Musterlösung der Übungsarbeit MWH 41 vom 08.11.2016

Aufgabe 1

Geben Sie die erste und zweite Ableitung der Funktionen an!

a)

$$f(x) = 3x^5 + 2x^3 - e^x + 3e^2$$

b)

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

c)

$$f(x) = (2x - 4)^5$$

d)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 2}$$

e)

$$f(x) = 3x \cdot e^{2x}$$

f)

$$f(x) = e^x \cdot \sin 2x$$

g)

$$f(x) = e^{\sin 3x}$$

Lösung:

a) Lösung mit Summenregel, Potenzfunktion, e-Funktion.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^5 + 2x^3 - e^x + 3e^2 \\ f'(x) &= 15x^4 + 6x^2 - e^x \\ f''(x) &= 60x^3 + 12x - e^x \end{aligned}$$

b) Zur Lösung formt man den Bruch in der Funktion zweckmäßigerweise in die Potenzschreibweise um.

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x} = x^2 - x^{-1}$$

Jetzt kann die Funktion mit Summenregel und der Potenzfunktion als Grundfunktion abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - x^{-1} \\ f'(x) &= 2x + x^{-2} = 2x + \tfrac{1}{x^2} \quad (5) \\ f''(x) &= 2 - 2x^{-3} = 2 - \tfrac{2}{x^3} \quad (5) \end{aligned}$$

c) Die Ableitung erfolgt zweckmäßigerweise mit der Kettenregel.

$$f(x) = (2x-4)^5$$

Wir bilden innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen:

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x - 4 && \Rightarrow \quad g'(x) = 2 \\ f(g) &= g^5 && \Rightarrow \quad f'(g) = 5g^4 \end{aligned}$$

Mit der Kettenregel ergibt sich die 1. Ableitung:

$$f'(x) = f'(g) \cdot g'(x) = 5g^4 \cdot 2 = 10(2x-4)^4 \quad (5)$$

Die zweite Ableitung wird wieder mit der Kettenregel bestimmt. Die innere und äußere Funktion sowie deren Ableitungen werden aufgestellt:

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x - 4 && \Rightarrow \quad g'(x) = 2 \\ f(g) &= 10g^4 && \Rightarrow \quad f'(g) = 40g^3 \end{aligned}$$

Damit kann die 2. Ableitung aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\ &= 40g^3 \cdot 2 \\ &= 40 \cdot (2x-4)^3 \cdot 2 \\ f''(x) &= 80 \cdot (2x-4)^3 \quad (5) \end{aligned}$$

d) Es handelt sich um einen Bruch; daher muss die Quotientenregel verwendet werden.

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 2}$$

Ich schreibe zunächst Zähler- und Nennerfunktion auf sowie deren Ableitungen.

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x^2 - x - 4 & \Rightarrow & u'(x) = 2x - 1 \\ v(x) = x - 2 & \Rightarrow & v'(x) = 1 \end{array}$$

Diese Ergebnisse setzen wir ein und bestimmen $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2x - 1) \cdot (x - 2) - (x^2 - x - 4) \cdot 1}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - x + 2 - x^2 + x + 4}{(x - 2)^2} \\ f'(x) &= \frac{x^2 - 4x + 6}{(x - 2)^2} \quad (5) \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der zweiten Ableitung schreibe ich wieder die Zähler- und Nennerfunktion sowie deren Ableitungen auf.

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x^2 - 4x + 6 & \Rightarrow & u'(x) = 2x - 4 \\ v(x) = (x - 2)^2 & \Rightarrow & v'(x) = \ldots \end{array}$$

Zur Berechnung von $v'(x)$ wird die Kettenregel benötigt. Die zugehörige Rechnung führe ich in einer weiteren Nebenrechnung durch.

$$\begin{array}{lcl} g(x) = x - 2 & \Rightarrow & g'(x) = 1 \\ v(g) = g^2 & \Rightarrow & v'(g) = 2g \end{array}$$

Damit bestimme ich mit der Kettenregel $v'(x)$.

$$v'(x) = v'(g) \cdot g'(x) = 2g \cdot 1 = 2 \cdot (x - 2)$$

Jetzt kann die Quotientenregel angewendet werden.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \\
&= \frac{(2x-4)\cdot(x-2)^2 - (x^2-4x+6)\cdot 2\cdot(x-2)}{(x-2)^4} \\
&= \frac{(x-2)\cdot\Big((2x-4)\cdot(x-2) - (x^2-4x+6)\cdot 2\Big)}{(x-2)^4} \\
&= \frac{(2x-4)\cdot(x-2) - (x^2-4x+6)\cdot 2}{(x-2)^3} \\
&= \frac{2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x-12}{(x-2)^3} \\
f''(x) &= -\frac{4}{(x-2)^3} \quad (5)
\end{aligned}$$

e) Hier handelt es sich um ein Produkt, also kommt die Produktregel zu Einsatz.

$$f(x) = 3x\cdot e^{2x}$$

Ich schreibe die Faktoren sowie deren Ableitungen auf.

$$\begin{aligned}
u(x) = 3x \quad &\Rightarrow \quad u'(x) = 3 \\
v(x) = e^{2x} \quad &\Rightarrow \quad v'(x) = \ldots
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $v'(x)$ benötigen wir die Kettenregel.

$$\begin{aligned}
g(x) = 2x \quad &\Rightarrow \quad g'(x) = 2 \\
v(g) = e^g \quad &\Rightarrow \quad v'(g) = e^g
\end{aligned}$$

$$v'(x) = v'(g)\cdot g'(x) = e^g\cdot 2 = 2e^{2x}$$

Damit können wir die Produktregel anwenden.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\
&= 3\cdot e^{2x} + 3x\cdot 2e^{2x} \\
f'(x) &= (3+6x)\cdot e^{2x} \quad (5)
\end{aligned}$$

Die 2. Ableitung wird ebenfalls mit der Produktregel bestimmt. Die Ableitung $v'(x)$ können wir aus der vorangegangenen Rechnung übernehmen.

$$\begin{aligned}
u(x) = 3+6x \quad &\Rightarrow \quad u'(x) = 6 \\
v(x) = e^{2x} \quad &\Rightarrow \quad v'(x) = 2e^{2x}
\end{aligned}$$

Damit können wir die Produktregel anwenden.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\
&= 6\cdot e^{2x} + (3+6x)\cdot 2e^{2x} \\
&= 6\cdot e^{2x} + (6+12x)\cdot e^{2x} \\
f''(x) &= (12+12x)\cdot e^{2x} \quad (5)
\end{aligned}$$

f) Hier handelt es sich um ein Produkt, also kommt die Produktregel zu Einsatz.

$$f(x) = e^x \cdot \sin 2x$$

$$\begin{array}{lcl} u(x) = e^x & \Rightarrow & u'(x) = e^x \\ v(x) = \sin 2x & \Rightarrow & v'(x) = \dots \end{array}$$

Zur Bestimmung von $v'(x)$ benötigen wir die Kettenregel.

$$\begin{array}{lcl} g(x) = 2x & \Rightarrow & g'(x) = 2 \\ v(g) = \sin g & \Rightarrow & v'(g) = \cos g \end{array}$$

Damit erhalten wir $v'(x)$:

$$v'(x) = g'(x) \cdot v'(g) = 2 \cdot \cos g = 2 \cos 2x$$

Nun kann die Ableitung $f'(x)$ mit der Produktregel berechnet werden.

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = e^x \cdot \sin 2x + e^x \cdot 2 \cos 2x = e^x \cdot (\sin 2x + 2 \cos 2x) \quad (5)$$

Auch die zweite Ableitung wird mit der Produktregel bestimmt. Vorweg möchte ich die Ableitungen der Teilfunktionen in der Klammer $h(x) = \sin 2x$ und $i(x) = 2 \cos 2x$ mit der Kettenregel bestimmen. Dabei ist aus der Bestimmung der ersten Ableitung bereits bekannt:

$$h(x) = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 2 \cos 2x$$

Leiten wir entsprechend auch $i(x)$ ab:

$$i(x) = 2 \cos 2x$$

$$\begin{array}{lcl} g(x) = 2x & \Rightarrow & g'(x) = 2 \\ i(g) = 2 \cos g & \Rightarrow & i'(g) = -2 \sin g \end{array}$$

$$i'(x) = g'(x) \cdot i'(g) = 2 \cdot (-2 \sin g) = -4 \sin 2x$$

Jetzt können wir $f'(x)$ mit der Produktregel ableiten.

$$f'(x) = e^x \cdot (\sin 2x + 2 \cos 2x)$$

$$\begin{array}{lcl} u(x) = e^x & \Rightarrow & u'(x) = e^x \\ v(x) = \sin 2x + 2 \cos 2x & \Rightarrow & v'(x) = 2 \cos 2x - 4 \sin 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f''(x) & = & u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ & = & e^x \cdot (\sin 2x + 2 \cos 2x) + e^x \cdot (2 \cos 2x - 4 \sin 2x) \\ f''(x) & = & e^x \cdot (4 \cos 2x - 3 \sin 2x) \quad (5) \end{array}$$

g) Hier muss die Kettenregel gleich doppelt angewendet werden.

$$f(x) = e^{\sin 3x}$$

Die Funktion lässt sich schreiben als Funktion von einer Funktion von einer Funktion, also $f(x) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)$ mit $h(x) = 3x$, $g(h) = \sin h$ und $f(g) = e^g$.

Vorweg bestimme ich die Ableitung der inneren Funktion $g\big(h(x)\big) = \sin 3x$ mit Hilfe der Kettenregel.

$$g(x) = \sin 3x$$

$$\begin{array}{lcl} h(x) = 3x & \Rightarrow & h'(x) = 3 \\ g(h) = \sin h & \Rightarrow & g'(h) = \cos h \end{array}$$

$$g'(x) = h'(x) \cdot g'(h) = 3 \cdot \cos h = 3\cos 3x$$

Jetzt wenden wir die Kettenregel auf $f(x)$ an.

$$f(x) = e^{\sin 3x}$$

$$\begin{array}{lcl} g(x) = \sin 3x & \Rightarrow & g'(x) = 3\cos 3x \\ f(g) = e^g & \Rightarrow & f'(g) = e^g \end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(g) \cdot g'(x) \\ &= e^g \cdot 3\cos 3x \\ f'(x) &= e^{\sin 3x} \cdot 3\cos 3x \quad (5) \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung muss nun die Produktregel angewendet werden, denn die Funktion stellt ein Produkt dar. Ich bestimme vorweg die Ableitung des zweiten Faktors $v(x) = 3\cos 3x$ mit der Kettenregel.

$$v(x) = 3\cos 3x$$

$$\begin{array}{lcl} g(x) = 3x & \Rightarrow & g'(x) = 3 \\ v(g) = 3\cos g & \Rightarrow & v'(g) = -3\sin g \end{array}$$

$$v'(x) = g'(x) \cdot v'(g) = 3 \cdot (-3\sin g) = -9\sin 3x$$

Jetzt kann $f''(x)$ mit der Produktregel bestimmt werden.

$$\begin{array}{lcl} u(x) = e^{\sin 3x} & \Rightarrow & u'(x) = e^{\sin 3x} \cdot 3\cos 3x \\ v(x) = 3\cos 3x & \Rightarrow & v'(x) = -9\sin 3x \end{array}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= e^{\sin 3x} \cdot 3\cos 3x \cdot 3\cos 3x + e^{\sin 3x} \cdot (-9\sin 3x) \\ f''(x) &= e^{\sin 3x} \cdot \big(9\cos^2 3x - 9\sin 3x\big) \quad (5) \end{aligned}$$