Berechnung von Netzwerken

W. Kippels

30. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Müssen in einem Netzwerk[1] Spannungen und Ströme berechnet werden, dann kann man dazu unterschiedliche Methoden verwenden. Jede Methode hat bestimmte Vorzüge und Nachteile. Um abschätzen zu können, welche Methode am schnellsten zum Ziel führt, muss man die Methoden aber alle beherrschen.

Im Anschluss an jedes Kapitel werden ein paar Fragen gestellt, die dabei helfen sollen, das dargestellte zu rekapitulieren und besser zu verstehen.

Mögliche richtige Antworten zu den Fragen sind in einer eigenen PDF-Datei zusammengestellt. Diese Datei ist hier zu finden:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/netzw_l.pdf

[1] Unter einem Netzwerk versteht man die Zusammenschaltung von **zweipoligen** Bauelementen. Unter besonderen Bedingungen können auch die zweipoligen Wicklungen von Transformatoren einbezogen werden.

2 Spannungs- und Stromquellen

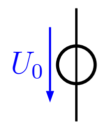
Um eine möglichst einfache Berechnung zu ermöglichen, benötigt man ideale Bauelemente, auch wenn es die in der Realität natürlich nicht gibt. Reale Bauelemente müssen dann je nach Komplexizität der Anforderung aus mehreren idealen Bauelementen zusammengesetzt werden.

„Otto Normalverbraucher“ spricht gern von einer *Stromquelle*, wenn er eine *Spannungsquelle* meint. Der Fachmann (diesen Begriff verwende ich geschlechtsneutral als Oberbegriff, gilt also auch genauso für die Fachfrau) muss hier aber genau unterscheiden. Nachfolgend werden die korrekten Definitionen dargestellt.

2.1 Spannungsquellen

2.1.1 Die ideale Spannungsquelle

Nebenstehend ist das Schaltzeichen einer **idealen Spannungsquelle** dargestellt. Der Kreis wird für jeder Art von Quelle verwendet, der durchgehende Strich deutet an, dass die Quelle niederohmig ist, also einen Innenwiderstand von 0 Ω hat. Das ist nämlich das Merkmal einer idealen Spannungsquelle. Die Spannung, die sie liefert, wird mit einem Spannungspfeil daneben eingetragen. Die Definition der idealen Spannungsquelle ist ganz einfach:

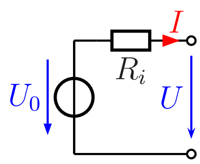


Eine ideale Spannungsquelle liefert lastunabhängig eine konstante Spannung.

Eine Konsequenz aus dieser Definition besteht darin, dass eine ideale Spannungsquelle **niemals** kurzgeschlossen werden darf. An einem idealen Kurzschluss steht nämlich immer eine Spannung von 0 V an!

2.1.2 Die reale Spannungsquelle

Eine **reale Spannungsquelle** ist natürlich nicht in der Lage, eine Spannung zu liefern, die unter allen Bedingungen konstant bleibt. In der Praxis bricht die Spannung bei Belastung stets mehr oder weniger ein.

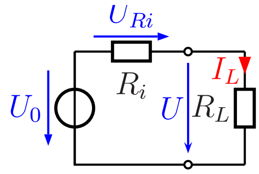


Dieses Verhalten bekommt man mit nebenstehender Schaltung in den Griff. Man setzt die reale Spannungsquelle einfach aus einer idealen Spannungsquelle und einem idealen Widerstand – dem sogenannten **Innenwiderstand** R_i – zusammen. Je nach Laststrom I ist die Klemmenspannung U etwas kleiner, als die Urspannung U_0. Durch die Verwendung idealer Bauelemente in der Ersatzschaltung wird die reale Spannungsquelle gut berechenbar.

Je **kleiner** R_i ist, desto idealer wird die reale Spannungsquelle.

Ein Beispiel: An einer Steckdose wird im Leerlauf eine Spannung von $U_1 = 233\,\mathrm{V}$ gemessen. Schließt man einen Lastwiderstand R_L an, der einen Laststrom von $I_L = 10\,\mathrm{A}$ fließen lässt, so sinkt die Spannung auf $U_2 = 232\,\mathrm{V}$ ab. Wie groß sind U_0 und R_i?

Lösung: Nebenstehend ist die Schaltung dargestellt. Der Teil links von den Anschlussklemmen stellt die Ersatzschaltung der Steckdose als reale Spannungsquelle mit allen davorliegenden Geräten wie Generator, Transformatoren und Leitungen dar. Wenn kein Strom aus der Steckdose entnommen wird (der Laststrom ist in diesem Fall $I_L = 0$), dann fällt an R_i nach dem Ohmschen Gesetz keine Spannung ab ($U_{Ri} = R_i \cdot I_L$). Nach der Kirchhoffschen Maschenregel ist dann $U = U_0 - U_{Ri} = U_0$. Es ist also:



$$U_0 = U_1 = 233\,\mathrm{V}$$

Bei Belastung mit $I_L = 10\,\mathrm{A}$ fällt an R_i eine Spannung ab. Wir können diesen Spannungsfall aus den angegebenen Daten berechnen:

$$U_{Ri} = U_1 - U_2 = 233\,\mathrm{V} - 232\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{V}$$

Mit dieser Spannung kann mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes R_i berechnet werden.

$$R_i = \frac{U_{Ri}}{I_L} = \frac{1\,\mathrm{V}}{10\,\mathrm{A}} = 0{,}1\,\Omega$$

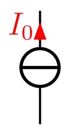
Mit den Werten von $U_0 = 233\,\mathrm{V}$ und $R_i = 0{,}1\,\Omega$ kann nun für jeden Lastfall ausgerechnet werden, auf welchen Wert die Klemmenspannung absinkt.

Hierbei gibt es in der Praxis natürlich eine Obergrenze für den Strom I_L. Irgendwann löst eine vorgeschaltete Sicherung aus. Das ist in der Ersatzschaltung jedoch **nicht** berücksichtigt.

2.2 Stromquellen

2.2.1 Die ideale Stromquelle

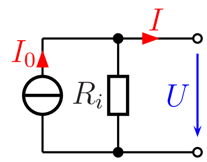
Nebenstehend ist das Schaltzeichen der **idealen Stromquelle** dargestellt. Der Kreis wird – wie schon erwähnt – für jeder Art von Quelle verwendet, der Quer-Strich deutet an, dass die Quelle hochohmig ist, also einen unendlich großen Innenwiderstand hat. Das ist nämlich das Merkmal einer idealen Stromquelle. Der Strom, die sie liefert, wird mit einem Strompfeil in der Zuleitung eingetragen. Die Definition der idealen Stromquelle ist ganz einfach:



Eine ideale Stromquelle liefert lastunabhängig einen konstanten Strom.

Eine Konsequenz aus dieser Definition besteht darin, dass eine ideale Stromquelle **niemals** im Leerlauf betrieben werden darf. Dann kann der Strom nämlich nirgendwo hinfließen.

2.2.2 Die reale Stromquelle



Eine **reale Stromquelle** gibt es so gut wie nicht. In der Praxis wird in der Regel eine Spannung vorgegeben. Ansatzweise gibt es eine Stromquelle beim Elektro-Schweißen. Der Schweißer stellt je nach Anforderung am Schweißtrafo einen Strom ein, der während des Schweißvorgangs nahezu konstant bleiben soll. So lange noch kein Lichtbogen gezündet ist, fließt natürlich kein Strom. Zudem muss aus Sicherheitsgründen in diesem Fall die Spannung begrenzt bleiben. Stromquellen gibt es ansonsten bei bestimmten Systemen in der Mess- und Regeltechnik. Die Sensoren geben ihre Messwerte in Form eines Stromes an die Zentrale weiter, den sie mit einer geeigneten elektronischen Schaltung einstellen.

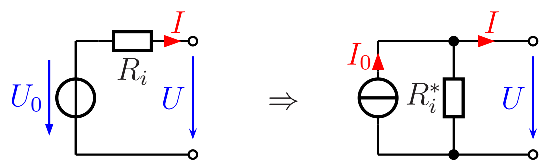
Die reale Stromquelle kann aus einer idealen Stromquelle und einem Widerstand nachgebildet werden. Dieser Innenwiderstand ist anders, als in der Spannungsquelle, nicht in Reihe, sondern parallel zur idealen Stromquelle geschaltet. Dadurch ist die ideale Stromquelle immer belastet, Leerlauf ist bekanntlich ja nicht zulässig. Durch die Verwendung idealer Bauelemente in der Ersatzschaltung wird die reale Stromquelle gut berechenbar.

Je **größer** R_i ist, desto idealer wird die reale Stromquelle.

2.3 Umrechnungen Spannungsquelle – Stromquelle

Wenn man eine reale Quelle in einen schwarzen Kasten steckt, so dass nur die Anschlussklemmen zugänglich sind, dann kann man interessanterweise nicht mehr zwischen einer Spannungs- und einer Stromquelle unterscheiden. Weil das so ist, muss es auch möglich sein, eine reale Spannungsquelle in eine Stromquelle umzurechnen, und umgekehrt.

2.3.1 Spanungsquelle in Stromquelle



Aus gegebenen Werten für die Urspannung U_0 und den Innenwiderstand R_i in der Spannungsquelle sollen der Urstrom I_0 und der Innenwiderstand R_i in der Stromquelle bestimmt werden, so dass U und I an den Anschlussklemmen der Schaltungen jeweils bei gleicher Belastung die gleichen Werte erreichen. Um Konflikte mit der gleichen Namensgebung für die Widerstände zu vermeiden, nenne ich den Innenwiderstand in der Stromquelle R_i^*. Die Bezeichnungen U und I können bestehen bleiben, sie sollen ja schließlich gleich sein.

Man kann nun für beliebige Belastungen rechnen. Vermutlich ist es jedoch am einfachsten, wenn man die beiden Belastungsfälle „**Kurzschluss**“ und „**Leerlauf**“ zugrunde legt. Beginnen wir die Berechnung mit dem Kurzschlussfall.

In der realen Spannungsquelle liegt die gesamte Spannung U_0 an R_i an, wenn die beiden Anschlussklemmen kurzgeschlossen werden. Der Kurzschlussstrom I ist dann:

$$I = \frac{U_0}{R_i}$$

Schließt man die reale Stromquelle kurz, dann fließt kein Strom mehr über R_i^*, der Kurzschlussstrom I ist dann identisch mit dem Urstrom I_0.

$$I = I_0$$

Setzt man die beiden Gleichungen gleich, dann hat man schon den Wert für I_0 in der Stromquellenschaltung.

$$\boxed{I_0 = \frac{U_0}{R_i}}$$

Als zweiten Belastungsfall wähle ich den Leerlauf. In der Spannungsquellenschaltung fällt dann **keine** Spannung an R_i ab, da kein Strom hindurch fließt. Wir erhalten damit:

$$U = U_0$$

Nun betreibe ich auch die Stromquellenschaltung im Leerlauf. Der gesamte Strom I_0 muss dann durch R_i^* fließen. Die Spannung U ergibt sich dann so:

$$U = R_i^* \cdot I_0$$

Auch hier können beide Gleichungen gleichgesetzt werden.

$$U_0 = R_i^* \cdot I_0$$

In diese Gleichung kann für I_0 der eben gefundene Wert $I_0 = \frac{U_0}{R_i}$ eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} U_0 &= R_i^* \cdot \frac{U_0}{R_i} \quad | \cdot R_i \\ R_i \cdot U_0 &= R_i^* \cdot U_0 \quad | : U_0 \\ R_i &= R_i^* \end{aligned}$$

Zusammengefasstes Ergebnis:

Die Innenwiderstände beider Schaltungen sind gleich.

2.3.2 Stromquelle in Spanungsquelle

Soll eine Stromquelle in eine Spannungsquelle umgerechnet werden, dann kann man schon ausnutzen, dass die Innenwiderstände R_i und R_i^* beider Schaltungen gleich sind. Wir müssen also nicht mehr unterschiedliche Bezeichnungen verwenden.

Zur Bestimmung der Urspannung U_0 für die Spannungsquellenschaltung aus dem Urstrom Strom I_0 kann direkt die eben bestimmte Formel dienen. Sie muss nur nach U_0 umgestellt werden.

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{U_0}{R_i} \quad | \cdot R_i \\ R_i \cdot I_0 &= U_0 \end{aligned}$$

2.3.3 Zusammenfassung

Die Umrechnung einer Spannungsquelle in eine Stromquelle und umgekehrt kann wie folgt zusammengefasst werden.

- Die Innenwiderstände beider Schaltungen sind identisch.
- Der Urstrom I_0 der Stromquelle ist gleich dem Kurzschlussstrom der Spannungsquelle.
- Die Urspannung U_0 der Spannungsquelle ist gleich der Leerlaufspannung der Stromquelle.

2.4 Übungsfragen zu Spannungs- und Stromquellen

Lösungen zu den Übungsfragen sind hier zu finden:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/netzw_l.pdf

2.4.1 Frage 1:

Welches Merkmal kennzeichnet eine **ideale Spannungsquelle**?

2.4.2 Frage 2

Welches Merkmal kennzeichnet eine **ideale Stromquelle**?

2.4.3 Frage 3

Welcher **Betriebszustand** ist für eine **ideale** Stromquelle **unzulässig**?

2.4.4 Frage 4

Welcher **Betriebszustand** ist für eine **reale** Stromquelle **unzulässig**?

2.4.5 Frage 5

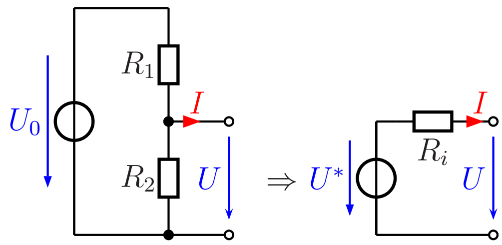
Eine Batterie hat eine Leerlaufspannung von 3 V. Wird sie mit einem Strom von 100 mA belastet, bricht die Spannung auf 2,8 V zusammen. Berechnen Sie

- für die Ersatzschaltung als **reale Spannungsquelle**
  - die Urspannung U_0.
  - den Innenwiderstand R_i.
- für die Ersatzschaltung als **reale Stromquelle**
  - den Urstrom I_0.
  - den Innenwiderstand R_i.

3 Ersatzspannungsquelle für Spannungsteiler

3.1 Herleitung der Formeln

Manchmal ist es zweckmäßig, eine Teilschaltung eines Netzwerkes in eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand umzurechnen. Nebenstehend links ist ein Spannungsteiler dargestellt, der an seinen Anschlussklemmen die Spannung U liefert. Bei einem Laststrom I bricht diese Spannung mehr oder weniger stark zusammen.



Genau das gleiche Verhalten zeigt auch die Schaltung rechts daneben. Sie liefert ebenfalls eine Spannung U, die lastabhängig vom Strom I ist. Würde man jede Schaltung in einen schwarzen Kasten einbauen, an dem nur die Anschlussklemmen zugänglich sind, dann könnte von außen nicht unterschieden werden, welche Schaltung dahinter steckt, wenn die Bauteilwerte entsprechend gewählt wurden. Das bedeutet, dass die Spannungsteilerschaltung in eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand umgerechnet werden kann. Wir müssen nur irgendwie U^* und R_i aus U_0, R_1 und R_2 berechnen. Aber wie kann man das machen?

Beide Schaltungen müssen bei gleichen Lastströmen I die gleiche Spannung U liefern. Wenn wir uns besonders markante Belastungsfälle aussuchen, wird die Rechnung am einfachsten. Das wären beispielsweise Leerlauf und Kurzschluss. Bestimmen Sie für jede der beiden Schaltungen formelmäßig U und I für beide Belastungsfälle. Dann können Sie die jeweiligen Werte aus beiden Schaltungen **gleichsetzen**. Führen Sie das einmal selbst durch, bevor Sie weiterblättern.

Beginnen wir mit dem Belastungsfall „**Leerlauf**“, also mit $\mathbf{I = 0}$.

Am **Spannungsteiler** gilt nach Kirchhoff:

$$\begin{aligned}\frac{U}{U_0} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad | \cdot U_0\\ U &= \frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\end{aligned}$$

An der **Spannungsquelle mit Innenwiderstand** ist es noch einfacher. Da $I = 0$ ist, gibt es auch keinen Spannungsfall an R_i. es ist also:

$$U = U^*$$

Setzt man beide Gleichungen gleich, erhält man für U^*:

$$\boxed{U^* = \frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}$$

Wer den Ablauf der Herleitung nachvollziehen kann, der kann erkennen, dass die Ersatzspannung U^* identisch mit der Leerlaufspannung des Spannungsteilers ist.

Mit Hilfe des Belastungsfalls „**Kurzschluss**“ kann der Widerstand R_i bestimmt werden. Bestimmen wir dazu zunächst den Kurzschlussstrom I für den Spannungsteiler. Da der Kurzschluss R_2 überbrückt, liegt die gesamte Spannung U_0 an R_1 an. Durch R_2 fließt kein Strom, da die Spannung an R_2 0 V beträgt (Kurzschluss).

$$I = \frac{U_0}{R_1}$$

Bestimmen wir nun den Kurzschlussstrom I an der rechten Schaltung (Spannungsquelle mit Innenwiderstand). Bei Kurzschluss liegt die gesamte Spannung U^* an R_i an.

$$I = \frac{U^*}{R_i} = \frac{\frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}{R_i} = \frac{U_0 \cdot R_2}{R_i \cdot (R_1 + R_2)}$$

Die beiden Gleichungen können nun gleichgesetzt werden. Daraus kann R_i bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\frac{U_0}{R_1} &= \frac{U_0 \cdot R_2}{R_i \cdot (R_1 + R_2)} \quad | \cdot R_i\\ \frac{U_0 \cdot R_i}{R_1} &= \frac{U_0 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad | \cdot \frac{R_1}{U_0}\end{aligned}$$

$$\boxed{R_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}$$

Na, wem kommt diese Formel bekannt vor? Richtig, es ist die Formel zur Bestimmung des Ersatzwiderstandes einer **Parallelschaltung** zweier Widerstände R_1 und R_2.

Diese Parallelschaltungsformel lässt sich auch ganz anders begründen. Eine ideale Spannungsquelle hat $0\,\Omega$ Innenwiderstand. Wenn es nur um Widerstände geht, kann die Spannungsquelle U_0 durch einen Kurzschluss ersetzt werden. Von den Anschlussklemmen aus gesehen sind dann tatsächlich die beiden Widerstände parallel geschaltet. **Diese Denkweise ist ein hilfreiches Verfahren, das auch in vielerlei anderen Schaltungen zur Innenwiderstandsbestimmung angewendet werden kann!**

Fassen wir die Ergebnisse einmal in Merksätzen anstelle von Formeln zusammen:

Die Spannung der Ersatzspannungsquelle U^* ist
gleich der Leerlaufspannung des Spannungsteilers.

Der Innenwiderstand R_i der Ersatzschaltung ist gleich dem Ersatzwiderstand der Parallelschaltung der Spannungsteilerwiderstände.

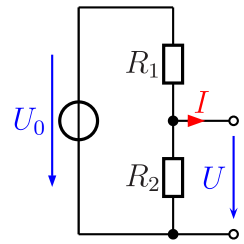
3.2 Übungsfragen zur Ersatzschaltung für Spannungsteiler

Lösungen zu den Übungsfragen sind hier zu finden:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/netzw_l.pdf

3.2.1 Aufgabe 1

Gegeben ist nebenstehende Schaltung mit folgenden Werten:



$U_0 = 10\,\mathrm{V}$
$R_1 = 200\,\Omega$
$R_2 = 300\,\Omega$

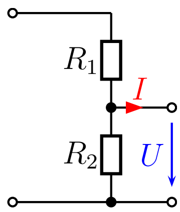
Geben Sie eine einfache Ersatzschaltung an und bestimmen Sie alle Bauelemente der Ersatzschaltung!

3.2.2 Aufgabe 2

Mit Hilfe eines Spannungsteilers aus zwei Widerständen zu je $100\,\Omega$ soll eine Spannung von $12\,\mathrm{V}$ auf die Hälfte heruntergeteilt werden. Welchen Innenwiderstand hat dieser Spannungsteiler?

3.2.3 Aufgabe 3

An eine reale Spannungsquelle mit einer Leerlaufspannung von $U_0 = 12\,\mathrm{V}$ und einem Innenwiderstand von $R_i = 10\,\Omega$ wird nebenstehender Spannungsteiler mit $R_1 = 90\,\Omega$ und $R_2 = 400\,\Omega$ angeschlossen.



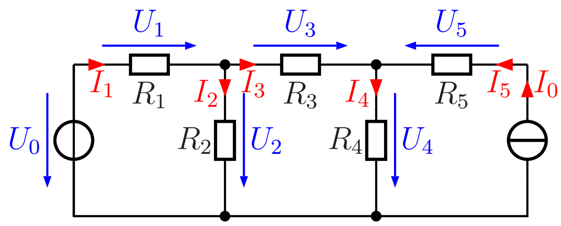
Ergänzen Sie zunächst die Schaltung um die reale Spannungsquelle. Wandeln Sie dann die gesamte Schaltung in eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand um. Wie groß ist der Innenwiderstand R_i^* und die Urspannung U^* dieser Ersatzschaltung?

Belasten sie nun die Schaltung mit einem Lastwiderstand von $R_L = 20\,\Omega$. Welche Ausgangsspannung ergibt sich mit dieser Belastung?

4 Der Überlagerungssatz

Wenn die Schaltungen komplizierter werden, dann stößt man schnell an die Grenzen der bisher vorgestellten Analysemethoden. Dies gilt vor allem dann, wenn mehrere Quellen vorhanden sind. Ein Beispiel soll dies verdeutlichen.

Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen in nebenstehender Schaltung!



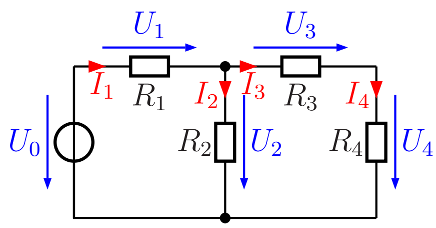
Gegeben sind folgende Werte:
$R_1 = 300\,\Omega$
$R_2 = 200\,\Omega$
$R_3 = 120\,\Omega$
$R_4 = 80\,\Omega$
$R_5 = 100\,\Omega$
$U_0 = 12\,\mathrm{V}$
$I_0 = 20\,\mathrm{mA}$

Es gibt einen Lehrsatz, der folgendes besagt:

> **In einem Linearen Schaltnetz mit mehreren Spannungs- und Stromquellen können die Teilströme berechnet werden, indem man für jede Quelle einzeln die Teilströme bestimmt und später addiert. Dabei müssen unbenutzte Stromquelle offen gelassen und unbenutzte Spannungsquellen kurzgeschlossen werden.**

Wir wollen das Beispiel einmal mit diesem Prinzip durchrechnen.

Fall 1 Im ersten Fall soll nur die Spannungsquelle U_0 in Betrieb sein. Die Stromquelle muss dazu entfernt werden. Da dann R_5 nur noch einseitig angeschlossen ist, kann er ebenfalls weggelassen werden. Es bleibt nebenstehende Schaltung übrig.



Hier können zunächst die Widerstände R_3 und R_4 zu R_{34} zusammengefasst werden. Für die Reihenschaltung gilt:

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 120\,\Omega + 80\,\Omega = 200\,\Omega$$

Parallel zu R_{34} liegt R_2. Wir berechnen diese Parallelschaltung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_{234}} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{34}} \\
\frac{1}{R_{234}} &= \frac{1}{200\,\Omega} + \frac{1}{200\,\Omega} \\
R_{234} &= 100\,\Omega
\end{aligned}$$

Zu R_{234} liegt R_1 in Reihe. Der gesamte Ersatzwiderstand R_{1234} kann berechnet werden.

$$R_{1234} = R_1 + R_{234} = 300\,\Omega + 100\,\Omega = 400\,\Omega$$

Jetzt kann der erste Stromanteil I_{11} (der Strom durch R_1 für den ersten Fall) berechnet werden.

$$I_{11} = \frac{U_0}{R_{1234}} = \frac{12\,\mathrm{V}}{400\,\Omega} = 30\,\mathrm{mA}$$

Für den Strom I_{21} benötigen wir die Spannung U_2, die auch an R_{234} anliegt.

$$U_2 = R_{234} \cdot I_1 = 100\,\Omega \cdot 30\,\mathrm{mA} = 3\,\mathrm{V}$$

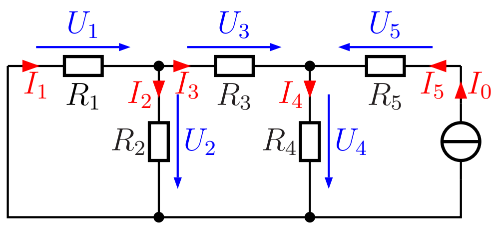
Mit diesem Spannungswert kann nun I_{21} (der Strom in R_2 für den ersten Fall) berechnet werden.

$$I_{21} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{3\,\mathrm{V}}{200\,\Omega} = 15\,\mathrm{mA}$$

Für die beiden letzten Ströme gilt: $I_{31} = I_{41}$, denn die Widerstände R_3 und R_4 sind in Reihe geschaltet. Am Ersatzwiderstand R_{34} liegt die eben bestimmte Spannung U_2 an.

$$I_{31} = I_{41} = \frac{U_2}{R_{34}} = \frac{3\,\mathrm{V}}{200\,\Omega} = 15\,\mathrm{mA}$$

Teil 2 Im zweiten Teil des Lösungsverfahrens wird nur die Stromquelle verwendet, die Spannungsquelle wird außer Betrieb gesetzt. Dazu muss diese **kurzgeschlossen** werden, denn eine ideale Spannungsquelle hat $0\,\Omega$ Innenwiderstand. Es ergibt sich die nebenstehende Ersatzeschaltung.



Zunächst kann der Ersatzwiderstand R_{12} der Parallelschaltung aus R_1 und R_2 bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_{12}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\
\frac{1}{R_{12}} &= \frac{1}{300\,\Omega} + \frac{1}{200\,\Omega} \\
R_{12} &= 120\,\Omega
\end{aligned}$$

In Reihe zu R_{12} ist R_3 geschaltet. Wir bestimmen den zugehörigen Ersatzwiderstand R_{123}.

$$R_{123} = R_3 + R_{12} = 120\,\Omega + 120\,\Omega = 240\,\Omega$$

Nun wird R_4 mit dazugenommen. Er ist zu R_{123} parallel geschaltet. Wir erhalten R_{1234}.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_{1234}} &= \frac{1}{R_{123}} + \frac{1}{R_4} \\
\frac{1}{R_{1234}} &= \frac{1}{240\,\Omega} + \frac{1}{80\,\Omega} \\
R_{1234} &= 60\,\Omega
\end{aligned}$$

R_5 ist ohne Belang. Der Strom I_0 aus der Stromquelle kommt sowieso hindurch, egal, wie groß R_5 ist. I_0 fließt somit durch R_{1234}, womit die Spannung U_4 bestimmt werden kann.

$$U_4 = R_{1234} \cdot I_0 = 60\,\Omega \cdot 20\,\text{mA} = 1{,}2\,\text{V}$$

Mit dieser Spannung kann nun mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes I_{42} – der zweite Anteil an I_4 – berechnet werden.

$$I_{42} = \frac{U_4}{R_4} = \frac{1{,}2\,\text{V}}{80\,\Omega} = 15\,\text{mA}$$

Nun kann der Strom I_{32} bestimmt werden. Hierbei ist auf die in der Schaltung eingetragene Stromrochtung zu achten! Die Kirchhofsche Knotenregel hilft weiter.

$$\begin{aligned}
I_{32} + I_0 &= I_{42} && | - I_0 \\
I_{32} &= I_{42} - I_0 \\
I_{32} &= 15\,\text{mA} - 20\,\text{mA} \\
I_{32} &= -5\,\text{mA}
\end{aligned}$$

<u>Anmerkung:</u> Am Minuszeichen erkennt man, dass der Strom eigentlich andersherum fließt, als in der Schaltung eingetragen ist.

Dieser Strom I_{32} fließt auch durch den Ersatzwiderstand R_{12}. Damit kann U_1 oder U_2 bestimmt werden. <u>Achtung!</u> Diese Spannungen sind gegensinnig gepolt!

$$U_1 = -U_2 = R_{12} \cdot I_{32} = 120\,\Omega \cdot (-5\,\text{mA}) = -6\,\text{V}$$

Hiermit können nun die beiden noch fehlenden Teilströme I_{12} und I_{22} berechnet werden.

$$I_{12} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{-\,6\,\text{V}}{300\,\Omega} = -20\,\text{mA}$$

Da $U_2 = -U_1$ ist, wird mit $U_2 = +6\,\text{V}$ gerechnet.

$$I_{22} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{6\,\text{V}}{200\,\Omega} = 30\,\text{mA}$$

Damit haben wir alle Teilströme für beide Fälle zusammen. Die Gesamt-Teilströme können berechnet werden, indem wir nun den Überlagerungssatz anwenden.

$$I_1 = I_{11} + I_{12} = 30\,\mathrm{mA} - 20\,\mathrm{mA} = 10\,\mathrm{mA}$$

$$I_2 = I_{21} + I_{22} = 15\,\mathrm{mA} + 30\,\mathrm{mA} = 45\,\mathrm{mA}$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = 15\,\mathrm{mA} - 5\,\mathrm{mA} = 10\,\mathrm{mA}$$

$$I_4 = I_{41} + I_{42} = 15\,\mathrm{mA} + 15\,\mathrm{mA} = 30\,\mathrm{mA}$$

Der Strom I_5 muss nicht berechnet werden. Aufgrund der Kirchhoffschen Knotenregel ist er identisch mit I_0.

Zusammengefasste Ergebnisse:

$\boxed{I_1 = 10\,\mathrm{mA}}$ $\boxed{I_2 = 45\,\mathrm{mA}}$ $\boxed{I_3 = 10\,\mathrm{mA}}$ $\boxed{I_4 = 30\,\mathrm{mA}}$ $\boxed{I_5 = 20\,\mathrm{mA}}$

5 Zusammenfassung

Die nachfolgenden Übungsaufgaben können mit den verschiedenen Lösungsverfahren bearbeitet werden.

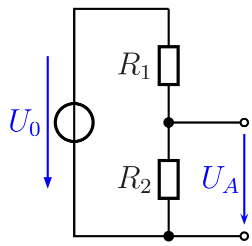
5.1 Allgemeine Übungsaufgaben

Lösungen zu den Übungsaufgaben sind hier zu finden:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/netzw_l.pdf

5.1.1 Aufgabe 4

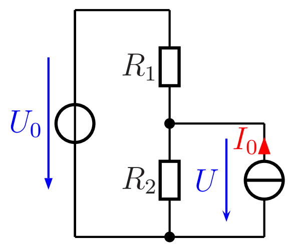
Wandeln Sie die Schaltung in eine möglichst einfache Ersatzschaltung um! Geben Sie dabei auch die Werte der Bauelemente der Ersatzschaltung an.



Gegeben sind folgende Werte:
$R_1 = 100\,\Omega \quad R_2 = 400\,\Omega$
$U_0 = 15\,\mathrm{V}$

5.1.2 Aufgabe 5

Gegeben ist nebenstehende Schaltung mit folgenden Werten:

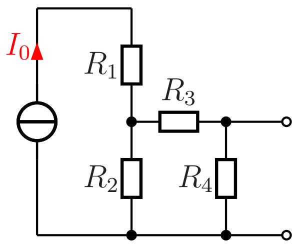


$U_0 = 10\,\mathrm{V}$
$I_0 = 0,2\,\mathrm{A}$
$R_1 = 20\,\Omega$
$R_2 = 30\,\Omega$

Wie groß ist die Spannung U an R_2?

5.1.3 Aufgabe 6

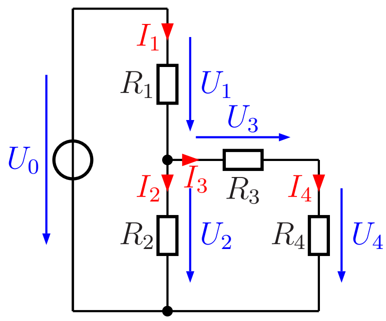
Ersetzen Sie die Schaltung durch eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand!



$I_0 = 400\,\mathrm{mA}$
$R_1 = 900\,\Omega$
$R_2 = 500\,\Omega$
$R_3 = 300\,\Omega$
$R_4 = 800\,\Omega$

5.1.4 Aufgabe 7

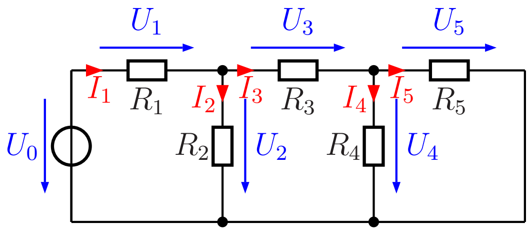
Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dabei dort, wo es sinnvoll ist, eine geeignete Ersatzschaltung!



$U_0 = 20\,\mathrm{V}$
$R_1 = 9\,\mathrm{k\Omega}$
$R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$R_3 = 1,1\,\mathrm{k\Omega}$
$R_4 = 3\,\mathrm{k\Omega}$

5.1.5 Aufgabe 8

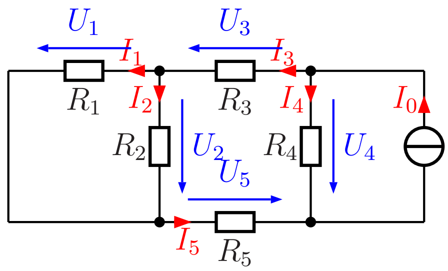
Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dabei dort, wo es sinnvoll ist, eine geeignete Ersatzschaltung!



$U_0 = 12\,\mathrm{V}$
$R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}$
$R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$R_3 = 3{,}1\,\mathrm{k\Omega}$
$R_4 = 9\,\mathrm{k\Omega}$
$R_5 = 1\,\mathrm{k\Omega}$

5.1.6 Aufgabe 9

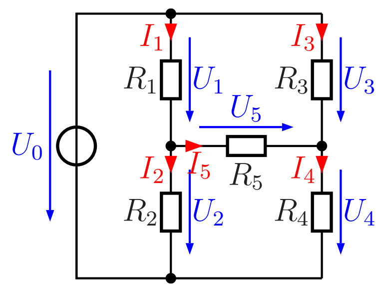
Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen in nebenstehender Schaltung!



$I_0 = 10\,\mathrm{mA}$
$R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}$
$R_2 = 6\,\mathrm{k\Omega}$
$R_3 = 9,6\,\mathrm{k\Omega}$
$R_4 = 5\,\mathrm{k\Omega}$
$R_5 = 8\,\mathrm{k\Omega}$

5.1.7 Aufgabe 10

Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen in nebenstehender Schaltung!

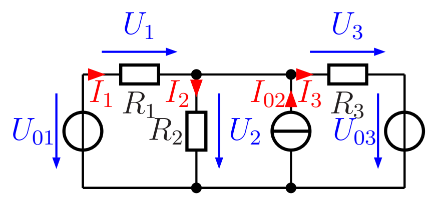


Gegeben sind folgende Werte:

$R_1 = 8\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_2 = 12\,\mathrm{k\Omega}$
$R_3 = 9\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_4 = 6\,\mathrm{k\Omega}$
$R_5 = 6{,}6\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad U_0 = 75\,\mathrm{V}$

5.1.8 Aufgabe 11

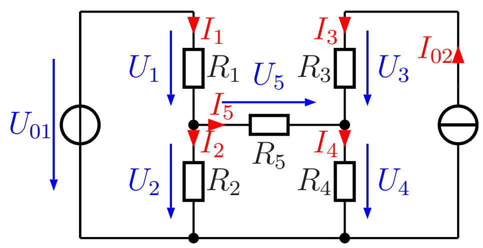
Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen in nebenstehender Schaltung!



$U_{01} = 12\,\mathrm{V}$
$I_{02} = 30\,\mathrm{mA}$
$U_{03} = 18\,\mathrm{V}$
$R_1 = 200\,\Omega$
$R_2 = 300\,\Omega$
$R_3 = 200\,\Omega$

5.1.9 Aufgabe 12

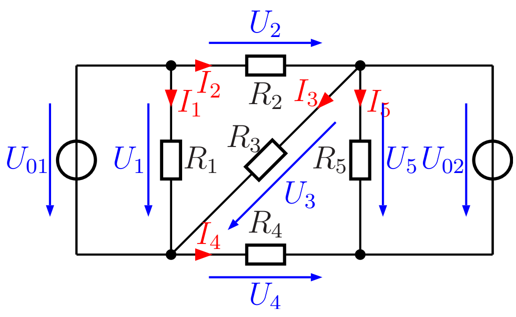
Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen in nebenstehender Schaltung!



$U_{01} = 15\,\mathrm{V}$
$I_{02} = 5\,\mathrm{mA}$
$R_1 = 1,6\,\mathrm{k\Omega}$
$R_2 = 2,4\,\mathrm{k\Omega}$
$R_3 = 1,8\,\mathrm{k\Omega}$
$R_4 = 1,12\,\mathrm{k\Omega}$
$R_5 = 1,32\,\mathrm{k\Omega}$

5.1.10 Aufgabe 13

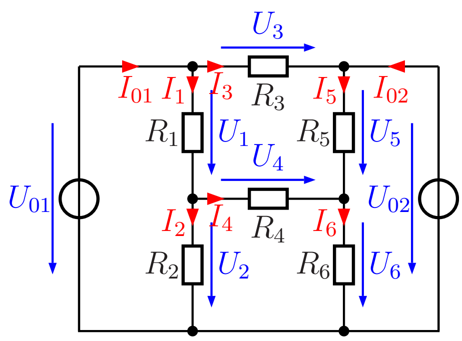
Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen in nebenstehender Schaltung!



$U_{01} = 16\,\mathrm{V}$
$U_{02} = 24\,\mathrm{V}$
$R_1 = 400\,\Omega$
$R_2 = 200\,\Omega$
$R_3 = 300\,\Omega$
$R_4 = 200\,\Omega$
$R_5 = 120\,\Omega$

5.1.11 Aufgabe 14

Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen in nebenstehender Schaltung!

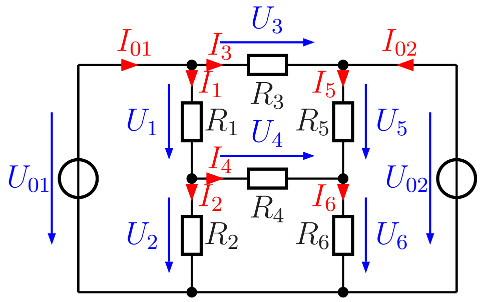


$U_{01} = 10\,\mathrm{V}$
$U_{02} = 5\,\mathrm{V}$
$R_1 = 100\,\Omega$
$R_2 = 400\,\Omega$
$R_3 = 200\,\Omega$
$R_4 = 44\,\Omega$
$R_5 = 80\,\Omega$
$R_6 = 20\,\Omega$

6 Das Maschenstromverfahren

6.1 Der „Vollständige Baum“

Wenn es darum geht, kompliziertere Netzwerke zu berechnen, stößt man mit den vorangehend dargestellten Verfahren bald an Grenzen. Zudem muss man auch immer eine Idee haben, wie die gegebene Schaltung an günstigsten in den Griff bekomen kann. Wie wir an den vorangehenden Übungsaufgaben und den Musterlösungen[2] erkennen kann, ist je nach Aufgabenstellung eine unterschiedliche Umwandlung zweckmäßig. Es ist also sinnvoll, nach einem Verfahren zu suchen, das **immer** zum Erfolg führt und auch bei sehr umfangreichen Netzwerken erfolgreich angewendet werden kann. Ein solches Verfahren ist das sogenannte Maschenstromverfahren. Es basiert auf dem Überlagerungssatz.



Beispielnetzwerk

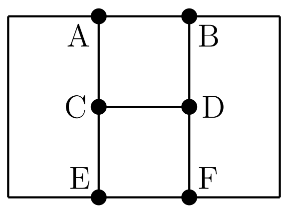
Als Beispiel für die Darstellung des Verfahrens verwende ich die letzte Übungsaufgabe aus dem vorangehenden Kapitel.

Jedes Netzwerk hat eine bestimmte Anzahl von ***Knoten*** und ***Zweigen***. Im nebenstehenden Beispiel sind es 5 Knoten und 8 Zweige. Was ist darunter zu verstehen?

Knoten: Ein Knoten ist eine Verbindungsstelle, an der sich die Anschlüsse von **mindestens drei** Bauelementen treffen. Eine (widerstandslose) Leitung ist dabei **nicht** als Bauelement anzusehen. Liegt eine solche Leitung zwischen zwei „Knoten“, dann müssen diese beiden „Knoten“ zu einem einzigen übergeordneten Knoten (auch *Überknoten* genannt) zusammengefasst werden.

Zweig: Ein Zweig ist eine Verbindung zwischen zwei Knoten über ein Bauelement.

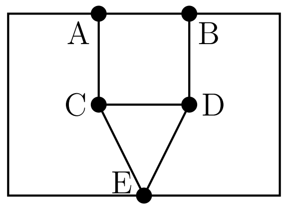
Sehen wir uns die Beispielschaltung einmal genau an. Nebenstehend ist die Struktur des Netzwerkes als „Gerippe“ dargestellt. Alle Zweige sind als einfacher Strich, alle Knoten als Punkt dargestellt. Auf den ersten Blick sind 6 Knoten erkennbar. In Wirklichkeit sind aber die vermuteten Knoten **E** und **F** zu einem einzigen Überknoten zusammenzufassen, weil dazwischen eine **leitende Verbindung** besteht. Tatsächlich gibt es also nur 5 echte Knoten. Das Netzwerk-Gerippe muss also korrigiert werden.



Netzwerk-Struktur

[2]Die Musterlösungen stehen hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/netzw_l.pdf

Die korrigierte Netzwerkstruktur ist nebenstehend dargestellt. Jetzt ist die Knotenzahl korrekt. Diese Struktur ist nun die Grundlage für alle weiteren Überlegungen.

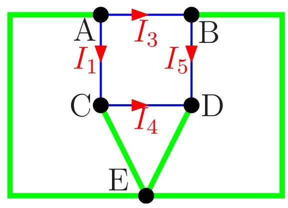


korrigierte Netzwerk-Struktur

Wenn man das Maschenstromverfahren erfolgreich anwenden möchte, dann benötigt man zunächst einen sogenannten ***Vollständigen Baum***. Was ist das?

Jeder, der schon einmal einen Baum gesehen hat, kennt seinen grundsätzlichen Aufbau. Von jeder Zweigspitze zu einer beliebigen anderen Zweigspitze gibt es **nur einen einzigen eindeutigen** Weg durch den Baum. Das liegt daran, dass keine Äste mehr zusammenwachsen, wenn sie sich irgendwo schon vom Stamm getrennt haben. Es gibt also **keine Schleifen**.

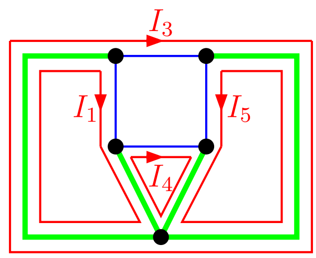
Nebenstehend ist in die Schaltung ein **Vollständiger Baum** in **grüner Farbe** eingezeichnet. Er verbindet ***jeden*** Knoten mit ***jedem*** anderen Knoten auf einem **eindeutigen** Weg ohne eine Schleifenbildung. Die übrigen Zweige – die sogenannten *Verbindungszweige* – sind mit blauer Farbe eingezeichnet; die Ströme in diesen Zweigen sind eingetragen.



Vollständiger Baum

Man kann erkennen, dass der Baum jeden Knoten erreicht. Es gibt von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten einen eindeutigen Weg. Beispielsweise führt der Weg von Knoten **A** zum Knoten **B** außen herum über Knoten **E**. Ein anderes Beispiel: Vom Knoten **B** zum Knoten **D** führt der Weg am rechten Rand entlang über **E** und dann nach oben.

Man stellt sich nun vor, dass der Strom, der im Verbindungszweig I_1 fließt, seinen Rückweg **ausschließlich** über den Vollständigen Baum nimmt. Nach dem Prinzip der ungestörten Überlagerung ist das zulässig. Man erhält also eine ***Masche*** von **A** nach **C**, dann weiter nach unten über **E** und über den linken Baumzweig zurück nach **A**. In dieser Masche fließt der Maschenstrom I_1.



Maschenströme

Nach dem gleichen Prinzip stellt man auch die Maschenströme I_3, I_4 und I_5 auf. Auch diese Maschenströme nehmen den Rückweg ausschließlich über den Vollständigen Baum. In den Zweigen des Baumes fließen dann ggf. mehrere Ströme.

Wenn nach diesen dargestellten Arbeitsprinzipien vorgegangen wird, dann erhält man die minimal notwendige Anzahl von Maschenströmen, mit denen man das Verhalten des Netzwerkes beschreiben kann. Zu jeder Masche kann nun eine Gleichung mit dem zugehörigen Spannungsumlauf aufgestellt werden. Dabei werden ausschließlich diese Maschenströme als Variablen verwendet. In unserem Beispiel darf also beispielsweise kein Strom I_2 auftreten. Benötigt man den Strom zwischen den Knoten **C** und **E**, dann muss man entsprechend dem aufgestellten Vollständigen Baum anstelle von I_2 mit der Differenz $I_1 - I_4$ arbeiten.

6.2 Aufstellen der Maschengleichungen

Stellen wir nun die Maschengleichungen auf. Dazu wird in jeder Masche ein Spannungsumlauf gemacht. Die Spannung an einem Widerstand ist gemäß Ohmschem Gesetz das Produkt aus dem Widerstand und dem in ihm fließenden Strom. Ist in einem Zweig eine Spannungsquelle eingebaut, dann ist die Spannung direkt bekannt und kann übernommen werden.

Um systematisch vorgehen zu können, beginne ich in jeder Masche mit dem Verbindungszweig, in dem ausschließlich der Maschenstrom fließt. Für Masche 1 ist das der Widerstand R_1 zwischen den Knoten **A** und **C**. Dann wird die Masche in der Stromrichtung des Maschenstromes durchlaufen. Durchläuft man eine Spannungsquelle **in** Pfeilrichtung, dann wird sie **positiv** gewertet, durchläuft man sie **entgegen** der Pfeilrichtung, wird sie **negativ** berücksichtigt.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Masche 1:} & R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot (I_1 - I_4) - U_{01} & = & 0 \\
\text{Masche 3:} & R_3 \cdot I_3 + U_{02} - U_{01} & = & 0 \\
\text{Masche 4:} & R_4 \cdot I_4 + R_6 \cdot (I_4 + I_5) + R_2 \cdot (I_4 - I_1) & = & 0 \\
\text{Masche 5:} & R_5 \cdot I_5 + R_6 \cdot (I_5 + I_4) - U_{02} & = & 0
\end{array}$$

Wir haben ein Lineargleichungssystem mit den Variablen I_1, I_3, I_4 und I_5 erhalten. Das kann mit einem beliebigen Lösungsverfahren[3] gelöst werden. Bevor wir die weitere Berechnung abbrechen, da es sich nur noch um ein mathematisches Problem handelt, wollen wir die nächsten Schritte an diesem Beispiel noch gemeinsam durchführen. Wir werden sehen, dass sich das lohnt.

Das Gleichungssystem wird in die Normalform gebracht. Dazu werden zunächst die Klammern ausmultipliziert und die Spannungen auf die andere Seite gebracht. Dann werden die Terme mit den Produkten aus Widerstand und Strom sortiert, so dass die Terme mit den gleichen Strömen zusammenkommen. Die Ströme werden dann ausgeklammert.

[3] Näheres zu den bekannten Lösungsverfahren ist hier zu finden:
http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot (I_1 - I_4) - U_{01} & = & 0 \\
(3) & R_3 \cdot I_3 + U_{02} - U_{01} & = & 0 \\
(4) & R_4 \cdot I_4 + R_6 \cdot (I_4 + I_5) + R_2 \cdot (I_4 - I_1) & = & 0 \\
(5) & R_5 \cdot I_5 + R_6 \cdot (I_5 + I_4) - U_{02} & = & 0 \\
\hline
(1) & R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_4 & = & U_{01} \\
(3) & R_3 \cdot I_3 & = & U_{01} - U_{02} \\
(4) & R_4 \cdot I_4 + R_6 \cdot I_4 + R_6 \cdot I_5 + R_2 \cdot I_4 - R_2 \cdot I_1 & = & 0 \\
(5) & R_5 \cdot I_5 + R_6 \cdot I_5 + R_6 \cdot I_4 & = & U_{02} \\
\hline
(1) & R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_4 & = & U_{01} \\
(3) & R_3 \cdot I_3 & = & U_{01} - U_{02} \\
(4) & -R_2 \cdot I_1 + R_4 \cdot I_4 + R_6 \cdot I_4 + R_2 \cdot I_4 + R_6 \cdot I_5 & = & 0 \\
(5) & R_6 \cdot I_4 + R_5 \cdot I_5 + R_6 \cdot I_5 & = & U_{02}
\end{array}$$

Nun werden die Ströme ausgeklammert und das ganze noch ein wenig formatiert, damit man das Ergebnis besser überblicken kann.

$$\boxed{\begin{array}{lccccrcl}
(1) & (R_1 + R_2) \cdot I_1 & & -R_2 \cdot I_4 & & & = & U_{01} \\
(3) & & R_3 \cdot I_3 & & & & = & U_{01} - U_{02} \\
(4) & -R_2 \cdot I_1 & & +(R_4 + R_6 + R_2) \cdot I_4 & & +R_6 \cdot I_5 & = & 0 \\
(5) & & & R_6 \cdot I_4 & & +(R_5 + R_6) \cdot I_5 & = & U_{02}
\end{array}}$$

Gleichung (1) gehört zur Masche 1, der zugehörige Maschenstrom heißt I_1. Der Faktor vor I_1 in dieser Gleichung enthält die Summe $(R_1 + R_2)$. Ein Blick in die Schaltung zeigt, dass das genau die Widerstände sind, durch die der Maschenstrom verläuft. Zufall? Prüfen wir das mit den anderen Maschen.

In Masche (3) läuft der Maschenstrom nur durch den Widerstand R_3. Entsprechend steht auch nur R_3 als Vorfaktor vor I_3. Der Maschenstrom I_4 in Masche (4) fließt durch die Widerstände R_4, R_6 und R_2, entsprechend stehen auch diese drei Widerstände als Vorfaktor vor I_4. Und auch in Masche (5) ist es ähnlich, der Maschenstrom I_5 fließt durch die Widerstände R_5 und R_6. In der Maschengleichung (5) sind auch hier genau diese Widerstände im Vorfaktor von I_5 enthalten.

Sehen wir uns nun die Ströme in den Maschengleichungen an, die **nicht** den jeweiligen Maschenstrom darstellen. In Maschengleichung (1) ist das der Strom I_4. Er hat den Vorfaktor R_2, und zwar mit einem Minuszeichen. In der Schaltung ist das der Widerstand, in dem der Strom I_4 zusammen mit dem Maschenstrom I_1 fließt. Er kommt I_1 **entgegen**, das spiegelt sich in dem **Minuszeichen** wieder. Wir prüfen auch hier, ob das in allen Maschen so ist.

In Maschengleichung (3) kommt kein anderer Strom als der Maschenstrom I_3 vor. In der Schaltung ist erkennbar, dass kein anderer Strom durch einen Widerstand der Masche fließt. Zwar fließen die Ströme I_1 und I_5 mit durch die Spannungsquellen U_{01} und U_{02}, an Spannungsquellen ist jedoch die Spannung stromunabhängig konstant; daher haben diese Ströme hier keinen Einfluss und kommen in der Gleichung nicht vor.

In Masche (4) sind es gleich zwei Ströme, die mit durch Widerstände der Masche fließen. In R_2 ist es der Strom I_1, der dem Maschenstrom I_4 **entgegen** kommt. Passend dazu gibt es in der Gleichung ein **Minuszeichen** vor dem Produkt $R_2 \cdot I_1$. Der Strom I_5, der zusammen mit dem Maschenstrom I_4 durch den Widerstand R_6 fließt, hat die **gleiche** Richtung wie I_4. Darum steht in der Gleichung ein **Pluszeichen** vor dem Produkt $R_6 \cdot I_5$. Der „Fremdstrom", der Masche (5) beeinflusst, ist I_4 in R_6. Er hat die gleiche Richtung, wie der Maschenstrom I_5. Entsprechend steht ein (unsichtbares) Pluszeichen in der Maschengleichung (5) vor dem Produkt $R_6 \cdot I_4$.

Damit wäre der Aufbau der linken Seiten der Maschengleichungen (hoffentlich) ausreichend geklärt. Was steht dann auf den rechten Seiten der Gleichungen?

In allen Maschengleichungen stehen dort ausschließlich die Spannungen der betroffenen Spannungsquellen. In Maschengleichung (1) steht dort U_{01}. Das ist die Spannung der Spannungsquelle, durch die der Maschenstrom I_1 fließt. Allerdings verläuft der Maschenstrom I_1 **entgegen** dem Pfeil der Spannungsquelle U_{01}. Offenbar bedeutet das **Pluszeichen** hier eine **gegensinnige** Richtung von Spannung und Strom. Wir prüfen, ob das in den anderen Maschengleichungen auch so ist.

In Maschengleichung (3) steht dort $U_{01} - U_{02}$. Der Maschenstrom I_3 fließt durch diese beiden Spannungsquellen. U_{02} hat die **gleiche** Richtung, wie der Maschenstrom I_3, U_{01} läuft ihm entgegen. Daher ist in der Maschengleichung (3) U_{02} **negativ** und U_{01} **positiv** enthalten. In Masche (4) verläuft der Maschenstrom I_4 durch **keine** Spannungsquelle, darum steht in der zugehörigen Maschengleichung eine 0 auf der rechten Gleichungsseite. Auch Gleichung (5) bestätigt unsere Vermutung. In Masche (5) läuft der Maschenstrom I_5 **entgegen** der Pfeilrichtung durch U_{02}, diese Spannung steht **positiv** in der Maschengleichung.

6.3 Zusammenfassung: Aufbau der Maschengleichungen

Fassen wir noch einmal rezeptartig zusammen, wie man die Maschengleichungen aufstellen kann.

- Sind in dem Netzwerk Stromquellen enthalten, müssen diese zunächst in Spannungsquellen umgewandelt werden.
- Dann legt man einen „Vollständigen Baum" im Netzwerk fest. Er verbindet jeden Knoten mit jedem anderen Knoten auf einem eindeutigen Weg ohne Schleifenbildung. Es ist zweckmäßig, den Baum durch vorhandene Spannungsquellen zu legen. Weiterhin sollte der Baum möglichst kurze „Äste" enthalten.

- Jeder Verbindungszweig – das sind alle Zweige, die nicht in dem Vollständigen Baum enthalten sind – ergibt jeweils eine Masche, die mit Ausnahme des Verbindungszweiges komplett im Vollständigen Baum verläuft. Der zugehörige Maschenstrom ist der Strom in dem jeweiligen Verbindungszweig.
- Zu jeder Masche gehört eine Maschengleichung. Ihr Aufbau sieht wie folgt aus:
  - Auf der linken Seite der Gleichung stehen lauter Produkte aus Widerständen mit einem Strom. Diese Produkte werden folgendermaßen aufgestellt:
    * Der **Maschenstrom**[4] wird mit der **positiven Summe aller Widerstände dieser Masche** multipliziert.
    * Jeder andere Strom, der durch einen oder mehrere Widerstände dieser Masche fließt, wird mit der Summe dieser Widerstände multipliziert. Fließt er in der **gleichen** Richtung, wie der Maschenstrom, wird das Produkt **addiert**, kommt er **entgegen**, dann wird es **subtrahiert**.
  - Auf der rechten Seite der Gleichungen stehen die Spannungen aller Spannungsquellen der Masche. Bei **gegensinniger** Richtung von Maschenstrom und Spannung wird die Spannung **positiv** eingetragen, bei **gleicher** Richtung **negativ**.

6.4 Lösung des Lineargleichungssystems

Nun wollen wir das Gleichungssystem auch lösen. Zunächst werden die konkreten Werte eingesetzt.

$$
\begin{array}{lrrrrcl}
(1) & (R_1+R_2)\cdot I_1 & & -R_2\cdot I_4 & & = & U_{01} \\
(3) & & R_3\cdot I_3 & & & = & U_{01}-U_{02} \\
(4) & -R_2\cdot I_1 & & +(R_4+R_6+R_2)\cdot I_4 & +R_6\cdot I_5 & = & 0 \\
(5) & & & R_6\cdot I_4 & +(R_5+R_6)\cdot I_5 & = & U_{02} \\
\hline
(1) & 500\,\Omega\cdot I_1 & & -400\,\Omega\cdot I_4 & & = & 10\,\mathrm{V} \\
(3) & & 200\,\Omega\cdot I_3 & & & = & 5\,\mathrm{V} \\
(4) & -400\,\Omega\cdot I_1 & & +464\,\Omega\cdot I_4 & +20\,\Omega\cdot I_5 & = & 0 \\
(5) & & & 20\,\Omega\cdot I_4 & +100\,\Omega\cdot I_5 & = & 5\,\mathrm{V} \\
\hline
\end{array}
$$

Aus Gleichung (3) kann sofort I_3 bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
200\,\Omega\cdot I_3 &= 5\,\mathrm{V} \qquad |:200\,\Omega \\
I_3 &= \frac{5\,\mathrm{V}}{200\,\Omega} \\
I_3 &= 25\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

[4]Der Maschenstrom ist der Strom, der komplett in dieser Masche fließt und der Masche ihren Namen gibt.

Übrig bleiben jetzt noch die Gleichungen (1), (4) und (5).

(1)	$500\,\Omega \cdot I_1$	$-400\,\Omega \cdot I_4$		$=$	$10\,\mathrm{V}$
(4)	$-400\,\Omega \cdot I_1$	$+464\,\Omega \cdot I_4$	$+20\,\Omega \cdot I_5$	$=$	0
(5)		$20\,\Omega \cdot I_4$	$+100\,\Omega \cdot I_5$	$=$	$5\,\mathrm{V}$

Dieses Gleichungssystem kann mit einem beliebigen Verfahren gelöst werden. Ich wähle zur Lösung die Cramersche Regel[5] aus.

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10\,\mathrm{V} & -400\,\Omega & 0 \\ 0 & 464\,\Omega & 20\,\Omega \\ 5\,\mathrm{V} & 20\,\Omega & 100\,\Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 500\,\Omega & -400\,\Omega & 0 \\ -400\,\Omega & 464\,\Omega & 20\,\Omega \\ 0 & 20\,\Omega & 100\,\Omega \end{vmatrix}} = \frac{464\,000\,\mathrm{V}\Omega^2 - 40\,000\,\mathrm{V}\Omega^2 - 4\,000\,\mathrm{V}\Omega^2}{23\,200\,000\,\Omega^3 - 200\,000\,\Omega^3 - 16\,000\,000\,\Omega^3} = 60\,\mathrm{mA}$$

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} 500\,\Omega & 10\,\mathrm{V} & 0 \\ -400\,\Omega & 0 & 20\,\Omega \\ 0 & 5\,\mathrm{V} & 100\,\Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 500\,\Omega & -400\,\Omega & 0 \\ -400\,\Omega & 464\,\Omega & 20\,\Omega \\ 0 & 20\,\Omega & 100\,\Omega \end{vmatrix}} = \frac{-\,50\,000\,\mathrm{V}\Omega^2 + 400\,000\,\mathrm{V}\Omega^2}{23\,200\,000\,\Omega^3 - 200\,000\,\Omega^3 - 16\,000\,000\,\Omega^3} = 50\,\mathrm{mA}$$

Das Ergebniss für I_4 setze ich in Gleichung (5) ein, um I_5 zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 20\,\Omega \cdot I_4 + 100\,\Omega \cdot I_5 &= 5\,\mathrm{V} \\ 20\,\Omega \cdot 50\,\mathrm{mA} + 100\,\Omega \cdot I_5 &= 5\,\mathrm{V} \\ 1\,\mathrm{V} + 100\,\Omega \cdot I_5 &= 5\,\mathrm{V} \qquad |-1\,\mathrm{V} \\ 100\,\Omega \cdot I_5 &= 4\,\mathrm{V} \qquad |:100\,\Omega \\ I_5 &= 40\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

Mit diesen vier Maschenströmen können die übrigen Ströme leicht berechnet werden. Man muss nur im Plan mit dem Vollständigen Baum nachsehen, welche Maschenströme in welchem Zweig fließen. In R_2 ist das $I_1 - I_4$ und in R_6 $I_4 + I_5$. Ferner ist der Strom $I_{01} = I_1 + I_3$ und der Strom $I_{02} = I_5 - I_3$.

$$I_2 = I_1 - I_4 = 60\,\mathrm{mA} - 50\,\mathrm{mA} = 10\,\mathrm{mA}$$

$$I_6 = I_4 + I_5 = 50\,\mathrm{mA} + 40\,\mathrm{mA} = 90\,\mathrm{mA}$$

$$I_{01} = I_1 + I_3 = 60\,\mathrm{mA} + 25\,\mathrm{mA} = 85\,\mathrm{mA}$$

$$I_{02} = I_5 - I_3 = 40\,\mathrm{mA} - 25\,\mathrm{mA} = 15\,\mathrm{mA}$$

[5] Näheres zur Cramerschen Regel siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf

Damit sind alle Ströme in dem Netzwerk bekannt. Natürlich sind die Werte mit denen in der Musterlösung identisch, in der mit anderen Methoden gerechnet wurde. Diese Musterlösung ist hier zu finden:

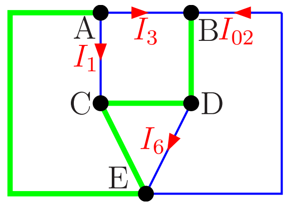
http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/netzw_l.pdf

Wenn auch die Spannungen gesucht sind, dann kann jede Spannung mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes am jeweiligen Widerstand bestimmt werden. Das möchte ich aber nicht mehr im Detail vorrechnen.

6.5 Alternative Lösung des Beispiels

Wie schon erwähnt, gibt es verschiedene Möglichkeiten, den Vollständigen Baum festzulegen. Dabei gilt der Tipp:

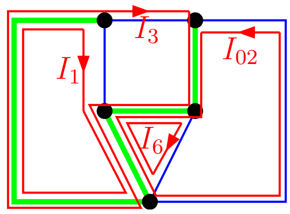
> **Es ist zweckmäßig, den Baum durch vorhandene Spannungsquellen zu legen. Weiterhin sollte der Baum möglichst kurze „Äste“ enthalten.**



Ungünstiger Baum

Um zu zeigen, warum das sinnvoll ist, möchte ich in dieser alternativen Lösung einen Baum wählen, der **nicht** dieser Empfehlung genügt. Ansonsten erfüllt der dargestellte Baum die Forderung, dass alle Knoten auf einem einzigen eindeutigen Weg ohne Schleifenbildung miteinander verbunden sind.

Mit diesem Baum sind die Ströme I_1, I_3, I_6 und I_{02} die Maschenströme. Diese Ströme müssen vereinbarungsgemäß den Rückweg ausschließlich über den Baum nehmen. Rechts sind die sich daraus ergebenden Maschenströme dargestellt. Schon beim flüchtigen Blick erkennt man, dass viel mehr Linien entstanden sind, als beim ursprünglichen Vollständigen Baum. Beispielsweise laufen durch R_2 alle vier Maschenströme!



Maschenströme im ungünstigen Baum

Stellen wir nun das Gleichungssystem auf, das sich aus diesen Maschen ergibt. Ich bilde die Maschengleichungen sofort so, wie wir es in unserem „Lösungsrezept“ dargestellt haben.

$$\boxed{\begin{array}{rrrrcl}
(R_1+R_2)I_1 & +R_2I_3 & -R_2I_6 & +R_2I_{02} & = & U_{01}\\
R_2I_1 & +(R_3+R_5+R_4+R_2)I_3 & -R_2I_6 & +R_2I_{02} & = & U_{01}\\
-R_2I_1 & -(R_4+R_2)I_3 & +(R_4+R_6+R_2)I_6 & -(R_4+R_2)I_{02} & = & 0\\
R_2I_1 & (R_5+R_4+R_2)I_3 & -(R_4+R_2)I_6 & +(R_6+R_4+R_2)I_{02} & = & U_{02}
\end{array}}$$

Man erkennt sofort, dass in **jeder** Gleichung **alle** Variablen vorkommen. Daher ist dieses Gleichungssystem sicherlich nicht so bequem zu lösen, wie das Gleichungssystem, wie wir es zu Anfang gewählt haben. Für dieses Beispiel möchte ich das Gleichungssystem nicht ausrecchnen, man sieht auch so, dass es aufwendig wird.

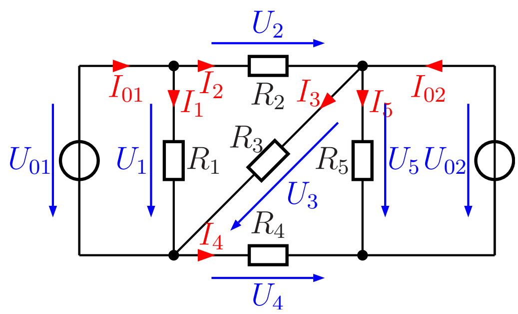
Man erkennt also, dass die Wahl eines günstigen Vollständigen Baumes einen großen Einfluss darauf hat, wie einfach oder kompliziert das zu lösende Gleichungssystem aufgebaut ist. Es lohnt sich also, bei der Wahl eines geeigneten Baumes sorgfältig vorzugehen. Allerdings kommt man in **jedem** Fall zu einer Lösung.

6.6 Zweites Beispiel

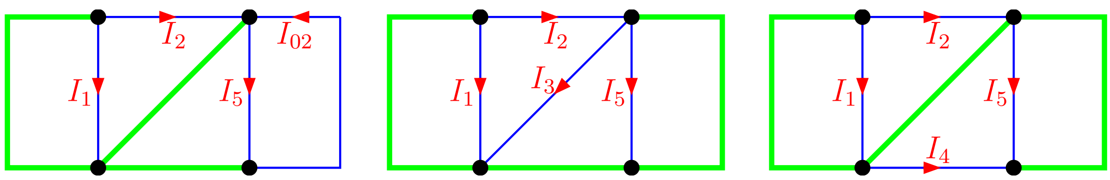
Da das Maschenstromverfahren doch einige Übung in der Anwendung erfordert, wollen wir es an Aufgabe 8 aus dem vorangegangenen Kapitel noch einmal gemeinsam durchgehen. Hier zunächst die Aufgabenstellung:

Alle Ströme dieses Netzwerkes sollen bestimmt werden. Gegeben sind folgende Werte:

$U_{01} = 16\,\mathrm{V}$
$U_{02} = 24\,\mathrm{V}$
$R_1 = 400\,\Omega$
$R_2 = 200\,\Omega$
$R_3 = 300\,\Omega$
$R_4 = 200\,\Omega$
$R_5 = 120\,\Omega$



Als erstes muss immer ein Vollständiger Baum erstellt werden. Hierfür gibt es natürlich – wie immer – mehrere Möglichkeiten. Drei Varianten sind nachfolgend dargestellt.

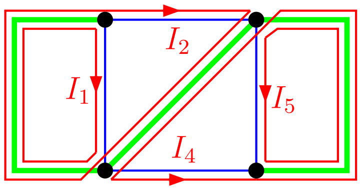


Überlegen Sie bitte zunächst, welche der drei Varianten zulässig und welche sinnvoll sind, bevor Sie weiterblättern.

Ergebnis 1: Zulässig sind alle Varianten. Der Baum hat keine Schleifen und jeder Knoten wird erreicht.

Ergebnis 2: Variante 1 ist nicht sinnvoll, da der Baum nicht durch alle Spannungsquellen verläuft. Die beiden anderen Varianten sind vermutlich gleichwertig.

Ich wähle für die weitere Lösung willkürlich Variante 3 aus. Damit ergeben sich nebenstehend eingezeichnete Maschen und Maschenströme.



Genau so gut hätte man auch Variante 2 wählen können, mit der sich dann andere Maschenströme ergeben hätten. Genauso, wie bei der vorgestellten Variante 3 wären auch in Variante 2 in keinem Widerstand mehr als zwei Maschenströme vorhanden.

Stellen Sie bitte zunächst selbst die Maschengleichungen auf, bevor Sie weiterblättern!

Hier sind die Maschengleichungen:

$$\boxed{\begin{array}{llllcl} (1) & R_1 \cdot I_1 & & & = & U_{01} \\ (2) & & (R_2+R_3)\cdot I_2 & +R_3 \cdot I_4 & = & U_{01} \\ (4) & & R_3 \cdot I_2 & +(R_3+R_4)\cdot I_4 & = & U_{02} \\ (5) & & & \qquad R_5 \cdot I_5 & = & U_{02} \end{array}}$$

Wenn Sie mit dem selben Vollständigen Baum gearbeitet haben, dann müssen Sie auf das selbe Gleichungssystem gekommen sein.

Nun setzen wir die gegebenen Werte ein, um das Gleichungssystem zu lösen.

$$\boxed{\begin{array}{llllcl} (1) & 400\,\Omega \cdot I_1 & & & = & 16\,\mathrm{V} \\ (2) & & 500\,\Omega \cdot I_2 & +300\,\Omega \cdot I_4 & = & 16\,\mathrm{V} \\ (4) & & 300\,\Omega \cdot I_2 & +500\,\Omega \cdot I_4 & = & 24\,\mathrm{V} \\ (5) & & & \qquad 120\,\Omega \cdot I_5 & = & 24\,\mathrm{V} \end{array}}$$

Aus Gleichung (1) kann sofort I_1 und aus Gleichung (5) I_5 bestimmt werden.

$$\begin{array}{rcll} 400\,\Omega \cdot I_1 & = & 16\,\mathrm{V} & |:400\,\Omega \\ I_1 & = & 40\,\mathrm{mA} & \\ & & & \\ 120\,\Omega \cdot I_5 & = & 24\,\mathrm{V} & |:120\,\Omega \\ I_5 & = & 200\,\mathrm{mA} & \end{array}$$

Übrig bleibt ein Gleichungssystem 2. Ordnung.

$$\boxed{\begin{array}{lllcl} (2) & 500\,\Omega \cdot I_2 & +300\,\Omega \cdot I_4 & = & 16\,\mathrm{V} \\ (4) & 300\,\Omega \cdot I_2 & +500\,\Omega \cdot I_4 & = & 24\,\mathrm{V} \end{array}}$$

Zur Lösung möchte ich das Additions/Subtraktionsverfahren[6] verwenden.

$$\begin{array}{lrrcll} (2) & 500\,\Omega \cdot I_2 & +300\,\Omega \cdot I_4 & = & 16\,\mathrm{V} & |\cdot 3 \\ (4) & 300\,\Omega \cdot I_2 & +500\,\Omega \cdot I_4 & = & 24\,\mathrm{V} & |\cdot 5 \\ \hline (2) & 1500\,\Omega \cdot I_2 & +900\,\Omega \cdot I_4 & = & 48\,\mathrm{V} & |- \\ (4) & 1500\,\Omega \cdot I_2 & +2500\,\Omega \cdot I_4 & = & 120\,\mathrm{V} & | \\ \hline & & 1600\,\Omega \cdot I_4 & = & 72\,\mathrm{V} & |:1600\,\Omega \\ & & I_4 & = & 45\,\mathrm{mA} & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (2) eingesetzt um I_2 zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcll} 500\,\Omega \cdot I_2 + 300\,\Omega \cdot I_4 & = & 16\,\mathrm{V} & \\ 500\,\Omega \cdot I_2 + 300\,\Omega \cdot 45\,\mathrm{mA} & = & 16\,\mathrm{V} & \\ 500\,\Omega \cdot I_2 + 13,5\,\mathrm{V} & = & 16\,\mathrm{V} & |-13,5\,\mathrm{V} \\ 500\,\Omega \cdot I_2 & = & 2,5\,\mathrm{V} & |:500\,\Omega \\ I_2 & = & 5\,\mathrm{mA} & \end{array}$$

[6]Näheres zum Additions-/Subtraktionsverfahren siehe hier:
http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf

Der Strom I_3 ergibt sich aus den Maschenströmen im Vollständigen Baum:

$$I_3 = I_2 + I_4 = 5\,\mathrm{mA} + 45\,\mathrm{mA} = 50\,\mathrm{mA}$$

Ebenso können die Ströme I_{01} und I_{02} bestimmt werden.

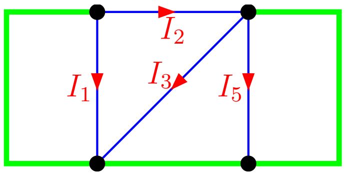
$$I_{01} = I_1 + I_2 = 40\,\mathrm{mA} + 5\,\mathrm{mA} = 45\,\mathrm{mA}$$

$$I_{02} = I_4 + I_5 = 45\,\mathrm{mA} + 200\,\mathrm{mA} = 245\,\mathrm{mA}$$

Damit wären alle Ströme bestimmt.

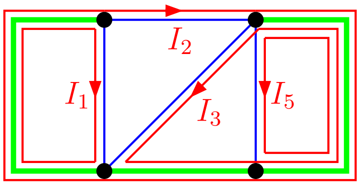
6.7 Alternative Lösung zu Beispiel 2

Zu Übungszwecken kann es nicht schaden, wenn wir auch zur Baum-Variante 2 aus vorangehender Beispielaufgabe eine Lösung vornehmen. Nebenstehend ist sie noch einmal dargestellt.



Bitte skizzieren Sie die Maschen und tragen Sie die Maschenströme ein, bevor Sie nun weiterblättern.

Hier sehen Sie die Maschen und die Maschenströme mit dem angegebenen Baum. Stimmt Ihre Lösung damit überein? Wenn nein, ist darin ein Fehler enthalten, denn es gibt mit dem vorgegebenen Baum nur eine einzige eindeutige Struktur der Maschenströme.



Stellen Sie nun die Maschengleichungen auf. Blättern Sie erst weiter, wenn Sie alle vier Gleichungen aufgestellt haben!

Sie sollten nun folgende Maschengleichungen erhalten haben:

$$\boxed{\begin{array}{lllllcl}
(1) & R_1 \cdot I_1 & & & & = & U_{01} \\
(2) & & (R_2 + R_4) \cdot I_2 & -R_4 \cdot I_3 & & = & U_{01} - U_{02} \\
(3) & & -R_4 \cdot I_2 & +(R_3 + R_4) \cdot I_3 & & = & U_{02} \\
(5) & & & & R_5 \cdot I_5 & = & U_{02}
\end{array}}$$

Um das Gleichungssystem lösen zu können, setzen wir die gegebenen Größen in die Maschengleichungen ein.

$$\boxed{\begin{array}{lrrrrcr}
(1) & 400\,\Omega \cdot I_1 & & & & = & 16\,\mathrm{V} \\
(2) & & 400\,\Omega \cdot I_2 & -200\,\Omega \cdot I_3 & & = & -8\,\mathrm{V} \\
(3) & & -200\,\Omega \cdot I_2 & +500\,\Omega \cdot I_3 & & = & 24\,\mathrm{V} \\
(5) & & & & 120\,\Omega \cdot I_5 & = & 24\,\mathrm{V}
\end{array}}$$

Aus Gleichung (1) kann sofort I_1 und aus Gleichung (5) I_5 bestimmt werden. (Diese Gleichungen sind sogar identisch mit denen aus dem ersten Lösungsansatz.)

$$\begin{array}{rcll}
400\,\Omega \cdot I_1 & = & 16\,\mathrm{V} & |:400\,\Omega \\
I_1 & = & 40\,\mathrm{mA} & \\
 & & & \\
120\,\Omega \cdot I_5 & = & 24\,\mathrm{V} & |:120\,\Omega \\
I_5 & = & 200\,\mathrm{mA} &
\end{array}$$

Übrig bleibt ein Gleichungssystem 2. Ordnung.

$$\boxed{\begin{array}{lrrcr}
(2) & 400\,\Omega \cdot I_2 & -200\,\Omega \cdot I_3 & = & -8\,\mathrm{V} \\
(3) & -200\,\Omega \cdot I_2 & +500\,\Omega \cdot I_3 & = & 24\,\mathrm{V}
\end{array}}$$

Dieses Gleichungssystem möchte ich wieder mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren lösen.

$$\begin{array}{lrrcll}
(2) & 400\,\Omega \cdot I_2 & -200\,\Omega \cdot I_3 & = & -8\,\mathrm{V} & \\
(3) & -200\,\Omega \cdot I_2 & +500\,\Omega \cdot I_3 & = & 24\,\mathrm{V} & |\cdot 2 \\
\hline
(2) & 400\,\Omega \cdot I_2 & -200\,\Omega \cdot I_3 & = & -8\,\mathrm{V} & | \\
(3) & -400\,\Omega \cdot I_2 & +1000\,\Omega \cdot I_3 & = & 48\,\mathrm{V} & |+ \\
\hline
 & & 800\,\Omega \cdot I_3 & = & 40\,\mathrm{V} & |:800\,\Omega \\
 & & I_3 & = & 50\,\mathrm{mA} &
\end{array}$$

Den Strom I_2 bestimmen wir durch Einsetzen des Ergebnisses in Gleichung (2).

$$\begin{array}{rcll}
400\,\Omega \cdot I_2 - 200\,\Omega \cdot I_3 & = & -8\,\mathrm{V} & \\
400\,\Omega \cdot I_2 - 200\,\Omega \cdot 50\,\mathrm{mA} & = & -8\,\mathrm{V} & \\
400\,\Omega \cdot I_2 - 10\,\mathrm{V} & = & -8\,\mathrm{V} & |+10\,\mathrm{V} \\
400\,\Omega \cdot I_2 & = & 2\,\mathrm{V} & |:400\,\Omega \\
I_2 & = & 5\,\mathrm{mA} &
\end{array}$$

Der Strom I_4 ergibt sich aus den Maschenströmen im Vollständigen Baum:

$$I_4 = I_3 - I_2 = 45\,\mathrm{mA} - 5\,\mathrm{mA} = 40\,\mathrm{mA}$$

Ebenso können die Ströme I_{01} und I_{02} bestimmt werden.

$$I_{01} = I_1 + I_2 = 40\,\mathrm{mA} + 5\,\mathrm{mA} = 45\,\mathrm{mA}$$

$$I_{02} = I_3 + I_5 - I_2 = 50\,\mathrm{mA} + 200\,\mathrm{mA} - 5\,\mathrm{mA} = 245\,\mathrm{mA}$$

Damit wären alle Ströme bestimmt.

Wenn wir die beiden vorgestellten Lösungswege vergleichen, dann erkennt man wohl, dass sie etwa gleichwertig sind, was den Lösungsaufwand betrifft.

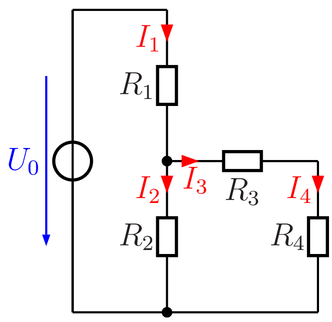
6.8 Übungsaufgaben zum Maschenstromverfahren

Nachfolgend sind einige Übungsaufgaben angegeben. Natürlich können die Aufgaben mit jedem beliebigen Verfahren gelöst werden, jedoch wollen wir mit diesen Übungsaufgaben die Anwendung des Maschenstromverfahrens üben. Die ersten beiden dieser Aufgaben haben wir weiter vorn schon mit anderen Verfahren gelöst.
Zur Erinnerung – Hier sind die Lösungen zu finden:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/netzw_l.pdf

6.8.1 Aufgabe 15

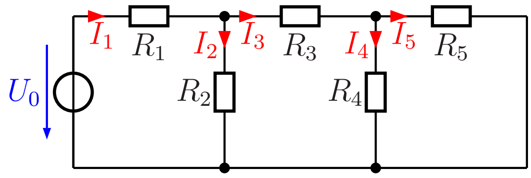
Bestimmen Sie alle Ströme in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dazu das Maschenstromverfahren. Legen Sie zunächst einen geeigneten Vollständigen Baum fest, bevor Sie mit der Rechnung beginnen.



$U_0 = 20\,\mathrm{V}$
$R_1 = 5\,\mathrm{k\Omega}$
$R_2 = 5\,\mathrm{k\Omega}$
$R_3 = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$
$R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$

6.8.2 Aufgabe 16

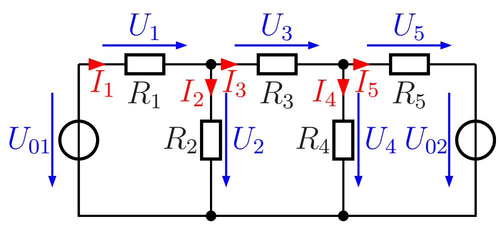
Bestimmen Sie alle Ströme in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dazu das Maschenstromverfahren. Legen Sie zunächst einen geeigneten Vollständigen Baum fest, bevor Sie mit der Rechnung beginnen.



$U_0 = 12\,\mathrm{V}$
$R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}$
$R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$R_3 = 3,1\,\mathrm{k\Omega}$
$R_4 = 9\,\mathrm{k\Omega}$
$R_5 = 1\,\mathrm{k\Omega}$

6.8.3 Aufgabe 17

Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen in nebenstehender Schaltung!

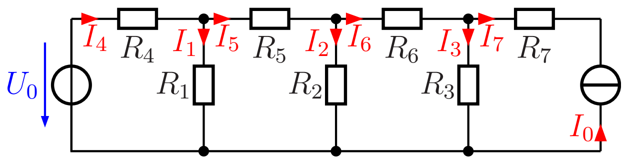


Gegeben sind folgende Werte:

$U_{01} = 20\,\mathrm{V}$ $\quad U_{02} = 10\,\mathrm{V}$
$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_2 = 3\,\mathrm{k\Omega}$
$R_3 = 400\,\Omega$ $\quad R_4 = 500\,\Omega$
$R_5 = 2\,\mathrm{k\Omega}$

6.8.4 Aufgabe 18

Bestimmen Sie alle Ströme in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dazu das Maschenstromverfahren. Legen Sie zunächst einen geeigneten Vollständigen Baum fest, bevor Sie mit der Rechnung beginnen.

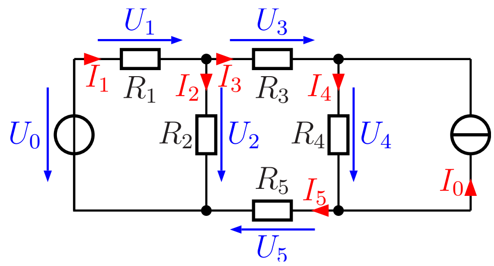


Ein Tipp: Wandeln Sie die Stromquelle vorher in eine Spannungsquelle um!

$$\begin{array}{lll lll lll lll lll}
U_0 & = & 12\,\mathrm{V} & I_0 & = & 20\,\mathrm{mA} & R_1 & = & 1{,}4\,\mathrm{k\Omega} & R_2 & = & 4\,\mathrm{k\Omega} & R_3 & = & 1\,\mathrm{k\Omega} \\
R_4 & = & 1{,}25\,\mathrm{k\Omega} & R_5 & = & 1\,\mathrm{k\Omega} & R_6 & = & 3\,\mathrm{k\Omega} & R_7 & = & 2\,\mathrm{k\Omega} & & &
\end{array}$$

6.8.5 Aufgabe 19

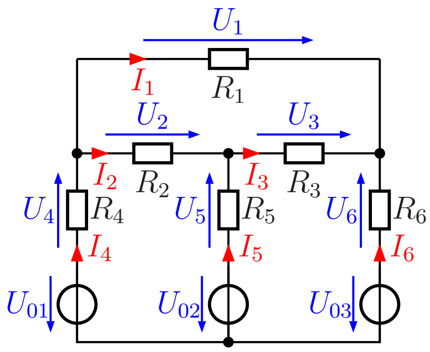
Bestimmen Sie alle Ströme und Spannungen in nebenstehender Schaltung!



Gegeben sind folgende Werte:
$U_0 = 20\,\mathrm{V}$ $\quad I_0 = 10\,\mathrm{mA}$
$R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_2 = 5\,\mathrm{k\Omega}$
$R_3 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_4 = 2\,\mathrm{k\Omega}$
$R_5 = 8\,\mathrm{k\Omega}$

6.8.6 Aufgabe 20

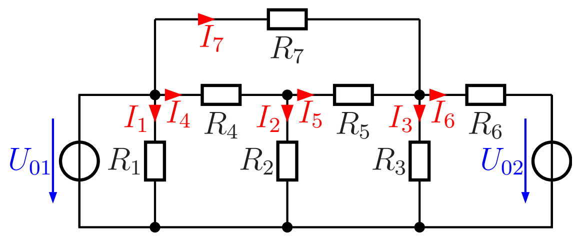
Bestimmen Sie alle Ströme in nebenstehender Schaltung!



Gegeben sind folgende Werte:
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_4 = 400\,\Omega$
$R_5 = 1{,}25\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_6 = 1\,\mathrm{k\Omega}$
$U_{01} = 10\,\mathrm{V}$ $\quad U_{02} = 20\,\mathrm{V}$
$U_{03} = 15\,\mathrm{V}$

6.8.7 Aufgabe 21

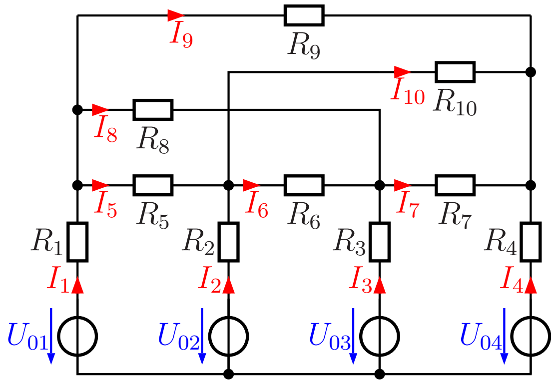
Bestimmen Sie alle Ströme in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dazu das Maschenstromverfahren. Legen Sie zunächst einen geeigneten Vollständigen Baum fest, bevor Sie mit der Rechnung beginnen.



$U_{01} = 12\,\mathrm{V}$ $\quad R_1 = 200\,\Omega$ $\quad R_3 = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_5 = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_7 = 3\,\mathrm{k\Omega}$
$U_{02} = 18\,\mathrm{V}$ $\quad R_2 = 300\,\Omega$ $\quad R_4 = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_6 = 1\,\mathrm{k\Omega}$

6.8.8 Aufgabe 22

Bestimmen Sie alle Ströme in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dazu das Maschenstromverfahren. Legen Sie zunächst einen geeigneten Vollständigen Baum fest, bevor Sie mit der Rechnung beginnen.

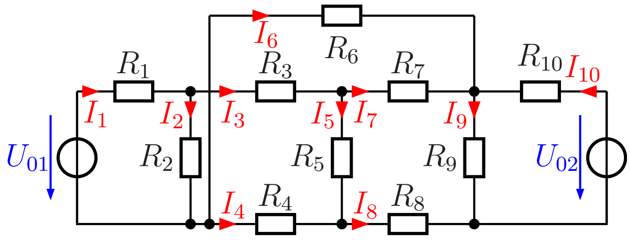


Bekannt sind folgende Werte:

$$
\begin{array}{lcllcllcllcl}
U_{01} & = & 15\,\mathrm{V} & U_{02} & = & 18\,\mathrm{V} & U_{03} & = & 10\,\mathrm{V} & U_{04} & = & 4\,\mathrm{V} \\
R_1 & = & 750\,\Omega & R_2 & = & 1\,\mathrm{k}\Omega & R_3 & = & 1\,\mathrm{k}\Omega & R_4 & = & 250\,\Omega \\
R_5 & = & 2\,\mathrm{k}\Omega & R_6 & = & 4\,\mathrm{k}\Omega & R_7 & = & 200\,\Omega & R_8 & = & 2\,\mathrm{k}\Omega \\
R_9 & = & 2{,}5\,\mathrm{k}\Omega & R_{10} & = & 1\,\mathrm{k}\Omega & & & & & &
\end{array}
$$

6.8.9 Aufgabe 23

Bestimmen Sie alle Ströme in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dazu das Maschenstromverfahren. Legen Sie zunächst einen geeigneten Vollständigen Baum fest, bevor Sie mit der Rechnung beginnen.



Bekannt sind folgende Werte:

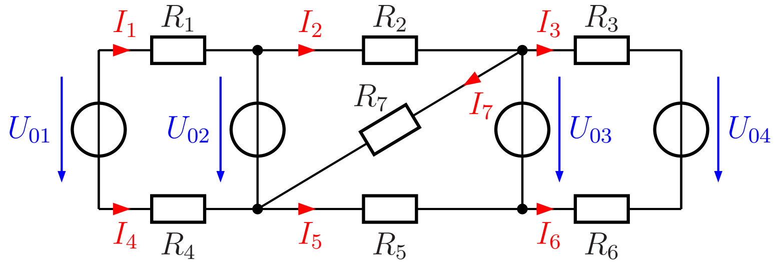
$$
\begin{array}{lcllcllcllcl}
U_{01} & = & 15\,\mathrm{V} & U_{02} & = & 20\,\mathrm{V} & R_1 & = & 1\,\mathrm{k}\Omega & R_2 & = & 13\,\mathrm{k}\Omega \\
R_3 & = & 3\,\mathrm{k}\Omega & R_4 & = & 1\,\mathrm{k}\Omega & R_5 & = & 11\,\mathrm{k}\Omega & R_6 & = & 5\,\mathrm{k}\Omega \\
R_7 & = & 10\,\mathrm{k}\Omega & R_8 & = & 500\,\Omega & R_9 & = & 2\,\mathrm{k}\Omega & R_{10} & = & 1\,\mathrm{k}\Omega
\end{array}
$$

7 Gemischte Aufgaben

7.1 Berechnung der Ströme

7.1.1 Aufgabe 24

Bestimmen Sie die Ströme I_1 bis I_7 in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dazu ein beliebiges Lösungsverfahren.

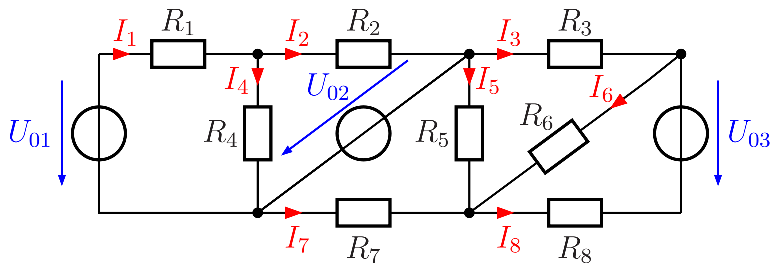


Bekannt sind folgende Werte:

$U_{01} = 7\,\mathrm{V}$	$U_{02} = 4\,\mathrm{V}$	$U_{03} = 9\,\mathrm{V}$	$U_{04} = 15\,\mathrm{V}$
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$	$R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$	$R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$	$R_4 = 500\,\Omega$
$R_5 = 600\,\Omega$	$R_6 = 1\,\mathrm{k\Omega}$	$R_7 = 2\,\mathrm{k\Omega}$	

7.1.2 Aufgabe 25

Bestimmen Sie die Ströme I_1 bis I_8 in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dazu ein beliebiges Lösungsverfahren.

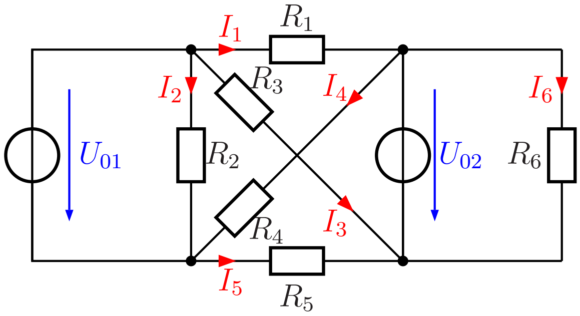


Bekannt sind folgende Werte:

$U_{01} = 8\,\mathrm{V}$	$U_{02} = 5\,\mathrm{V}$	$U_{03} = 6\,\mathrm{V}$	
$R_1 = 500\,\Omega$	$R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$	$R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$	$R_4 = 2\,\mathrm{k\Omega}$
$R_5 = 3\,\mathrm{k\Omega}$	$R_6 = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$	$R_7 = 2\,\mathrm{k\Omega}$	$R_8 = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$

7.1.3 Aufgabe 26

Bestimmen Sie die Ströme I_1 bis I_6 in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dazu ein beliebiges Lösungsverfahren.

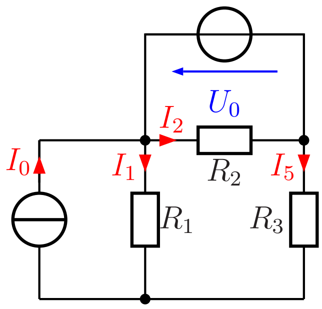


Bekannt sind folgende Werte:

U_{01}	$=$	$8\,\mathrm{V}$	U_{02}	$=$	$4\,\mathrm{V}$			
R_1	$=$	$2\,\mathrm{k\Omega}$	R_2	$=$	$4\,\mathrm{k\Omega}$	R_3	$=$	$6\,\mathrm{k\Omega}$
R_4	$=$	$6\,\mathrm{k\Omega}$	R_5	$=$	$2\,\mathrm{k\Omega}$	R_6	$=$	$8\,\mathrm{k\Omega}$

7.1.4 Aufgabe 27

Bestimmen Sie die Ströme I_1 bis I_6 in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dazu ein beliebiges Lösungsverfahren.

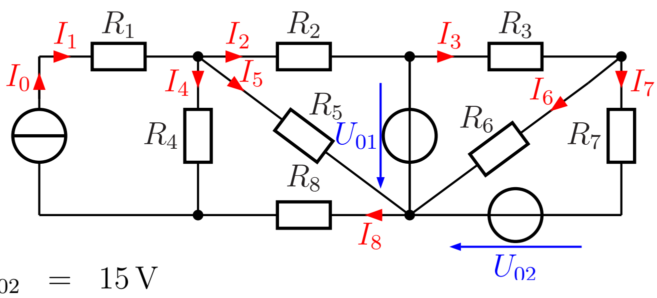


Bekannt sind folgende Werte:

$I_0 = 10\,\mathrm{mA}$ $\quad U_0 = 10\,\mathrm{V}$
$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_3 = 3\,\mathrm{k\Omega}$

7.1.5 Aufgabe 28

Bestimmen Sie die Ströme I_1 bis I_8 in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dazu ein beliebiges Lösungsverfahren.

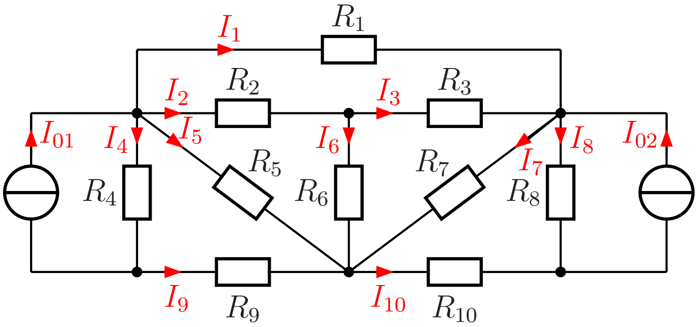


Bekannt sind folgende Werte:

I_0	$=$	$3\,\mathrm{mA}$	U_{01}	$=$	$12\,\mathrm{V}$	U_{02}	$=$	$15\,\mathrm{V}$			
R_1	$=$	$5\,\mathrm{k\Omega}$	R_2	$=$	$1\,\mathrm{k\Omega}$	R_3	$=$	$3\,\mathrm{k\Omega}$	R_4	$=$	$13\,\mathrm{k\Omega}$
R_5	$=$	$1{,}8\,\mathrm{k\Omega}$	R_6	$=$	$3\,\mathrm{k\Omega}$	R_7	$=$	$3\,\mathrm{k\Omega}$	R_8	$=$	$2\,\mathrm{k\Omega}$

7.1.6 Aufgabe 29

Bestimmen Sie die Ströme I_1 bis I_{10} in nebenstehender Schaltung! Verwenden Sie dazu ein beliebiges Lösungsverfahren.



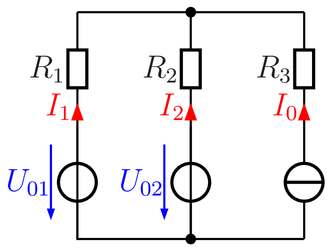
Bekannt sind die nachfolgenden Widerstands- und Strom-Werte:

$I_{01} = 10\,\text{mA}$ $\quad I_{02} = 20\,\text{mA}$
$R_1 = 2\,\text{k}\Omega$ $\quad R_2 = 1\,\text{k}\Omega$
$R_3 = 2{,}5\,\text{k}\Omega$ $\quad R_4 = 2{,}8\,\text{k}\Omega$ $\quad R_5 = 4\,\text{k}\Omega$ $\quad R_6 = 1{,}8\,\text{k}\Omega$
$R_7 = 7\,\text{k}\Omega$ $\quad R_8 = 1\,\text{k}\Omega$ $\quad R_9 = 400\,\Omega$ $\quad R_{10} = 200\,\Omega$

7.1.7 Aufgabe 30

Gegeben ist nebenstehende Schaltung mit folgenden Werten:

$R_1 = 500\,\Omega$ $\quad U_{01} = 4\,\text{V}$
$R_2 = 2\,\text{k}\Omega$ $\quad U_{02} = 14\,\text{V}$
$R_3 = 4\,\text{k}\Omega$ $\quad I_0 = 10\,\text{mA}$

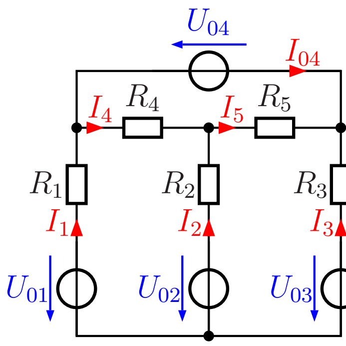


Bestimmen Sie die Ströme I_1 und I_2 mit einem beliebigen Lösungsverfahren!

7.1.8 Aufgabe 31

Gegeben ist nebenstehende Schaltung mit folgenden Werten:

$R_1 = 500\,\Omega$ $\quad U_{01} = 9\,\text{V}$
$R_2 = 1\,\text{k}\Omega$ $\quad U_{02} = 2\,\text{V}$
$R_3 = 2\,\text{k}\Omega$ $\quad U_{03} = 6\,\text{V}$
$R_4 = 500\,\Omega$ $\quad U_{04} = 6\,\text{V}$
$R_5 = 7\,\text{k}\Omega$



Berechnen Sie die Ströme I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 und I_{04} mit einem beliebigen Lösungsverfahren!