaucht oder vertikal gespiegelt wird. Mit **großem** a verlaufen die Kurven **steiler**, mit **kleinem** a **flacher**. Ist a **positiv**, verlaufen die Kurven **von links oben nach rechts oben**, bei **negativem** a verlaufen sie **von links unten nach rechts unten**.

Wie schon bei Polynomen 3. Grades verlaufen auch hier alle Kurven waagerecht durch den Koordinatenursprung im Punkt $P(0|0)$.

Wie sieht es aber aus, wenn für die Parameter b bis e Zahlenwerte $\neq 0$ ausgewählt werden? Dazu habe ich ebenfalls vier Funktionen verwendet, die sich nur durch Parameter a unterscheiden.



Wir sehen, dass es wie zuvor dabei bleibt, dass bei **positivem** a, die Kurven **von links oben nach rechts oben** verlaufen, bei **negativem** a verlaufen sie **von links unten nach rechts unten**.

Jetzt verlaufen alle Kurven durch den y-Achsenabschnitt $y_0 = 1$. Das liegt daran, dass das **absolute Glied** $e = 1$ ist. Hier gilt: $y_0 = e$.

Hier schneiden alle Kurven gleich steil die y-Achse. Dafür verantwortlich ist (ähnlich wie zuvor bei den Polynomen 3. Grades) der Parameter im “Linearen Glied“, der hier allerdings d heißt (und nicht c, wie bei Polynomen 3. Grades). In allen dargestellten Funktionen ist $d = 2$. Woran das liegt und was eigentlich die Steigung bei einer krummlienigen Kurve genau ist, ist Thema in der sogenannten **Differentialrechnung**. Das habe ich ausführlich in diesem Skript dargestellt:

http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/diffrech.pdf

Was die Parameter b und c angeht, gibt es leider kein Merkmal, das man ausschließlich diesen Parametern zuordnen kann. Das war ja auch schon beim Parameter b bei Polynomen 3. Grades so.

Wie man Nullstellen eines Polynomes 4. Grades bestimmt, habe ich wie bereits erwähnt hier beschrieben:

`http://dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/nullst.pdf`