Gemischte Ungleichungen mit Brüchen und Beträgen

Wolfgang Kippels

7. September 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Zum Verständnis der nachfolgenden Ausführungen sind Kenntnisse zu Ungleichungen und zu Beträgen erforderlich. Eine Anleitung zu Ungleichungen finden Sie hier:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ungleich.pdf

Eine Anleitung zum Rechnen mit Beträgen finden Sie hier:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/betrag.pdf

2 Grundsätzliche Vorgehensweise an einem Beispiel

Anhand des nachfolgenden Beispiels wollen wir uns eine mögliche Vorgehensweise ansehen.

$$\frac{|x+4|}{|x-1|} \leq \frac{|x-1|}{x}$$

Zunächst wir der Definitionsbereich bestimmt. Aus den Nennernullstellen ergibt sich:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}}$$

Bei einer Ungleichung dieser Art ist es sinnvoll, zunächst alle Grenzen zu bestimmen, bei denen Betragsinhalte und/oder Nenner das Vorzeichen wechseln. Dann können die sich ergebenden Bereiche einzeln untersucht werden. Die Nennernullstellen sind schon in den Definitionslücken erkennbar. Der Nenner des linken Bruches ist gleichzeitig als Betragsinhalt im rechten Zähler enthalten. Bleibt also nur noch der linke Zähler. $(x+4)$ wird Null für $x = -4$. Wir erhalten also vier zu untersuchende Bereiche:

1. $x < -4$
2. $-4 \leq x < 0$
3. $0 < x < 1$
4. $x > 1$

Diese Bereiche werden nun einzeln nacheinander untersucht.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x < -4:}$$

$$\begin{array}{rcll}
\frac{|x+4|}{|x-1|} & \leq & \frac{|x-1|}{x} & \\
\frac{-(x+4)}{-(x-1)} & \leq & \frac{-(x-1)}{x} & \\
\frac{-x-4}{-x+1} & \leq & \frac{-x+1}{x} & |\cdot(-x+1) \qquad \textit{(positiv)} \\
-x-4 & \leq & \frac{(-x+1)\cdot(-x+1)}{x} & |\cdot x \qquad \textit{(negativ)} \\
(-x-4)\cdot x & \geq & (-x+1)\cdot(-x+1) & \\
-x^2-4x & \geq & x^2-2x+1 & |-x^2+2x-1 \\
-2x^2-2x-1 & \geq & 0 & |\cdot(-2) \qquad \textit{(negativ)} \\
x^2+x+\frac{1}{2} & \leq & 0 & |-\frac{1}{2} \\
x^2+x & \leq & -\frac{1}{2} & |+\left(\frac{1}{2}\right) \\
x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2 & \leq & -\frac{1}{2}+\frac{1}{4} & \\
\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 & \leq & -\frac{1}{4} & \\
x+\frac{1}{2} & \leq & \left|\sqrt{-\frac{1}{4}}\right| & \\
L_1 & = & \{\ \} &
\end{array}$$

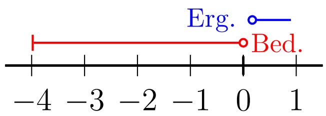
Die Lösungsmenge ist leer, da das Ergebnis der Wurzel **nicht reell** ist.

Untersuchung für $-4 \leq x < 0$:

In diesem Bereich sind nur die beiden gleichen Betragsinhalte **negativ**. Beim Auflösen dieser Beträge entsteht daher ein Minuszeichen. Bei einer Multiplikation mit einem Nenner muss man prüfen, ob der Nenner positiv ist oder nicht. Ist er negativ, kehrt sich das Ungleichungszeichen um.

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{|x+4|}{|x-1|} & \leq & \dfrac{|x-1|}{x} & \\
\dfrac{x+4}{-(x-1)} & \leq & \dfrac{-(x-1)}{x} & \\
\dfrac{x+4}{-x+1} & \leq & \dfrac{-x+1}{x} & |\cdot(-x+1) \quad \textit{(positiv)} \\
x+4 & \leq & \dfrac{(-x+1)\cdot(-x+1)}{x} & |\cdot x \quad \textit{(negativ)} \\
(x+4)\cdot x & \geq & (-x+1)^2 & \\
x^2+4x & \geq & x^2-2x+1 & |-x^2+2x \\
6x & \geq & 1 & |:6 \\
x & \geq & \frac{1}{6} & \\
L_2 & = & \{\,\} &
\end{array}
$$

Nebenstehend ist die Bedingung für den untersuchten Bereich (Bed.) und das Ergebnis der Rechnung (Erg.) dargestellt. Die Lösungsmenge ist leer, da das Ergebnis **außerhalb** des untersuchten Bereiches liegt. Die Bereiche überschneiden sich nicht.

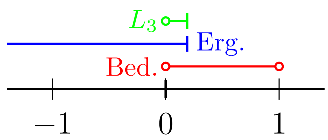


Untersuchung für $0 < x < 1$:

In diesem Bereich sind nur die beiden gleichen Betragsinhalte **negativ**. Beim Auflösen dieser Beträge entsteht daher ein Minuszeichen. Beide Nenner sind positiv.

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{|x+4|}{|x-1|} & \leq & \dfrac{|x-1|}{x} & \\
\dfrac{x+4}{-(x-1)} & \leq & \dfrac{-(x-1)}{x} & \\
\dfrac{x+4}{-x+1} & \leq & \dfrac{-x+1}{x} & |\cdot(-x+1) \quad \textit{(positiv)} \\
x+4 & \leq & \dfrac{(-x+1)\cdot(-x+1)}{x} & |\cdot x \quad \textit{(positiv)} \\
(x+4)\cdot x & \leq & (-x+1)^2 & \\
x^2+4x & \leq & x^2-2x+1 & |-x^2+2x \\
6x & \leq & 1 & |:6 \\
x & \leq & \frac{1}{6} & \\
L_3 & = & \{0 < x \leq \frac{1}{6}\} &
\end{array}$$

Nebenstehend ist die Bedingung für den untersuchten Bereich (Bed.) und das Ergebnis der Rechnung (Erg.) dargestellt. Das Ergebnis liegt teilweise im untersuchten Bereich, beide Bereiche überschneiden sich. Daher liegt im Überschneidungsbereich die Lösungsmenge (L_3).

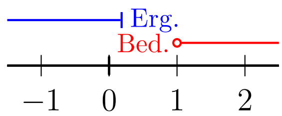


<u>Untersuchung für $x > 1$:</u>

In diesem Bereich sind alle Betragsinhalte **positiv**. Beim Auflösen dieser Beträge entsteht daher kein Minuszeichen. Beide Nenner sind positiv.

$$\begin{array}{rcll}
\frac{|x+4|}{|x-1|} & \le & \frac{|x-1|}{x} & \\
\frac{x+4}{x-1} & \le & \frac{x-1}{x} & |\cdot(x-1) \qquad \textit{(positiv)} \\
x+4 & \le & \frac{(x-1)\cdot(x-1)}{x} & |\cdot x \qquad \textit{(positiv)} \\
(x+4)\cdot x & \le & (x-1)^2 & \\
x^2+4x & \le & x^2-2x+1 & |-x^2+2x \\
6x & \le & 1 & |:6 \\
x & \le & \frac{1}{6} & \\
L_4 & = & \{\ \} &
\end{array}$$

Nebenstehend ist die Bedingung für den untersuchten Bereich (Bed.) und das Ergebnis der Rechnung (Erg.) dargestellt. Die Lösungsmenge ist leer, da das Ergebnis **außerhalb** des untersuchten Bereiches liegt. Es gibt keine Überlappung.



Die Gesamtlösungsmenge ist gleich der Teillösungsmenge L_3, da alle anderen Teillösungsmengen leer sind.

$$\boxed{L = \{0 < x \le \tfrac{1}{6}\}}$$

3 Übungsaufgaben

3.1 Aufgabe 1

$$\frac{|2x+2|}{x+1} \leq 12$$

3.2 Aufgabe 2

$$\frac{|2x+1|}{|2x-1|} \leq 3$$

3.3 Aufgabe 3

$$\frac{4}{1-|2x+1|} \leq \frac{7}{2}$$

4 Lösungen der Übungsaufgaben

4.1 Aufgabe 1

$$\frac{|2x+2|}{x+1} \leq 12$$

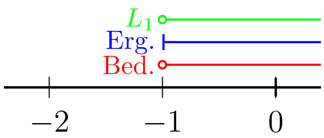
Zunächst wird der Definitionsbereich bestimmt. Der Nenner wird Null für $x = -1$.

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$$

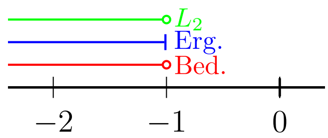
Der Betragsinhalt wechselt ebenfalls bei $x = -1$ sein Vorzeichen. Daher haben wir nur zwei Bereiche zu untersuchen, nämlich $x < -1$ und $x > -1$.

$$\frac{|2x+2|}{x+1} \leq 12 \quad | \cdot (x-2)$$

$$\begin{array}{rcl} & \underline{\text{für } x > -1:} & \\ +(2x+2) & \leq & 12 \cdot (x+1) \\ 2x+2 & \leq & 12x+12 \quad | -12x-2 \\ -10x & \leq & 10 \quad | : (-10) \\ x & \geq & -1 \\ L_1 & = & \{x | x > -1\} \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} & \underline{\text{für } x < -1:} & \\ -(2x+2) & \geq & 12 \cdot (x+1) \\ -2x-2 & \geq & 12x+12 \quad | -12x+2 \\ -14x & \geq & 14 \quad | : (-14) \\ x & \leq & -1 \\ L_2 & = & \{x | x < -1\} \end{array}$$



Fasst man beide Teillösungsmengen zusammen, dann gehören alle Reellen Zahlen außer der -1 zur Lösungsmenge.

$$\boxed{L = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$$

4.2 Aufgabe 2

$$\frac{|2x+1|}{|2x-1|} \leq 3$$

Zuerst wird der Definitionsbereich bestimmt. Der Nenner wird Null für $x = 0{,}5$.

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0{,}5\}}$$

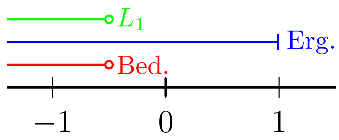
Der Betragsinhalt des Zählers wechselt sein Vorzeichen bei $x = -0{,}5$. Dadurch erhalten wir **drei** Bereiche, die untersucht werden müssen, nämlich $x < -0{,}5$ und $-0{,}5 < x < 0{,}5$ und $x \geq 0{,}5$. Aus Platzgründen untersuche ich die drei Bereiche nacheinander.

$\underline{\text{Untersuchung für } x < -0{,}5:}$

In diesem Bereich sind beide Betragsinhalte **negativ**. Beim Auflösen dieser Beträge entsteht daher überall Minuszeichen. Der Nenner ist wegen des Betrages positiv.

$$\begin{aligned}
\frac{|2x+1|}{|2x-1|} &\leq 3 \\
\frac{-(2x+1)}{-(2x-1)} &\leq 3 \\
\frac{-2x-1}{-2x+1} &\leq 3 && |\cdot(-2x+1) \\
-2x-1 &\leq 3\cdot(-2x+1) \\
-2x-1 &\leq -6x+3 && |+1+6x \\
4x &\leq 4 && |:4 \\
x &\leq 1 \\
L_1 &= \{x|x < -0{,}5\}
\end{aligned}$$

Nebenstehend ist die Bedingung für den untersuchten Bereich (Bed.) und das Ergebnis der Rechnung (Erg.) dargestellt. Das Ergebnis liegt teilweise im untersuchten Bereich, der untersuchte Bereich wird durch das Ergebnis komplett abgedeckt. Die Teillösungsmenge (L_1) ist identisch mit dem untersuchten Bereich.

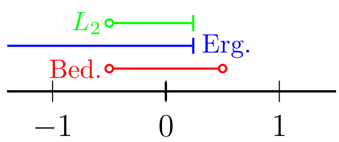


Untersuchung für $-0{,}5 < x < 0{,}5$:

In diesem Bereich ist der Betragsinhalt des Nenners **negativ**, der des Zählers **positiv**. Beim Auflösen entsteht daher im Nenner ein Minuszeichen, der Zähler bleibt positiv.

$$\begin{array}{rcll}
\frac{|2x+1|}{|2x-1|} & \leq & 3 & \\
\frac{+(2x+1)}{-(2x-1)} & \leq & 3 & \\
\frac{2x+1}{-2x+1} & \leq & 3 & |\cdot(-2x+1) \\
2x+1 & \leq & 3\cdot(-2x+1) & \\
2x+1 & \leq & -6x+3 & |-1+6x \\
8x & \leq & 2 & |:8 \\
x & \leq & 0{,}25 & \\
L_2 & = & \{x| -0{,}5 < x \leq 0{,}25\} &
\end{array}$$

Nebenstehend ist die Bedingung für den untersuchten Bereich (Bed.) und das Ergebnis der Rechnung (Erg.) dargestellt. Das Ergebnis liegt teilweise im untersuchten Bereich. Die Teillösungsmenge (L_2) liegt im Bereich der Überschneidung.

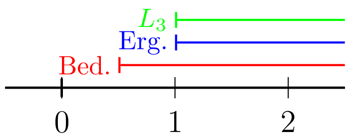


Untersuchung für $x \geq 0{,}5$:

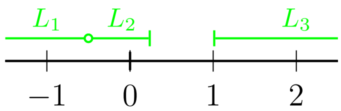
In diesem Bereich ist der Betragsinhalt beider Beträge **positiv**. Beim Auflösen bleiben daher beide Beträge positiv.

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{|2x+1|}{|2x-1|} & \leq & 3 & \\
\dfrac{+\,(2x+1)}{+(2x-1)} & \leq & 3 & \\
\dfrac{2x+1}{2x-1} & \leq & 3 & |\cdot(2x-1) \\
2x+1 & \leq & 3\cdot(2x11) & \\
2x+1 & \leq & 6x-3 & |-1-6x \\
-4x & \leq & -4 & |:(-4) \\
x & \geq & 1 & \\
L_3 & = & \{x|x \geq 1\} &
\end{array}$$

Nebenstehend ist die Bedingung für den untersuchten Bereich (Bed.) und das Ergebnis der Rechnung (Erg.) dargestellt. Das Ergebnis liegt komplett im untersuchten Bereich. Die Teillösungsmenge (L_3) ist also identisch mit dem Ergebnis.



Die gesamte Lösungsmenge besteht aus den drei Teillösungsmengen L_1 bis L_3. Dabei stoßen keine benachbarten Teillösungsmengen direkt aneinander. Eine vereinfachte Zusammenfassung ist daher nicht möglich.



$$\boxed{L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x|x < -0{,}5 \vee -0{,}5 < x \leq 0{,}25 \vee x \geq 1\}}$$

4.3 Aufgabe 3

$$\frac{4}{1-|2x+1|} \leq \frac{7}{2}$$

Zur Bestimmung des Definitionsbereiches muss zunächst der Nenner auf Nullstellen untersucht werden.

$$\begin{array}{rcll} 1-|2x+1| & = & 0 & |-1 \\ -|2x+1| & = & -1 & |\cdot(-1) \\ |2x+1| & = & 1 & \end{array}$$

Der Betragsinhalt ist **positiv** (oder =0) für $x \geq -0{,}5$ und **negativ** für $x < -0{,}5$. Wir benötigen also auch für diese Nebenrechnung eine **Fallunterscheidung**.

$$\begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x \geq -0{,}5:}} \\ |2x+1| & = & 1 & \\ 2x+1 & = & 1 & |-1 \\ 2x & = & 0 & |:2 \\ x & = & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \multicolumn{4}{c}{\underline{\text{für } x < -0{,}5:}} \\ |2x+1| & = & 1 & \\ -(2x+1) & = & 1 & \\ -2x-1 & = & 1 & |+1 \\ -2x & = & 2 & |:(-2) \\ x & = & -1 & \end{array}$$

Beide Ergebnisse liegen innerhalb des jeweils untersuchten Bereiches, also kann für beide Werte der Nenner Null werden. Beide müssen aus dem Definitionsbereich **ausgeschlossen** werden.

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}}$$

Wie wir oben schon gesehen haben, wechselt der Betragsinhalt bei $x = -0{,}5$ sein Vorzeichen. Hier liegt also eine weitere Grenze für die notwendigen Fallunterscheidungen für die Lösung. Diese Bereiche sind demnach zu untersuchen:

$$x < -1 \qquad -1 < x < -0{,}5 \qquad -0{,}5 \leq x < 0 \qquad x > 0$$

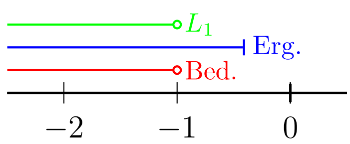
Aus Platzgründen führe ich die Fallunterscheidungen nacheinander durch.

Untersuchung für $x < -1$:

In diesem Bereich ist der Betragsinhalt **negativ**, beim Auflösen muss also das Vorzeichen vor dem Betrag **gewechselt** werden.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{1-|2x+1|} &\leq \frac{7}{2} \\
\frac{4}{1+(2x+1)} &\leq \frac{7}{2} \\
\frac{4}{1+2x+1} &\leq \frac{7}{2} \\
\frac{4}{2x+2} &\leq \frac{7}{2} && |\cdot(2x+2) \quad (\textit{negativ}) \\
4 &\geq \frac{7}{2}\cdot(2x+2) \\
4 &\geq \frac{14x+14}{2} \\
4 &\geq 7x+7 && |-7 \\
-3 &\geq 7x && |:7 \\
-\frac{3}{7} &\geq x \\
x &\leq -\frac{3}{7} \\
L_1 &= \{x|x<-1\}
\end{aligned}$$

Nebenstehend ist die Bedingung für den untersuchten Bereich (Bed.) und das Ergebnis der Rechnung (Erg.) dargestellt. Das Ergebnis ragt noch über den untersuchten Bereich hinaus. Die Teillösungsmenge (L_1) ist also identisch mit dem untersuchten Bereich.

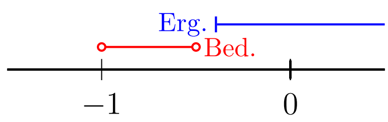


Untersuchung für $-1 < x < -0{,}5$:

In diesem Bereich ist der Betragsinhalt **negativ**, beim Auflösen muss also das Vorzeichen vor dem Betrag **gewechselt** werden.

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{4}{1-|2x+1|} & \leq & \dfrac{7}{2} & \\
\dfrac{4}{1+(2x+1)} & \leq & \dfrac{7}{2} & \\
\dfrac{4}{1+2x+1} & \leq & \dfrac{7}{2} & \\
\dfrac{4}{2x+2} & \leq & \dfrac{7}{2} & |\cdot(2x+2) \quad (\textit{positiv}) \\
4 & \leq & \dfrac{7}{2}\cdot(2x+2) & \\
4 & \leq & \dfrac{14x+14}{2} & \\
4 & \leq & 7x+7 & |-7 \\
-3 & \leq & 7x & |:7 \\
-\dfrac{3}{7} & \leq & x & \\
x & \geq & -\dfrac{3}{7} \approx -0{,}429 & \\
L_2 & = & \{\ \} &
\end{array}$$

Nebenstehend ist die Bedingung für den untersuchten Bereich (Bed.) und das Ergebnis der Rechnung (Erg.) dargestellt. Das Ergebnis liegt komplett außerhalb des untersuchten Bereiches. Die Teillösungsmenge (L_2) ist also leer.

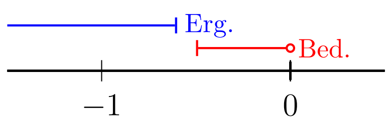


<u>Untersuchung für $-0{,}5 \leq x < 0$:</u>

In diesem Bereich ist der Betragsinhalt **positiv**, beim Auflösen muss also das Vorzeichen vor dem Betrag **erhalten** bleiben.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{1-|2x+1|} &\leq \frac{7}{2} \\
\frac{4}{1-(2x+1)} &\leq \frac{7}{2} \\
\frac{4}{1-2x-1} &\leq \frac{7}{2} \\
\frac{4}{-2x} &\leq \frac{7}{2} && |\cdot(-2x) \quad (\textit{positiv}) \\
4 &\leq \frac{7}{2}\cdot(-2x) \\
4 &\leq \frac{-14x}{2} \\
4 &\leq -7x && |:(-7) \\
-\frac{4}{7} &\geq x \\
x &\leq -\frac{4}{7} \approx -0{,}571 \\
L_3 &= \{\ \}
\end{aligned}$$

Nebenstehend ist die Bedingung für den untersuchten Bereich (Bed.) und das Ergebnis der Rechnung (Erg.) dargestellt. Das Ergebnis liegt komplett außerhalb des untersuchten Bereiches. Die Teillösungsmenge (L_3) ist also leer.

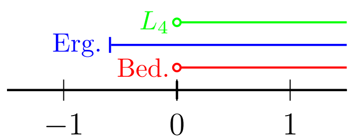


Untersuchung für $x > 0$:

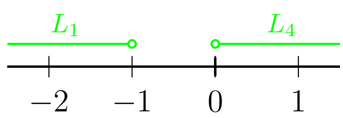
In diesem Bereich ist der Betragsinhalt **positiv**, beim Auflösen muss also das Vorzeichen vor dem Betrag **erhalten** bleiben.

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{4}{1-|2x+1|} & \leq & \dfrac{7}{2} & \\
\dfrac{4}{1-(2x+1)} & \leq & \dfrac{7}{2} & \\
\dfrac{4}{1-2x-1} & \leq & \dfrac{7}{2} & \\
\dfrac{4}{-2x} & \leq & \dfrac{7}{2} & \quad | \cdot (-2x) \quad (negativ) \\
4 & \geq & \dfrac{7}{2} \cdot (-2x) & \\
4 & \geq & \dfrac{-14x}{2} & \\
4 & \geq & -7x & \quad | : (-7) \\
-\dfrac{4}{7} & \leq & x & \\
x & \geq & -\dfrac{4}{7} \approx -0{,}571 & \\
L_4 & = & \{x | x > 0\} &
\end{array}
$$

Nebenstehend ist die Bedingung für den untersuchten Bereich (Bed.) und das Ergebnis der Rechnung (Erg.) dargestellt. Das Ergebnis ragt noch über den untersuchten Bereich hinaus. Die Teillösungsmenge (L_4) ist also identisch mit dem untersuchten Bereich.



Da die Teillösungsmengen L_2 und L_3 leer sind, besteht die Gesamtlösungsmenge nur aus L_1 und L_4. Dabei stoßen die beiden Teillösungsmengen nicht direkt aneinander. Eine vereinfachte Zusammenfassung ist daher nicht möglich.



$$\boxed{L = L_1 \cup L_4 = \{x | x < -1 \vee x > 0\}}$$