Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fläche, die zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse liegt.

$$f(x) = 2x^2 - 14x + 20$$

Fertigen Sie vor Beginn der Rechnung eine Skizze an!

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Fläche, die durch die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = 2x^2 + 3x - 1 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = x + 3$$

ganz eingeschlossen wird. Skizzieren Sie den Graphen und markieren Sie die zu berechnende Fläche!

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Fläche, die durch die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = 2x^2 + 2x - 1 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = 4x + 3$$

ganz eingeschlossen wird. Skizzieren Sie den Graphen und markieren Sie die zu berechnende Fläche!

Aufgabe 4

Ein Polynom 2. Grades (eine Parabel) schneidet die y-Achse bei $y_0 = 9$ und hat im Punkt $P(1|12)$ einen Hochpunkt. Wie groß ist die Fläche, die von der Parabel und der x-Achse eingeschlossen wird? Skizzieren Sie den Graphen und markieren Sie die zu berechnende Fläche!

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Fläche, die von der x-Achse, der y-Achse und dem Graphen der Funktion

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

begrenzt wird! Skizzieren Sie den Funktionsverlauf und markieren Sie die gesuchte Fläche!

Lösungen

Aufgabe 1

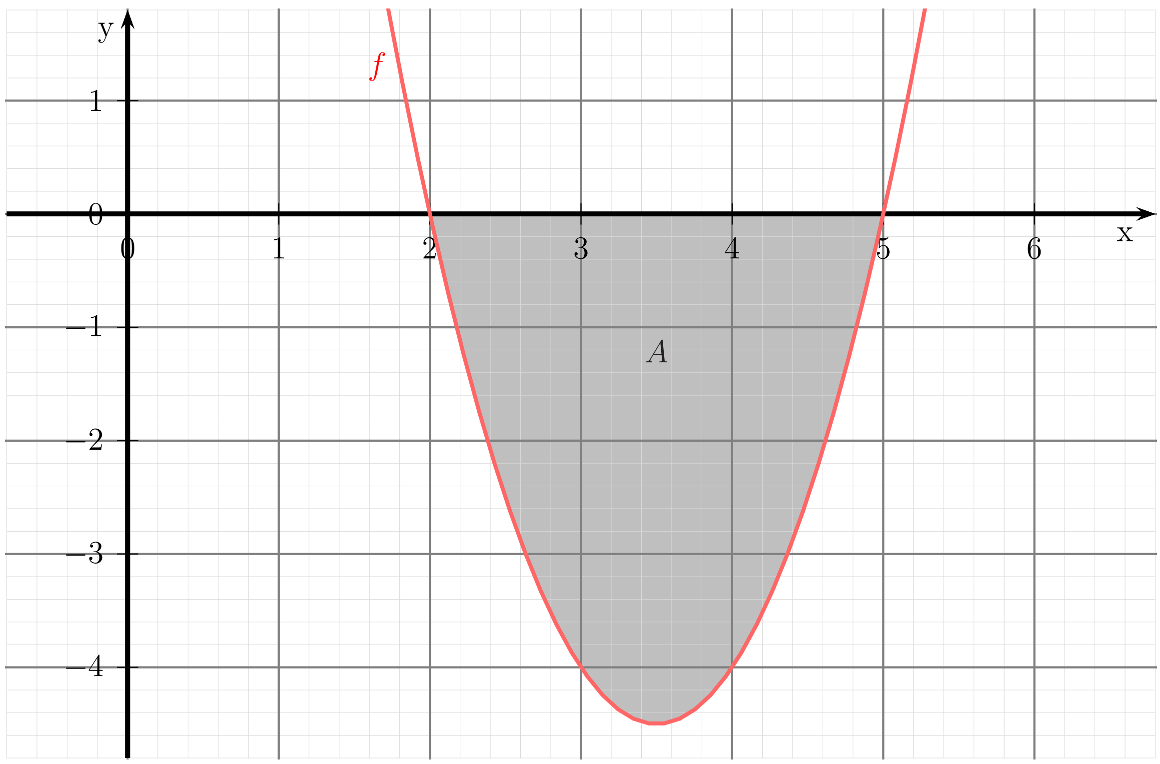
Berechnen Sie die Fläche, die zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse liegt.

$$f(x) = 2x^2 - 14x + 20$$

Fertigen Sie vor Beginn der Rechnung eine Skizze an!

Lösung:

Bevor wir uns näher mit der Lösung beschäftigen, schauen wir uns den Funktionsgraphen einmal genau an. (3)



1. Berechnung der Grenzen: Die gesuchte Fläche liegt unterhalb der x-Achse im Bereich zwischen etwa 2 und 5. Die genauen Grenzen müssen wir natürlich zunächst ausrechnen. Dazu setzen wir den Funktionsterm gleich Null.

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 14x + 20 &= 0 \quad | :2 \quad \color{red}{(1)} \\
x^2 - 7x + 10 &= 0 \quad \color{red}{(1)} \\
x_{1/2} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} \\
x_{1/2} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{40}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\
x_{1/2} &= \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_1 = 2 & \qquad x_2 = 5 \quad \color{red}{(3)}
\end{aligned}
$$

2. Berechnung der Fläche: Da die gesuchte Fläche komplett **unterhalb** der x-Achse liegt, wird das Integral in dem Bereich **negativ**. Das kann man ausgleichen, indem man die Fläche als das **negative** Integral ansetzt. Man kann auch um das Integral Betragsstriche setzen. Da die letzte Methode immer dann angewendet werden kann, wenn man nicht so recht weiß, welches Vorzeichen sich ergibt, wähle ich diese Methode.

$$
\begin{aligned}
A &= \left| \int_2^5 2x^2 - 14x + 20 \, \mathrm{d}x \right| \quad | \text{ Stammfunktion bilden} \quad \color{red}{(3)} \\
&= \left| \left[\frac{2}{3}x^3 - 7x^2 + 20x \right]_2^5 \right| \quad | \text{ Grenzen einsetzen} \quad \color{red}{(3)} \\
&= \left| \left(\frac{2}{3} \cdot 5^3 - 7 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 \right) \right| \quad \color{red}{(3)} \\
&= \left| \frac{25}{3} - \frac{52}{3} \right| \\
&= \left| -\frac{27}{3} \right| \\
A &= |-9| \\
A &= 9 \quad \color{red}{(3)}
\end{aligned}
$$

Ergebnis: Die gesuchte Fläche beträgt $\boxed{A = 9 \text{ Flächeneinheiten}}$

Aufgabe 2

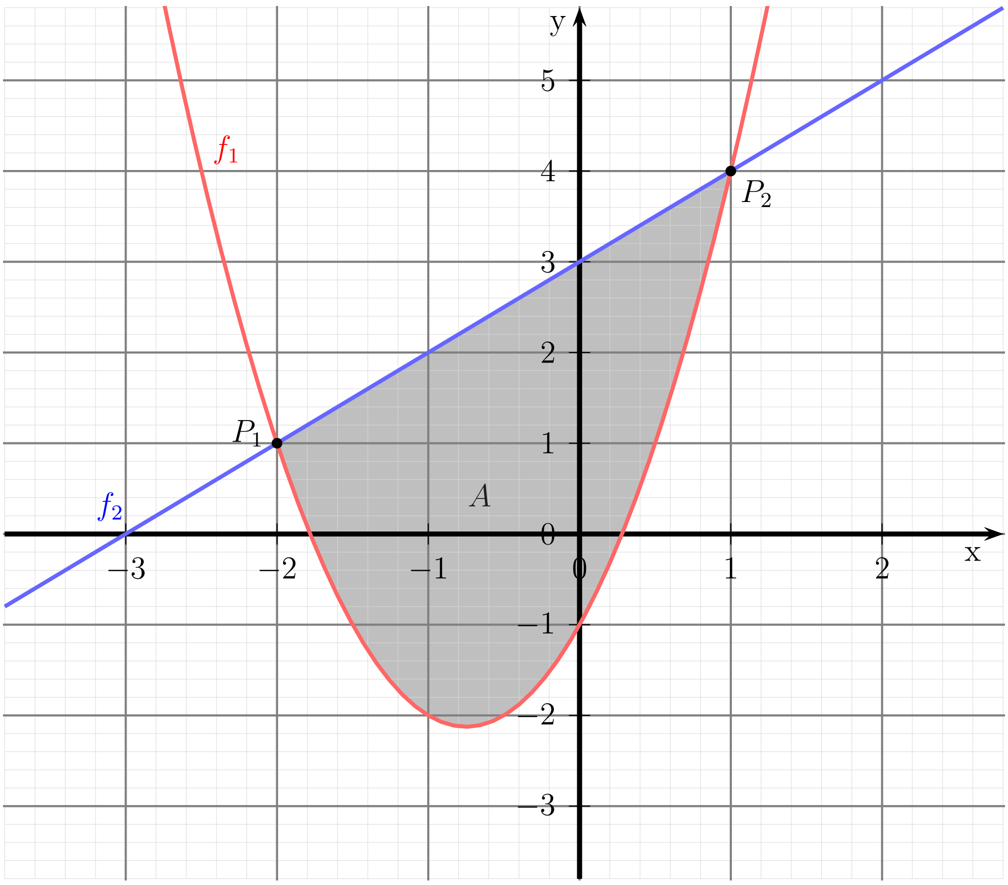
Berechnen Sie die Fläche, die durch die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = 2x^2 + 3x - 1 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = x + 3$$

ganz eingeschlossen wird. Skizzieren Sie den Graphen und markieren Sie die zu berechnende Fläche!

Lösung:

Am besten sehen wir uns zunächst die Funktionsgraphen an. Sie umschließen die zu berechnende Fläche. Die Fläche wird unten durch $f_1(x)$ und oben durch $f_2(x)$ begrenzt.



1. Schnittpunktbestimmung Um die Schnittpunkte zu bestimmen, die ja die Integrationsgrenzen darstellen, werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt.

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= f_2(x) \\
2x^2 + 3x - 1 &= x + 3 && | - x - 3 \\
2x^2 + 2x - 4 &= 0 && | : 2 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
x_{1/2} &= -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 2} \\
x_{1/2} &= -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}} \\
x_{1/2} &= -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2} \\
x_1 = -2 & \quad x_2 = 1
\end{aligned}
$$

2. Flächenberechnung Damit sind die Integrationsgrenzen bekannt. Wir können das bestimmte Integral für die Flächenberechnung ansetzen. Dabei ist zu beachten, dass die **untere** von der **oberen** Funktion subtrahiert wird, also f_1 von f_2.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{1} (x+3) - (2x^2 + 3x - 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{1} x + 3 - 2x^2 - 3x + 1\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{1} -2x^2 - 2x + 4\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x\right]_{-2}^{1} \\
&= \left(-\frac{2}{3}\cdot 1^3 - 1^2 + 4\cdot 1\right) - \left(-\frac{2}{3}\cdot(-2)^3 - (-2)^2 + 4\cdot(-2)\right) \\
&= \frac{7}{3} + \frac{20}{3} \\
A &= 9\,\mathrm{FE}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

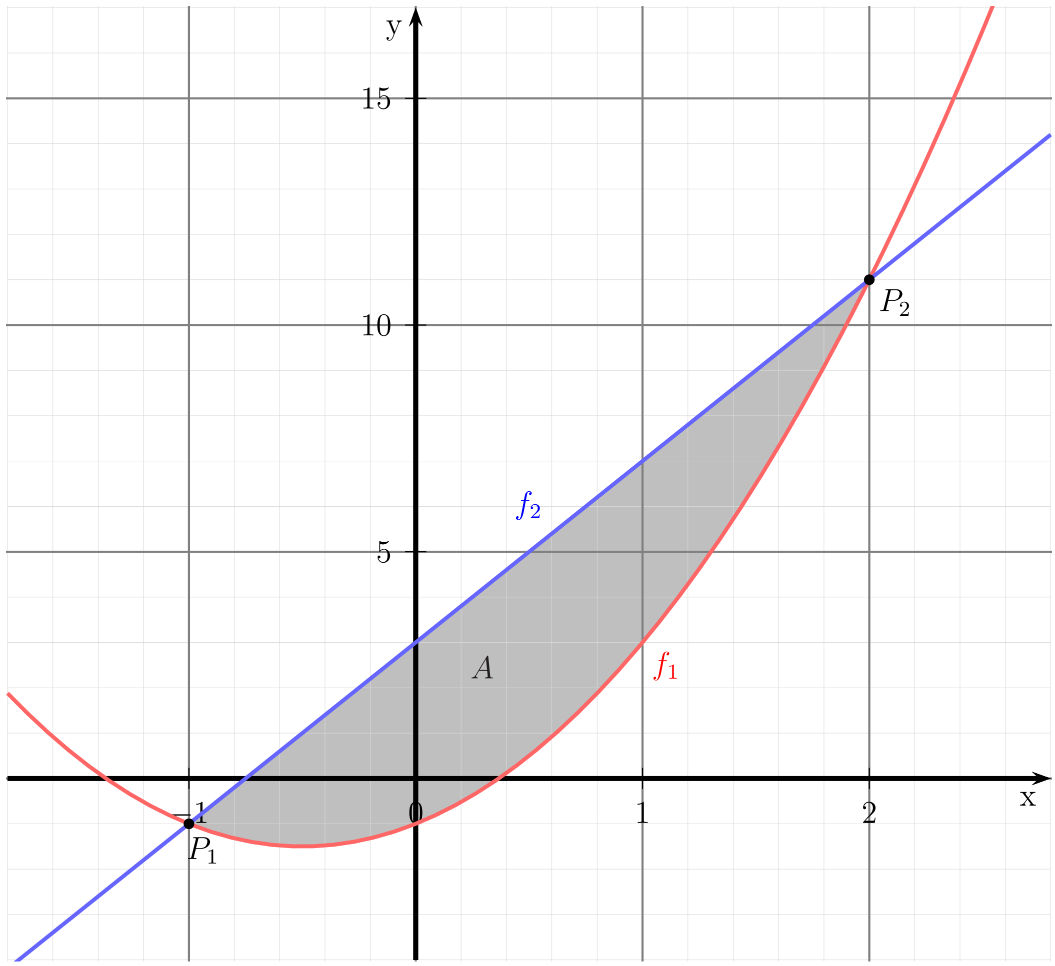
Berechnen Sie die Fläche, die durch die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = 2x^2 + 2x - 1 \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = 4x + 3$$

ganz eingeschlossen wird. Skizzieren Sie den Graphen und markieren Sie die zu berechnende Fläche!

Lösung:

Am besten sehen wir uns zunächst die Funktionsgraphen an. Sie umschließen die zu berechnende Fläche. Die Fläche wird unten durch $f_1(x)$ und oben durch $f_2(x)$ begrenzt.



(3)

1. Schnittpunktbestimmung Um die Schnittpunkte zu bestimmen, die ja die Integrationsgrenzen darstellen, werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt.

$$\begin{aligned}
2x^2+2x-1 &= 4x+3 \quad |-4x-3 \quad \color{red}{(1)} \\
2x^2-2x-4 &= 0 \quad |:2 \\
x^2-x-2 &= 0 \quad \color{red}{(1)} \\
x_{1/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} \\
&= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\
x_1=-1 & \qquad x_2=2 \quad \color{red}{(3)}
\end{aligned}$$

2. Flächenberechnung Damit sind die Integrationsgrenzen bekannt. Wir können das bestimmte Integral für die Flächenberechnung ansetzen. Dabei ist zu beachten, dass die **untere** von der **oberen** Funktion subtrahiert wird, also f_1 von f_2.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)-f_1(x)\,\mathrm{d}x \quad \color{red}{(2)} \\
&= \int_{-1}^{2} (4x+3)-(2x^2+2x-1)\,\mathrm{d}x \quad \color{red}{(2)} \\
&= \int_{-1}^{2} 4x+3-2x^2-2x+1\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{2} -2x^2+2x+4\,\mathrm{d}x \quad \color{red}{(2)} \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2} \quad \color{red}{(2)} \\
&= \left(-\frac{2}{3}\cdot 2^3+2^2+4\cdot 2\right)-\left(-\frac{2}{3}\cdot(-1)^3+(-1)^2+4\cdot(-1)\right) \quad \color{red}{(2)} \\
&= \frac{20}{3}+\frac{7}{3} \\
A &= 9
\end{aligned}$$

Ergebnis: $\boxed{\text{Die Fläche beträgt 9 Flächeneinheiten.}}$ (2)

Aufgabe 4

Ein Polynom 2. Grades (eine Parabel) schneidet die y-Achse bei $y_0 = 9$ und hat im Punkt $P(1|12)$ einen Hochpunkt. Wie groß ist die Fläche, die von der Parabel und der x-Achse eingeschlossen wird? Skizzieren Sie den Graphen und markieren Sie die zu berechnende Fläche!

Lösung:

Bestimmung der Funktionsgleichung: Ich bilde die Funktion und die erste Ableitung in allgemeiner Form:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ f'(x) &= 2ax + b \end{aligned}$$

Damit können die Bedingungen in Gleichungen umgesetzt werden. Drei Gleichungen werden benötigt.

$$\begin{array}{llrclclrcll} \text{Schnittp. mit } y\text{-Achse} & \Rightarrow & f(0) & = & 9 & \Rightarrow & (1) & 0a + 0b + c & = & 9 & \color{red}{(1)} \\ \text{Punkt } P(1|12) & \Rightarrow & f(1) & = & 12 & \Rightarrow & (2) & a + b + c & = & 12 & \color{red}{(1)} \\ \text{Hochp. bei } x_p = 1 & \Rightarrow & f'(1) & = & 0 & \Rightarrow & (3) & 2a + b & = & 0 & \color{red}{(1)} \end{array}$$

Aus (1) ergibt sich:

$$c = 9 \quad \color{red}{(1)}$$

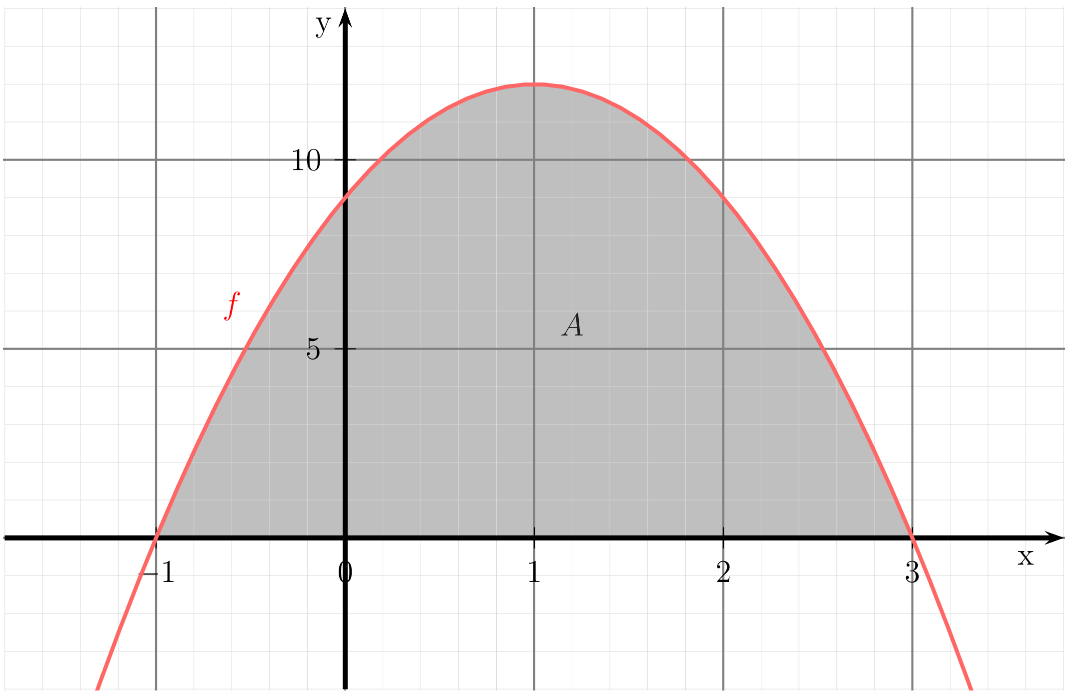
Das setzen wir in die anderen Gleichungen ein:

$$\begin{array}{lrcll} (2) & a + b + 9 & = & 12 & \mid \; -9 \\ (3) & 2a + b & = & 0 & \\ \hline (2) & a + b & = & 3 & \mid \; - \\ (3) & 2a + b & = & 0 & \mid \\ \hline & a & = & -3 & \quad \color{red}{(2)} \end{array}$$

Um b zu erhalten, setze ich das Ergebnis in (3) ein.

$$\begin{array}{rcll} 2a + b & = & 0 & \\ 2 \cdot (-3) + b & = & 0 & \\ -6 + b & = & 0 & \mid \; +6 \\ b & = & 6 & \quad \color{red}{(1)} \end{array}$$

Wir erhalten die Funktionsgleichung $\boxed{f(x) = -3x^2 + 6x + 9}$



(2)

Nullstellenbestimmung:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ -3x_0^2+6x_0+9 &= 0 \quad \mid :(-3) \\ x_0^2-2x_0-3 &= 0 \\ x_{01/2} &= 1 \pm \sqrt{1+3} \\ &= 1 \pm 2 \\ x_{01} = -1 & \qquad x_{02} = 3 \quad {\color{red}(3)} \end{aligned}$$

Flächenberechnung:

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{-1}^{3} -3x^2+6x+9\,\mathrm{d}x \quad {\color{red}(2)} \\ &= \left[-x^3+3x^2+9x\right]_{-1}^{3} \quad {\color{red}(2)} \\ &= \left(-3^3+3\cdot 3^2+9\cdot 3\right)-\left(-(-1)^3+3\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)\right) \quad {\color{red}(2)} \\ &= 27-(-5) \\ A &= 32 \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt $\boxed{A = 32 \text{ Flächeneinheiten}}$ (2)

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Fläche, die von der x-Achse, der y-Achse und dem Graphen der Funktion

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

begrenzt wird! Skizzieren Sie den Funktionsverlauf und markieren Sie die gesuchte Fläche!

Lösung:

Nullstellenbestimmung:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ x_0^3 + 6x_0^2 + 12x_0 + 8 &= 0 \quad \color{red}{(1)} \end{aligned}$$

Zur analytischen Lösung einer Kubischen Gleichung haben wir kein Verfahren zur Verfügung. Durch **planvolles** Raten kann die erste Nullstelle ermittelt werden:

$$x_{01} = -2 \quad \color{red}{(1)}$$

Zur Bestimmung der weiteren Nullstellen wird eine Polynomdivision durchgeführt:

$$\begin{array}{rrrr} (x_0^3 & +6x_0^2 & +12x_0 & +8) \\ -(x_0^3 & +2x_0^2) & & \\ \hline & (4x_0^2 & +12x_0 & +8) \\ - & (4x_0^2 & +8x_0) & \\ \hline & & 4x_0 & +8 \\ & - & (4x_0 & +8) \\ \hline & & & 0 \end{array} \quad : \quad (x_0 + 2) \quad = \quad x_0^2 + 4x_0 + 4 \quad \color{red}{(4)}$$

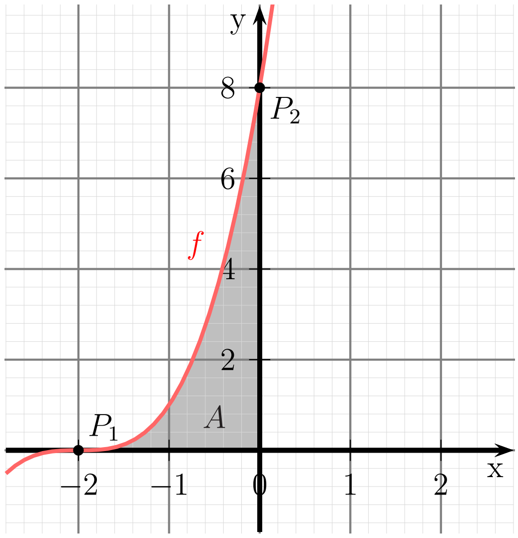
Der Ergebnisterm wird auf weitere Nullstellen untersucht:

$$\begin{aligned} x_0^2 + 4x_0 + 4 &= 0 \\ x_{02/3} &= -2 \pm \sqrt{4-4} \\ x_{02} &= -2 \quad \color{red}{(2)} \end{aligned}$$

x_{02} ist mit x_{01} identisch, es gibt also nur eine einzige Nullstelle: $\boxed{x_0 = -2}$ $\quad \color{red}{(1)}$

Flächenberechnung: Nebenstehend ist die Skizze des Funktionsgraphen dargestellt. Mit der einzigen Nullstelle bei $x_0 = -2$ ergibt sich die gekennzeichnete gesuchte Fläche. Die Integrationsgrenzen sind dann $x_1 = x_0 = -2$ und $x_2 = 0$.

Mit diesen Werten kann die Fläche als Integral angesetzt werden:



(3)

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{0} x^3 + 6x^2 + 12x + 8\,\mathrm{d}x \quad (2) \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x\right]_{-2}^{0} \quad (2) \\
&= (0+0+0+0) - \left(\frac{1}{4}\cdot(-2)^4 + 2\cdot(-2)^3 + 6\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2)\right) \quad (2) \\
&= 0 - (4 - 16 + 24 - 16) \\
A &= 4\,\mathrm{FE} \quad (2)
\end{aligned}
$$