Musterlösung Klassenarbeit MWH 21 Nr. 1

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = -2x^2 - 2x + 12$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
-2x_0^2 - 2x + 12 &= 0 \qquad \mid :(-2) \\
x_0^2 + x - 6 &= 0 \\
x_{01/02} &= -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{24}{4}} \\
&= -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{5}{2}
\end{aligned}$$

$$x_{01} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2} = 2 \qquad x_{02} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2} = -3$$

Ergebnis: $\boxed{x_{01} = 2 \qquad x_{02} = -3}$ (4)

2. Extrema:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -2x^2 - 2x + 12 \\
f'(x) &= -4x - 2 && (3) \\
f''(x) &= -4 && (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x_E) &= 0 \\
-4x_E - 2 &= 0 && \mid +2 \\
-4x_E &= 2 && \mid :(-4) \\
x_E &= -\tfrac{1}{2} && (\text{oder } x_E = -0{,}5) \quad (3)
\end{aligned}$$

Prüfung mit zweiter Ableitung:

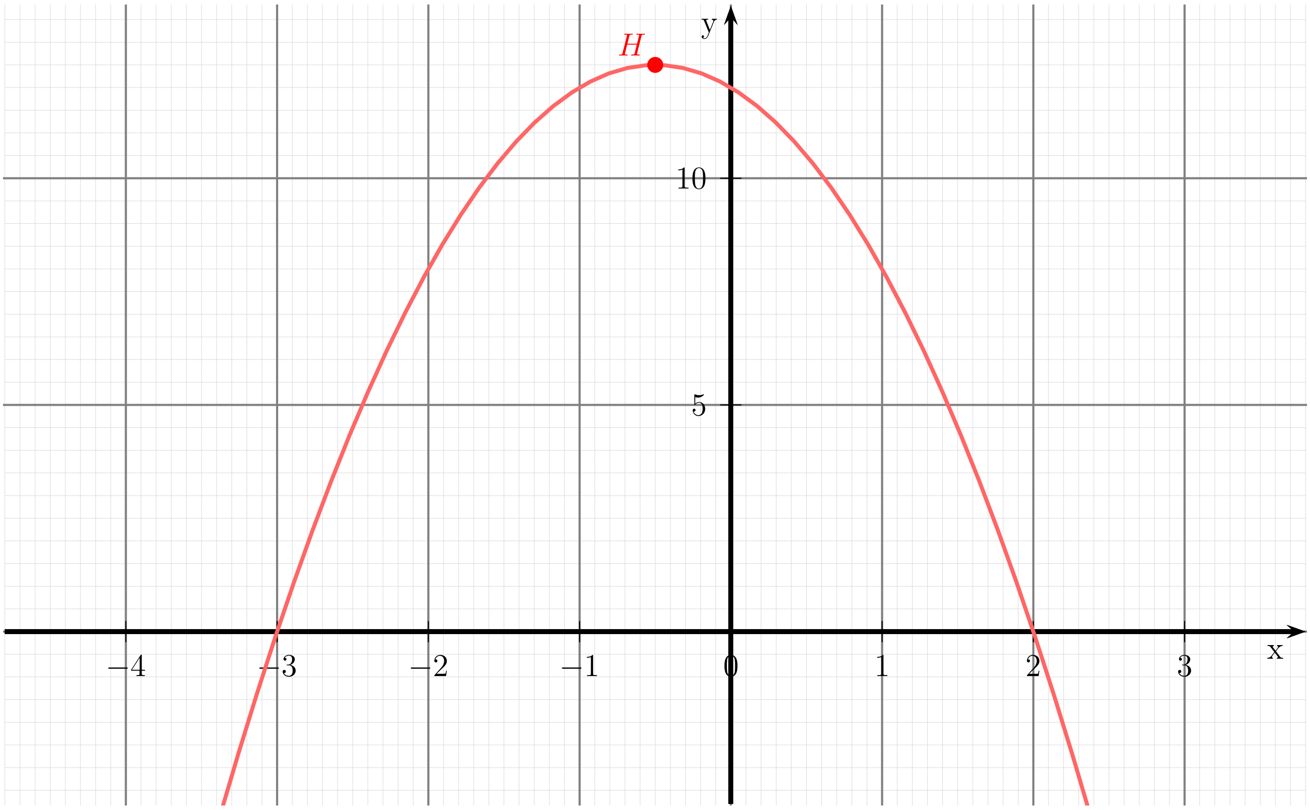
$$f''(x_E) = -4 < 0 \;\Rightarrow\; \text{Hochpunkt bei } x_E = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

Bestimmung des zugehörigen y-Wertes:

$$y_E = f(x_E) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 12 = \frac{25}{2} = 12{,}5 \quad (1)$$

$\boxed{H\left(-\tfrac{1}{2} \middle| \tfrac{25}{2}\right)}$ oder $\boxed{H(-0{,}5|12{,}5)}$ (1)

3. Skizze: **(4)**



Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
x_0^3 + 6x_0^2 + 9x_0 &= 0 \qquad\qquad\qquad | \ x_0 \text{ ausklammern} \\
x_0 \cdot (x_0^2 + 6x_0 + 9) &= 0 \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \ x_{01} = 0 \\
x_0^2 + 6x_0 + 9 &= 0 \\
x_{02/03} &= -3 \pm \sqrt{3^2 - 9} \\
x_{02} &= -3
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{x_{01} = 0 \qquad x_{02} = -3}$ (4)

2. Extrema:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + 6x^2 + 9x \\
f'(x) &= 3x^2 + 12x + 9 \quad (2) \\
f''(x) &= 6x + 12 \qquad\quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x_E) &= 0 \\
3x_E^2 + 12x_E + 9 &= 0 \qquad\qquad\qquad | : 3 \\
x_E^2 + 4x_E + 3 &= 0 \\
x_{E1/2} &= -2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\
&= -2 \pm 1 \\
x_{E1} = -2 + 1 = -1 & \qquad x_{E2} = -2 - 1 = -3 \quad (4)
\end{aligned}$$

Prüfung mit zweiter Ableitung:

$$f''(x_{E1}) = 6 \cdot (-1) + 12 = 6 > 0 \ \Rightarrow \ \text{Tiefpunkt bei } x_{E1} = -1 \quad (1)$$

$$f''(x_{E2}) = 6 \cdot (-3) + 12 = -6 < 0 \ \Rightarrow \ \text{Hochpunkt bei } x_{E2} = -3 \quad (1)$$

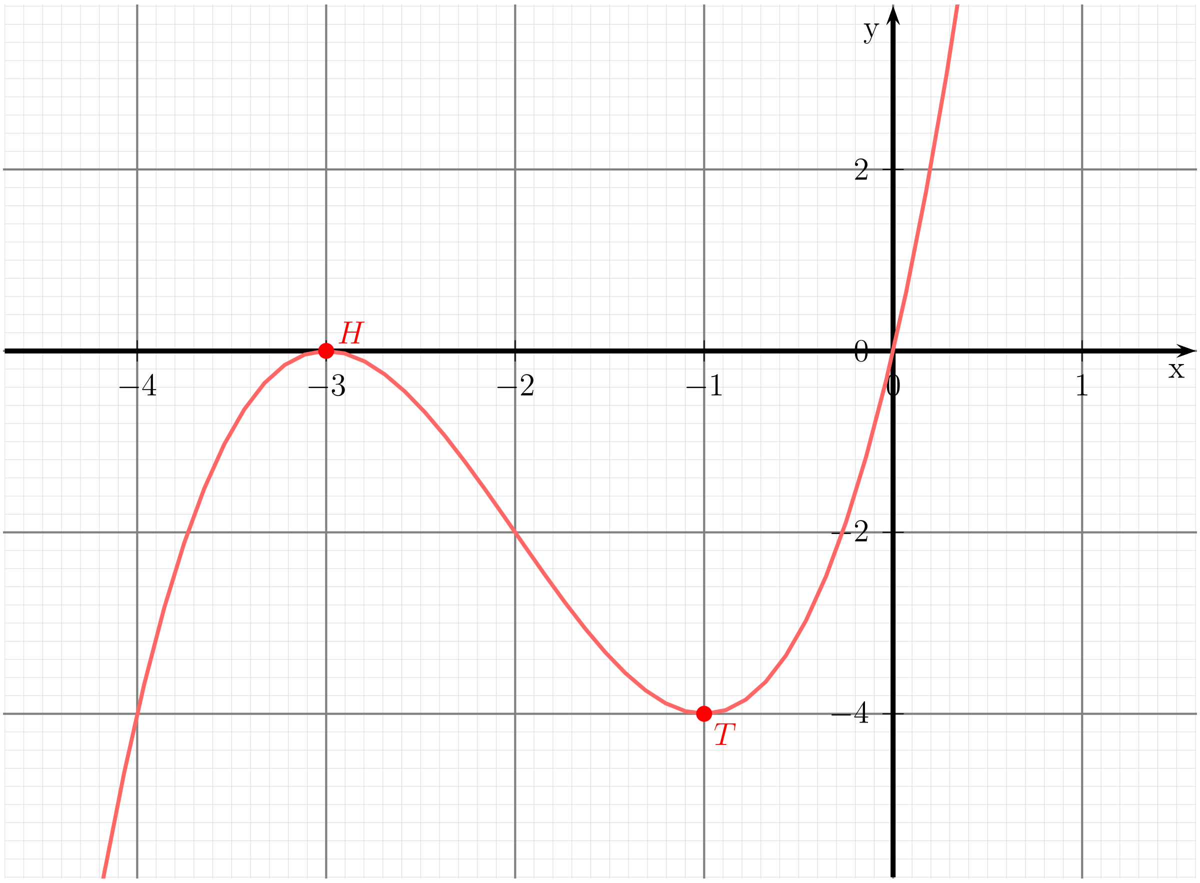
Bestimmung der zugehörigen y-Werte:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) = -4 \quad (1)$$

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) = 0 \quad (1)$$

$$\boxed{T(-1|-4)} \qquad \boxed{H(-3|0)} \quad (1)$$

3. Skizze: **(3)**



Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned}
f x_0 &= 0 \\
\tfrac{1}{3}x_0^3 + 2x_0 &= 0 && | \cdot 3 \\
x_0^3 + 6x_0 &= 0 && | \ x_0 \text{ ausklammern} \\
x_0 \cdot (x_0^2 + 6) &= 0 && \Rightarrow \ x_{01} = 0 \\
x_0^2 + 6 &= 0 && | - 6 \\
x_0^2 &= -6 && |\sqrt{\ } \\
x_{02/3} &= \pm\sqrt{-6} && \Rightarrow \ \text{keine weiteren Nullstellen}
\end{aligned}$$

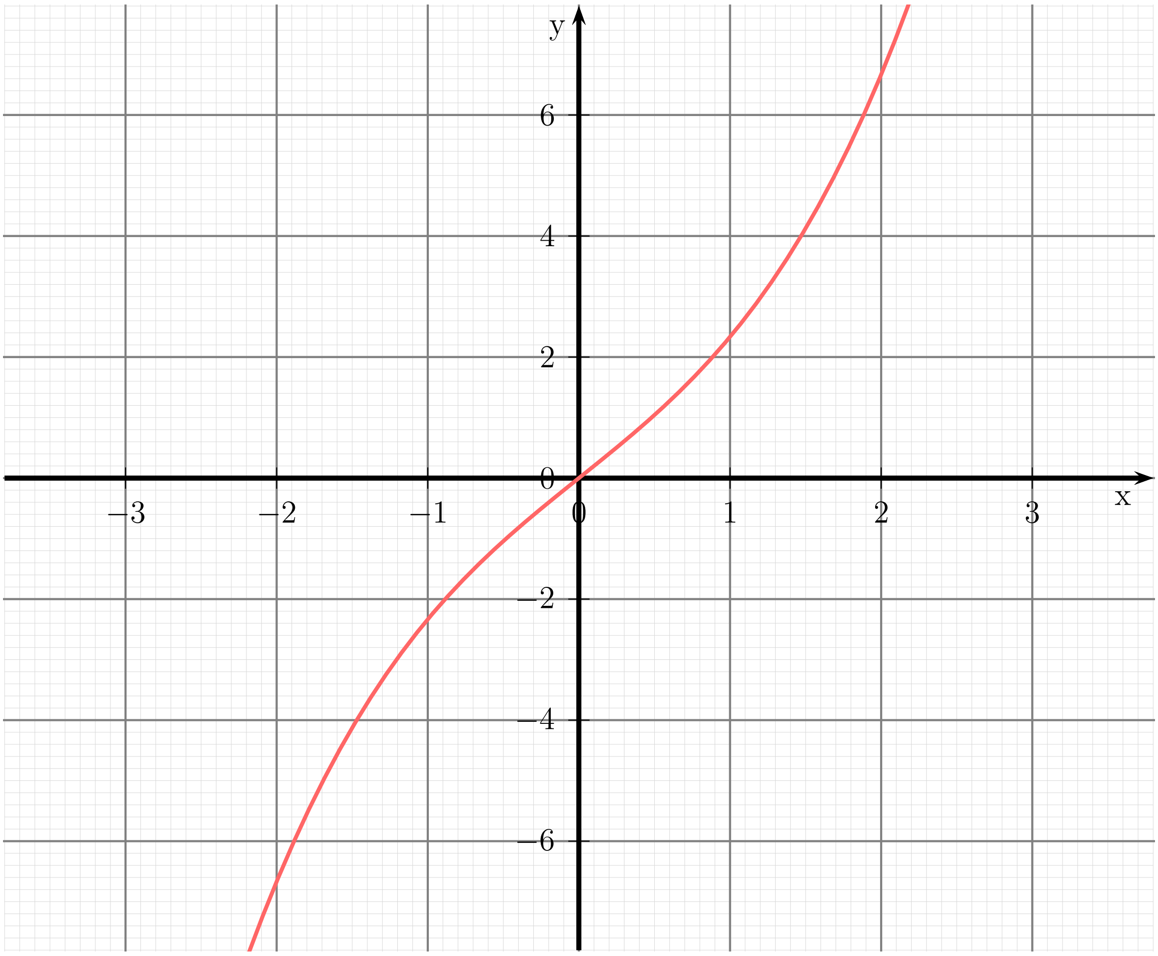
Ergebnis: $\boxed{x_0 = 0}$ (6)

2. Extrema:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tfrac{1}{3}x^3 + 2x \\
f'(x) &= x^2 + 2 && (2) \\
f''(x) &= 2x && (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x_E) &= 0 \\
x_E^2 + 2 &= 0 && | - 2 \\
x_E^2 &= -2 && |\sqrt{\ } \\
x_{E1/2} &= \pm\sqrt{-2} && \Rightarrow \ \text{keine Extrema} \quad (5)
\end{aligned}$$

3. Skizze: **(5)**



Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und Extrempunkte und skizzieren Sie den Funktionsgraphen!

Lösung (20)

1. Nullstellen:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
2x_0^4 - 8x_0^3 + 8x^2 &= 0 && |:2 \\
x_0^4 - 4x_0^3 + 4x^2 &= 0 && |\ x_0^2 \text{ ausklammern} \\
x_0^2 \cdot (x_0^2 - 4x_0 + 4) &= 0 && \Rightarrow\ x_{01} = 0 \\
x_0^2 - 4x_0 + 4 &= 0 \\
x_{02/03} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 4} \\
x_{02} &= 2
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{x_{01} = 0 \qquad x_{02} = 2}$ (3)

2. Extrema:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 \\
f'(x) &= 8x^3 - 24x^2 + 16x && (2) \\
f''(x) &= 24x^2 - 48x + 16 && (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x_E) &= 0 \\
8x_E^3 - 24x_E^2 + 16x_E &= 0 && |:8 \\
x_E^3 - 3x_E^2 + 2x_E &= 0 && |\ x_E \text{ ausklammern} \\
x_E \cdot (x_E^2 - 3x_E + 2) &= 0 && \Rightarrow\ x_{E1} = 0 \\
x_{E2/3}^2 - 3x_{E2/3} + 2 &= 0 \\
x_{E2/3} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} \\
x_{E2/3} &= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\
x_{E2} = 2 & \qquad x_{E3} = 1 \quad (3)
\end{aligned}$$

Prüfung mit zweiter Ableitung:

$$f''(x_{E1}) = 24 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 16 = 16 > 0 \Rightarrow \text{ Tiefpunkt bei } x_{E1} = 0 \quad (1)$$

$$f''(x_{E2}) = 24 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 16 = 16 > 0 \Rightarrow \text{ Tiefpunkt bei } x_{E2} = 2 \quad (1)$$

$$f''(x_{E3}) = 24 \cdot 1^2 - 48 \cdot 1 + 16 = -8 < 0 \Rightarrow \text{ Hochpunkt bei } x_{E3} = 1 \quad (1)$$

Bestimmung der zugehörigen y-Werte:

$$y_{E1} = f(x_{E1}) = 2 \cdot 0^4 - 8 \cdot 0^3 + 8 \cdot 0^2 = 0 \quad (1)$$

$$y_{E2} = f(x_{E2}) = 2 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2 = 0 \quad (1)$$

$$y_{E3} = f(x_{E2}) = 2 \cdot 1^4 - 8 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1^2 = 2 \quad (1)$$

$\boxed{T_1(0|0)}$ $\boxed{T_2(2|0)}$ $\boxed{H(1|2)}$ (1)

3. Skizze: **(3)**