Gemischte Ungleichungen mit Brüchen und Beträgen

Wolfgang Kippels

6. September 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Grundsätzliche Vorgehensweise an einem Beispiel **3**

1 Einleitung

Zum Verständnis der nachfolgenden Ausführungen sind Kenntnisse zu Ungleichungen und zu Beträgen erforderlich. Eine Anleitung zu Ungleichungen finden Sie hier:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/ungleich.pdf

Eine Anleitung zum Rechnen mit Beträgen finden Sie hier:

http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/betrag.pdf

2 Grundsätzliche Vorgehensweise an einem Beispiel

Anhand des nachfolgenden Beispiels wollen wir uns eine mögliche Vorgehensweise ansehen.

$$\frac{|x+4|}{|x-1|} \leq \frac{|x-1|}{x}$$

Zunächst wir der Definitionsbereich bestimmt. Aus den Nennernullstellen ergibt sich:

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}}$$

Bei einer Ungleichung dieser Art ist es sinnvoll, zunächst alle Grenzen zu bestimmen, bei denen Betragsinhalte und/oder Nenner das Vorzeichen wechseln. Dann können die sich ergebenden Bereiche einzeln untersucht werden. Die Nennernullstellen sind schon in den Definitionslücken erkennbar. Der Nenner des linken Bruches ist gleichzeitig als Betragsinhalt im rechten Zähler enthalten. Bleibt also nur noch der linke Zähler. $(x+4)$ wird Null für $x = -4$. Wir erhalten also vier zu untersuchende Bereiche:

1. $x < -4$
2. $-4 \leq x < 0$
3. $0 < x < 1$
4. $x > 1$

Diese Bereiche werden nun einzeln nacheinander untersucht.

$$\underline{\text{Untersuchung für } x < -4:}$$

$$\begin{array}{rcll}
\frac{|x+4|}{|x-1|} & \leq & \frac{|x-1|}{x} & \\
\frac{-(x+4)}{-(x-1)} & \leq & \frac{-(x-1)}{x} & \\
\frac{-x-4}{-x+1} & \leq & \frac{-x+1}{x} & |\cdot(-x+1) \quad \textit{(positiv)} \\
-x-4 & \leq & \frac{(-x+1)\cdot(-x+1)}{x} & |\cdot x \quad \textit{(negativ)} \\
(-x-4)\cdot x & \geq & (-x+1)\cdot(-x+1) & \\
-x^2-4x & \geq & x^2-2x+1 & |-x^2+2x-1 \\
-2x^2-2x-1 & \geq & 0 & |\cdot(-2) \quad \textit{(negativ)} \\
x^2+x+\frac{1}{2} & \leq & 0 & |-\frac{1}{2} \\
x^2+x & \leq & -\frac{1}{2} & |+\left(\frac{1}{2}\right) \\
x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2 & \leq & -\frac{1}{2}+\frac{1}{4} & \\
\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 & \leq & -\frac{1}{4} & \\
x+\frac{1}{2} & \leq & \left|\sqrt{-\frac{1}{4}}\right| & \\
L_1 & = & \{\ \} &
\end{array}$$

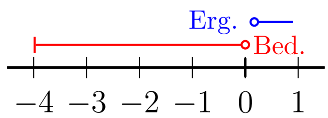
Die Lösungsmenge ist leer, da das Ergebnis der Wurzel **nicht reell** ist.

<u>Untersuchung für $-4 \leq x < 0$:</u>

In diesem Bereich sind nur die beiden gleichen Betragsinhalte **negativ**. Beim Auflösen dieser Beträge entsteht daher ein Minuszeichen. Bei einer Multiplikation mit einem Nenner muss man prüfen, ob der Nenner positiv ist oder nicht. Ist er negativ, kehrt sich das Ungleichungszeichen um.

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{|x+4|}{|x-1|} & \leq & \dfrac{|x-1|}{x} & \\
\dfrac{x+4}{-(x-1)} & \leq & \dfrac{-(x-1)}{x} & \\
\dfrac{x+4}{-x+1} & \leq & \dfrac{-x+1}{x} & |\cdot(-x+1) \quad \textit{(positiv)} \\
x+4 & \leq & \dfrac{(-x+1)\cdot(-x+1)}{x} & |\cdot x \qquad\qquad \textit{(negativ)} \\
(x+4)\cdot x & \geq & (-x+1)^2 & \\
x^2+4x & \geq & x^2-2x+1 & |-x^2+2x \\
6x & \geq & 1 & |:6 \\
x & \geq & \frac{1}{6} & \\
L_2 & = & \{\ \} &
\end{array}
$$

Nebenstehend ist die Bedingung für den untersuchten Bereich (Bed.) und das Ergebnis der Rechnung (Erg.) dargestellt. Die Lösungsmenge ist leer, da das Ergebnis **außerhalb** des untersuchten Bereiches liegt. Die Bereiche überschneiden sich nicht.

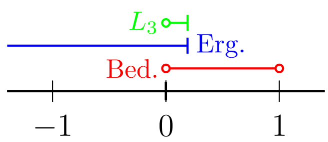


Untersuchung für $0 < x < 1$:

In diesem Bereich sind nur die beiden gleichen Betragsinhalte **negativ**. Beim Auflösen dieser Beträge entsteht daher ein Minuszeichen. Beide Nenner sind positiv.

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{|x+4|}{|x-1|} & \leq & \frac{|x-1|}{x} & \\
\frac{x+4}{-(x-1)} & \leq & \frac{-(x-1)}{x} & \\
\frac{x+4}{-x+1} & \leq & \frac{-x+1}{x} & | \cdot (-x+1) \quad \textit{(positiv)} \\
x+4 & \leq & \frac{(-x+1)\cdot(-x+1)}{x} & | \cdot x \quad \textit{(positiv)} \\
(x+4)\cdot x & \leq & (-x+1)^2 & \\
x^2+4x & \leq & x^2-2x+1 & | - x^2 + 2x \\
6x & \leq & 1 & | : 6 \\
x & \leq & \frac{1}{6} & \\
L_3 & = & \{0 < x \leq \frac{1}{6}\} &
\end{array}
$$

Nebenstehend ist die Bedingung für den untersuchten Bereich (Bed.) und das Ergebnis der Rechnung (Erg.) dargestellt. Das Ergebnis liegt teilweise im untersuchten Bereich, beide Bereiche überschneiden sich. Daher liegt im Überschneidungsbereich die Lösungsmenge (L_3).

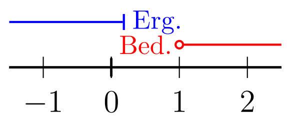


Untersuchung für $x > 1$:

In diesem Bereich sind alle Betragsinhalte **positiv**. Beim Auflösen dieser Beträge entsteht daher kein Minuszeichen. Beide Nenner sind positiv.

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{|x+4|}{|x-1|} & \leq & \dfrac{|x-1|}{x} & \\
\dfrac{x+4}{x-1} & \leq & \dfrac{x-1}{x} & |\cdot(x-1) \quad \textit{(positiv)} \\
x+4 & \leq & \dfrac{(x-1)\cdot(x-1)}{x} & |\cdot x \quad \textit{(positiv)} \\
(x+4)\cdot x & \leq & (x-1)^2 & \\
x^2+4x & \leq & x^2-2x+1 & |-x^2+2x \\
6x & \leq & 1 & |:6 \\
x & \leq & \frac{1}{6} & \\
L_4 & = & \{\ \} &
\end{array}
$$

Nebenstehend ist die Bedingung für den untersuchten Bereich (Bed.) und das Ergebnis der Rechnung (Erg.) dargestellt. Die Lösungsmenge ist leer, da das Ergebnis **außerhalb** des untersuchten Bereiches liegt. Es gibt keine Überlappung.



Die Gesamtlösungsmenge ist gleich der Teillösungsmenge L_3, da alle anderen Teillösungsmengen leer sind.

$$\boxed{L = \{0 < x \leq \tfrac{1}{6}\}}$$

(Übungsaufgaben folgen später.)