Mengenlehre

Wolfgang Kippels

17. September 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Vorweg: Oft gibt es Probleme mit der Mengenlehre, weil man versucht, einen tieferen Sinn darin zu finden. Den gibt es aber nicht! Und wenn man den nicht sieht, glaubt man, man habe das nicht verstanden. Die Mengenlehre basiert eigentlich nur auf der Faulheit der Mathematiker. Sie wollten eine einfache Schreibweise ohne viele Worte für bestimmte Zusammenhänge haben.

1.1 Allgemeiner Mengenbegriff

Die Definition für eine Menge lautet:

> ***Eine Menge ist eine Zusammenfassung gleichartiger Dinge (Elemente genannt) zu einer Gesamtheit (Menge genannt).***

Umgangssprachlich bedeutet „Menge“ so etwas wie „ziemlich viel“. Diese Bedeutung gilt hier ausdrücklich **nicht**, eine mathematische Menge kann auch nur ein einziges, oder sogar gar kein Element enthalten.

Hier kommt der Begriff der „**Mächtigkeit**“ einer Menge ins Spiel.

> *Die **Mächtigkeit** einer Menge ist die Zahl der Elemente der Menge.*

Mengen werden üblicherweise mit Großbuchstaben bezeichnet. Man kann sie in **aufzählender** oder in **beschreibender** Form angeben. Die Elemente werden dabei in geschweifte Klammern $\{\dots\}$ gesetzt. In der aufzählenden Form werden die Elemente durch Semikola (Plural von Semikolon) voneinander getrennt.

Anmerkung: In mancher Literatur wird auch das einfache Komma als Trennzeichen beim Aufzählen verwendet, dann sind allerdings keine Dezimalzahlen als Elemente möglich. Deshalb ist heute das Semikolon als Trennzeichen üblich.

Die Reihenfolge in der Aufzählung spielt übrigens **keine** Rolle, die Menge $\{1; 2; 3\}$ ist gleich der Menge $\{3; 1; 2\}$.

Am besten lässt sich der Mengenbegriff durch ein paar Beispiele verdeutlichen.

Menge aller Ziffern: Diese Menge enthält genau 10 Elemente, nämlich die Ziffern von 0 bis 9. Das schreibt man in aufzählender Form so:
$Z = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
Es ist natürlich zweckmäßig, durch diese Reihenfolge eine gewisse Ordnung hineinzubringen, notwendig ist das aber nicht.

Menge aller Wochentage: Das geht am besten in aufzählender Form:
$W = \{$Montag; Dienstag; Mittwoch; Donnerstag; Freitag; Samstag; Sonntag$\}$

Menge aller Planeten unseres Sonnensystems: Auch hier bietet sich die aufzählende Form an.
$P =${Merkur; Venus; Erde; Mars; Jupiter; Saturn; Uranus; Neptun}
(Der Pluto gehört übrigens nicht mehr dazu, er wurde „wegdefiniert“ als Kleinplanet.)

Menge aller Menschen: Hier fällt die aufzählende Form schwer. Theoretisch könnte man alle zirca 3 Milliarden Namen aufzählen, praktisch müsste die Liste jede Sekunde geändert werden, weil ständig irgendwo ein Mensch stirbt oder geboren wird. Weil es immerhin theoretisch möglich ist, haben wir hier tatsächlich eine Menge im mathematischen Sinne.

Menge aller Sterne: Hier ist die aufzählende Form nicht mehr möglich, weil es immer noch Myriaden unentdeckter Sterne gibt. Weil aber immerhin entscheidbar wäre, ob irgendetwas ein Stern ist oder nicht, liegt auch hier eine Menge im mathematischen Sinne vor.

Menge aller 200-jährigen Menschen: Nach meinem Kenntnisstand ist noch niemand so alt geworden. Trotzdem liegt hier eine Menge vor, und zwar eine **Leere Menge**. Darunter versteht man eine Menge, die **keine** Elemente enthält. Das schreibt man so:
$M = \{\ \}$ oder als alternative Schreibweise: $M = \emptyset$.
Mir persönlich gefällt die erste Schreibweise besser, weil man da direkt sieht, dass die Menge leer ist. Meine Meinung ist aber nicht maßgeblich.

Menge der Lottozahlen, die nächsten Samstag gezogen werden: Natürlich wäre es schön, wenn wir diese sechs Zahlen aufzählen könnten! Auch wenn das nicht (jetzt) geht, ist dies eine Menge im mathematischen Sinne. Durch Beobachtung des Ziehungsgerätes nächsten Samstag lässt sich eindeutig feststellen, welche Zahlen dazugehören und welche nicht.

1.2 Zahlenmengen

In der Mathematik interessieren uns natürlich vorrangig **Zahlenmengen**. Das sind Mengen, deren Elemente Zahlen sind.

1.2.1 Spezielle Zahlenmengen

In der Mathematik gibt es einige spezielle Zahlenmengen. Gekennzeichnet werden sie mit speziellen Buchstaben. Diese Buchstaben enthalten einen zusätzlichen senkrechten Strich. Dies wollen wir uns einmal im Einzelnen genauer ansehen.

Natürliche Zahlen: In der Grundschule haben wir mit den natürlichen Zahlen begonnen. Dies sind die Zahlen, mit denen man zählen kann, also 1, 2, 3 und so weiter. Heute

zählt man aber meist die 0 auch zu den natürlichen Zahlen.[1] In Druckschrift wird diese Zahlenmenge mit einem $\mathbb{N}$ gekennzeichnet. In der Schreibschrift verdoppelt man den vorderen senkrechten Strich. etwa so: $\mathbb{N}$
Neben der Menge $\mathbb{N}$ als Menge aller Natürlichen Zahlen gibt es noch die Menge $\mathbb{N}^*$.[2] Das ist die Menge der Natürlichen Zahlen **ohne die Null**. Hier hat man die Null aus der Menge entfernt, alle anderen Zahlen sind noch mit dabei.

Ganze Zahlen: Beim Rechnen mit Natürlichen Zahlen sind wir bei der Subtraktion, z.B. $4 - 5 = -1$, auf das Problem gestoßen, dass das Ergebnis keine Natürliche Zahl mehr ist. Nehmen wir die Negativen Zahlen mit zu den Natürlichen Zahlen dazu, dann erhalten wir eine Zahlenmenge, die man **Ganze Zahlen** nennt. Die Menge der Ganzen Zahlen wird mit einem $\mathbb{Z}$ gekennzeichnet. In Schreibschrift sieht es so ähnlich aus: $\mathbb{Z}$
Auch hier gibt es noch Untermengen. Nimmt man die Null aus den Ganzen Zahlen heraus, nennt man diese Menge $\mathbb{Z}^*$. Möchte man nur die Negativen Zahlen aus der Menge der ganzen Zahlen betrachten, dann nennt man diese Menge $\mathbb{Z}^-$. Sinngemäß könnte man die Positiven Ganzen Zahlen mit $\mathbb{Z}^+$ bezeichnen, dies ist jedoch identisch mit der Menge $\mathbb{N}^*$.

Rationale Zahlen: Rechnet man mit den Ganzen Zahlen, dann kommt man spätestens beim Dividieren auf Ergebnisse, die keine Ganzen Zahlen mehr sind, die Brüche. Nimmt man alle Zahlen, die als ganzzahliger Bruch dargestellt werden können, zu den Ganzen Zahlen hinzu, dann erhält man die Menge der **Rationalen Zahlen**, Kennzeichnung durch $\mathbb{Q}$. In Schreibschrift sieht es so aus: $\mathbb{Q}$

Reelle Zahlen: Es gibt nun auch Zahlen, die nicht als ganzzahliger Bruch darstellbar sind. Das sind die Nichtperiodischen Dezimalzahlen wie etwa die Kreiszahl $\pi \approx 3{,}141\,592\,653\,59$ oder die Eulersche Zahl $e \approx 2{,}718\,281\,828\,459\,045$. Auch viele Wurzeln ergeben Nichtperiodische Dezimalzahlen, die nicht als ganzzahliger Bruch dargestellt werden können. Nimmt man diese noch zu den Rationalen Zahlen hinzu, dann erhält man die Menge der **Reellen Zahlen**. Gekennzeichnet werden die Reellen Zahlen durch das Zeichen $\mathbb{R}$. In der Schreibschrift sieht das Zeichen so aus: $\mathbb{R}$

Die Menge der Reellen Zahlen ist übrigens die **Grundmenge** für alle unsere mathematischen Aktionen, solange nichts ausdrücklich etwas anderes gesagt wird. Mehr dazu folgt etwas später in diesem Skript.

[1] Dies wird in der Literatur nicht einheitlich so bezeichnet. Manchmal findet man auch die Definition, dass die 0 **nicht** zu $\mathbb{N}$ dazugehört. Nimmt man die 0 dazu, wird dann dafür die Bezeichnung $\mathbb{N}_0$ verwendet.

[2] Wie eben erwähnt, gibt es auch Literatur, wo diese Menge mit $\mathbb{N}$ bezeichnet wird.

Andere Zahlenmengen: Darüber hinaus gibt es beispielsweise auch noch Imaginäre und Komplexe Zahlen[3] mit den Kennzeichnungen $\mathbb{I}$ und $\mathbb{C}$, auf die an dieser Stelle aber nicht eingegangen werden soll.

1.2.2 Zahlenmengen in aufzählender Form

Bei Zahlenmengen gibt es unterschiedliche Darstellungsformen in der aufzählenden Form. Am einfachsten ist das an Beispielen zu erklären.

Menge der natürlichen Zahlen von 4 bis 7: Die aufzählende Form ist bekannt:
$A = \{4; 5; 6; 7\}$
Hier können problemlos **alle** Elemente angegeben werden, weil es nicht zu viele sind.

Die Menge, die nur die Zahl 7 enthält: Das ist trivial, die Menge lautet in aufzählender Form:
$B = \{7\}$

Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100: Die aufzählende Form ist hier möglich, aber etwas aufwändig. Eine verkürzte Form bietet sich hier an:
$C = \{1; 2; 3; \ldots; 99; 100\}$
Sofern ein System erkennbar ist, wie die nächsten Zahlen gebildet werden, kann man durch **drei** (nicht vier, nicht zwei!) Punkte die Aufzählung unterbrechen und danach das Ende der Aufzählung angeben.

Die Menge aller ungraden natürlichen Zahlen: Hier haben wir eine **unendliche** Menge, es gibt unendlich viele Elemente. Es ist also unmöglich, alle aufzuzählen. Man bricht hier mit **drei** Punkten ab, sobald ein System erkennbar ist.
$D = \{1; 3; 5; 7; \ldots\}$

Die Menge aller Zehnerpotenzen: Auch hier gibt es unendlich viele Elemente, alledings gibt es hier weder einen Anfang, noch ein Ende. Man deutet das durch **drei** Punkte vorn und hinten an:
$E = \{\ldots; 10^{-3}; 10^{-2}; 10^{-1}; 10^{0}; 10^{1}; 10^{2}; 10^{3}; \ldots\}$
Möglich wäre allerdings auch diese Form:
$E = \{10^{0}; 10^{1}; 10^{-1}; 10^{2}; 10^{-2}; 10^{3}; 10^{-3}; \ldots\}$
Auch hier ist klar, wie es weiter geht.

1.2.3 Zahlenmengen in beschreibender Form

Zum Beschreiben ist die Kenntnis bestimmte Zeichen nötig. Da sind beispielsweise die Ungleichungszeichen $<$, $>$, $\leq$ und $\geq$ sowie die Zeichen $\vee$ und $\wedge$ aus der Booleschen Algebra. Diese Zeichen möchte ich vorweg kurz erklären.

[3]Einzelheiten dazu siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/komplgl.pdf

$$x > 3$$

Was bedeutet das? Gesprochen wird das als „x größer 3“. Damit sind alle x-Werte gemeint, die – wie gesagt – größer als 3 sind, also beispielsweise die 4, die 1027, die 3,001 oder die Zahl π, aber nicht mehr die 3. Soll die 3 auch dazugehören, dann schreibt man:

$$x \geq 3$$

Das wird gesprochen als „x größer gleich 3“. Das bedeutet, x kann größer als 3 sein, kann aber auch gleich 3 sein. Es darf nur nicht kleiner sein.

Wie kann ich mir die Bedeutung des Zeichens merken? Die Zeichen $>$ und $<$ sehen ja sehr ähnlich aus. Nun, das ist recht einfach:

Merkregel: Die **größere** Zahl steht immer am **größeren** Ende des Zeichens.

Hier ein paar Beispiele:

5	$>$	3	ist richtig
4	$<$	2	ist falsch
π	$<$	$3{,}2$	ist richtig
8	$\leq$	8	ist richtig
8	$\geq$	8	ist richtig
8	$>$	8	ist falsch
2	$\geq$	-5	ist richtig
-4	$\leq$	-3	ist richtig
4	$\leq$	3	ist falsch
-100	$>$	-101	ist richtig
$\frac{3}{7}$	$>$	$0{,}428$	ist richtig

Die Zeichen $\vee$ und $\wedge$ verknüpfen **Aussagen** miteinander. Was aber ist eine Aussage? Eine Aussage im mathematischen Sinn ist ein Ausdruck, bei dem festgestellt werden kann, ob er wahr oder falsch ist.

Beispiel:

$$3 < 4$$

Dies ist eine wahre Aussage, denn 3 ist tatsächlich kleiner als 4.

Noch ein Beispiel:

$$7 \geq 8$$

Auch das ist eine Aussage, aber eine falsche Aussage. 7 ist eben nicht größer oder gleich 8.

Ein weiteres Beispiel:

$$x < 9$$

Dies ist **keine** Aussage. Es hängt nämlich von der Variablen x ab, ob es wahr oder falsch wird. Je nachdem, welche Zahl man für x einsetzt, wird es wahr oder falsch. Man nennt so etwas eine **Aussageform**.

Wieder ein Beispiel:

$$2 + 4$$

Auch das ist **keine** Aussage, nicht einmal eine Aussageform. Es gibt nichts, was man auf Richtigkeit prüfen kann. Diesen mathematischen Ausdruck nennt man Term.

Kommen wir nun zur Verknüpfung von Aussagen. Hier steht das Zeichen $\vee$[4] für **oder (im nicht ausschließenden Sinn!)**, und das Zeichen $\wedge$[5] für das **und**. Am besten lässt sich das vermutlich an Beispielen erläutern.

Beginnen wir mit der Oder-Verknüpfung.

$$x < 3 \vee x > 5$$

Dargestellt sind so alle Zahlen, die kleiner als 3 **oder** größer als 5 sind, beispielsweise die 2, die 1,7, die -19, die 17, die 512, aber **nicht** die Zahlen 3, π, 4,7 oder 5. Es genügt, dass eine der beiden Teilaussagen wahr ist.

$$x > 3 \vee x > 5$$

Hier werden alle Zahlen erfasst, die größer als 3 **oder** größer als 5 sind. Auf den ersten Blick erscheint das widersinnig, was ist beispielsweise mit der Zahl 10? Ist die 10 größer als 3 oder größer als 5? Sie ist beides gleichzeitig. Das Problem liegt in der Deutschen Sprache. Hier wird das Wort **oder** für eine **exclusive** (ausschließende) Bedeutung werwendet. **Oder** in der Sprache der Mathematik schließt aber **nicht** aus. Die Aussage

$$10 > 3 \vee 10 > 5$$

ist damit **wahr**. Beide Teilaussagen sind wahr, damit ist die Gesamtaussage erst recht war, auch wenn es schon genügt hätte, wenn eine der Teilaussagen wahr wäre. Nehmen wir die Zahl 4:

$$4 > 3 \vee 4 > 5$$

Diese Gesamtaussage ist wahr, weil $4 > 3$ schon eine wahre Aussage ist. Es spielt dann keine Rolle mehr, ob $4 > 5$ nun wahr oder falsch ist. Es hätte also die Aussageform $x > 3$ genügt, um alle Zahlen zu beschreiben, für die auch die ursprüngliche Aussageform eine wahre Aussage ergibt.

[4] Das Zeichen $\vee$ ist abgeleitet vom Lateinischen Wort *vel* für *oder*. Der erste Buchstabe von *vel* ähnelt dem Zeichen.

[5] Das Zeichen $\wedge$ ist abgeleitet vom Lateinischen Wort *aut* für *und*. Der erste Buchstabe von *aut* als Großbuchstabe ähnelt dem Zeichen.

Kommen wir nun zur Und-Verknüpfung.

$$x \geq 3 \wedge x < 5$$

Hier müssen beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein. In Worten sind hier alle Zahlen beschrieben, die *größer gleich 3* ***und*** *kleiner 5* sind. Oder noch deutlicher: Alle Zahlen, die **sowohl größer oder gleich 3 als auch kleiner als 5** sind. Hierzu gehören beispielsweise die Zahlen 3, π, 4 und 4,9, jedoch nicht die Zahlen 2, 0, 5 oder 10.

$$x < 4 \wedge x \leq 6$$

In diesem Beispiel sind alle x beschrieben, die kleiner als 4 **und** gleichzeitig auch kleiner oder gleich 6 sind. Hier hätte die erste Teilbedingung ausgereicht, denn das ist die schärfere Bedingung. Alle x, die kleiner als 4 sind, sind automatisch auch kleiner gleich 6.

$$x \leq 5 \wedge x > 7$$

Welche x sind kleiner oder gleich 5 **und** gleichzeitig auch größer als 7? Antwort: Keine!

$$x \leq 5 \wedge x \geq 5$$

Welche x sind kleiner oder gleich 5 **und** gleichzeitig auch größer oder gleich 5? Hier muss man ganz genau hinsehen, denn $x = 5$ erfüllt beide Bedingungen, wenn auch als einzige mögliche Zahl.

Für besondere Fälle gibt es noch eine abgekürzte und (wie ich finde) übersichtlichere Schreibweise. Wenn eine Variable x zwischen den Zahlen 10 und 20 liegen soll, könnte man das so darstellen:

$$x > 10 \wedge x < 20$$

x muss einerseits größer als 10 sein **und** gleichzeitig auch kleiner als 20. Die vereinfachte Schreibweise für den selben Zusammenhang sieht so aus:

$$10 < x < 20$$

Man hat hier einfach die Ungleichung $10 < x$ und die Ungleichung $x < 20$ direkt aneinander angekoppelt. Man sieht dann etwas anschaulich schon an der Reihenfolge, dass x zwischen 10 und 20 liegt.

Anmerkung: Für alle, die sich nicht merken können, welches Zeichen für *Und* bzw. für *Oder* steht, gibt es eine Merkregel als Eselsbrücke.

*Das Zeichen für **O**der ist **o**ben offen, das Zeichen für **U**nd ist **u**nten offen.*

Ein weiteres wichtiges Zeichen ist das Zeichen $\in$, gelesen als „**ist Element von**". Habe ich eine Menge $A = \{3; 5; 7; 9\}$, dann enthält diese Menge genau vier Elemente, nämlich die 3, die 5, die 7 und die 9. Man kann dann beispielsweise sagen:

$$3 \in A$$

Gelesen:„3 ist Element der Menge A." Das bedeutet, dass die Zahl 3 ein Element der besagten Menge ist. Gleichermaßen gilt natürlich auch:

$$5 \in A \qquad 7 \in A \qquad 9 \in A$$

Möchte man ausdrücken, dass die Zahl 6 **nicht** zu dieser Menge gehört, dann schreibt man das so:

$$6 \notin A$$

Damit haben wir alle fast Zeichen zusammen, die man für die beschreibende Form einer Menge benötigt. Nehmen wir als erstes Beispiel die Menge der Natürlichen Zahlen von 1 bis 100. Diese Menge könnte in beschreibender Form so aussehen:

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 100\}$$

Den ersten Teil müssen wir noch klären. Der Teil

$$\{x| \ldots\}$$

wird gelesen als:„**Die Menge aller x mit der Eigenschaft . . .** ". Dröseln wir das stückchenweise wie Vokabeln einer fremden Sprache auf.

	Zeichen:	**als Text:**
1.	$\{\quad\}$	Die Menge
2.	x	aller x
3.	$\vert$	mit der Eigenschaft

Im Einzelnen:

1. $\{\quad\}$: Die geschweiften Klammern als Mengenklammer kennen wir schon. In den Klammern stehen normalerweise die Elemente.

2. x: Der Buchstabe x wird hier als **Beschreibungsvariable** verwendet. Sie wird an dieser Stelle definiert und hinter dem Strich verwendet, um irgendwelche Sachverhalte zu beschreiben.

3. $|$: Hinter diesem Strich kommt/kommen die Bedingung(en), die für die Beschreibungsvariable x erfüllt sein muss/müssen, damit das jeweilige in Frage kommende Element tatsächlich zu der beschriebenen Menge gehört.

Zum besseren Verständnis sehen wir uns das an oben angegebenen Beispiel genauer an.

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 100\}$$

Hinter dem „Beschreibungsstrich“ stehen zwei Bedingungen, die mit einer Und-Verknüpfung (Zeichen $\wedge$) verbunden sind. Die erste Bedingung $x \in \mathbb{N}$ besagt, dass x eine natürliche Zahl sein muss. *(x ist Element der Menge* $\mathbb{N}$*).* Die zweite Bedingung ist ja, wie weiter vorne beschrieben, die Kurzform für $x \geq 1 \wedge x \leq 100$, also eigentlich schon eine Und-Verknüpfung aus zwei einzelnen Bedingungen. Wir wissen das aber schon zu deuten als den Zahlenbereich zwische 1 und 100 unter Einschluss der Grenzen.

Nun kann man einwenden, dass zur Darstellung dieser Menge A auch die aufzählende Form möglich ist. Das stimmt. Das sieht im nächsten Beispiel anders aus. Hier sollen alle **Reellen** Zahlen zur Menge B gehören, die zwischen 1 und 100 liegen. Das sind unendlich viele nicht aufzählbare Zahlen.
Diesmal soll die untere Grenze (die 1) zur Menge dazugehören, aber nicht die 100 an der oberen Grenze. Das kann man dann beispielsweise so schreiben:

$$B = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge 1 \leq x < 100\}$$

Anmerkung: Es ist üblich, dass man bei allen Zahlenmengen die Menge der Reellen Zahlen als Grundmenge[6] voraussetzt. Nur dann, wenn **nicht** die Menge der Reellen Zahlen die Grundmenge ist (wie im ersten Beispiel bei Menge A), muss man das explizit angeben. Bei der eben beschriebenen Menge B kann man also die Bedingung $x \in \mathbb{R}$ auch weglassen.

Ein klassisches Beispiel für eine Mengenangabe in beschreibender Form ist die Menge $\mathbb{Q}$, also die Menge aller Rationalen Zahlen (die Menge aller Zahlen, die sich als ganzzahliger Bruch darstellen lassen). Wir haben gesehen, dass hier ein Aufzählen der Elemente nicht ohne weiteres möglich ist. In beschreibender Form sähe das so aus:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x | x = \frac{p}{q} \wedge p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Hier haben wir in der Beschreibung hinter dem Beschreibungsstrich sogar drei Bedingungen, die alle mit Und-Verknüpfung verbunden sind, also gleichzeitig erfüllt sein müssen. In der ersten Bedingung steht, dass die Beschreibungsvariable x als Bruch darstellbar sein muss. Dabei werden gleich zwei neue Beschreibungsvariablen eingeführt und anschließend einzeln beschrieben. Das ist nötig, denn beispielsweise darf ja nicht $p = \pi$ sein. So ist $\frac{\pi}{2}$ zwar formal ein Bruch, aber trotzdem **keine** Rationale Zahl, weil π keine Ganze Zahl ist.

Im Nenner muss man aufpassen. Unbedarft denkt man vielleicht, dass hier auch jede Ganze Zahl zulässig ist, aber die Null (eine Ganze Zahl) darf **nicht** im Nenner stehen.

[6] Die Grundmenge ist die Menge der Zahlen, von denen man bei der jeweiligen Problemstellung ausgeht.

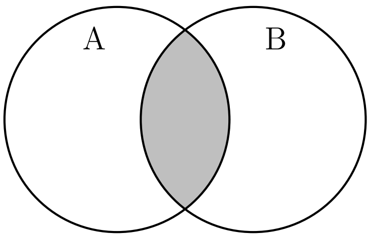
Mit $\mathbb{N}^*$ ist man da auf der sicheren Seite, die Null ist hier ja ausgeschlossen. Um auch negative Brüche zu erhalten (die gehören ja auch zur Menge $\mathbb{Q}$), genügt es, wenn der Zähler negativ wird. Dort haben wir ja die Menge $\mathbb{Z}$ vorgesehen, die auch die negativen Zahlen enthält.

1.3 Mengenoperationen

So, wie es in der Algebra Rechenoperationen wie Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren usw. gibt, gibt es bei Mengen auch Operationen.

1.3.1 Schnittmenge

Nebenstehend ist ein Schaubild für die **Schnittmenge** dargestellt. Man nennt ein solches Bild auch nach seinem Erfinder **Venn-Diagramm**. Die beiden Mengen A und B überlappen sich teilweise. In der Schnittmenge von A und B sind alle Elemente enthalten, die sowohl Element der Menge A als auch der Menge B sind. Das Zeichen für die Schnittmenge ist $\cap$. Wenn C die Schnittmenge der Mengen A und B ist, dann schreibt man das so:



Schnittmenge $A \cap B$

$$C = A \cap B$$

Gesprochen wird das als: ***A* geschnitten mit *B***. Die mathematisch saubere Definition für die Schnittmenge lautet:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Weil wir diese Symbolik eben erst gelernt haben, kommt diese Definition hier noch einmal im Klartext:

> *Die **Schnittmenge** der Mengen A und B ist die Menge aller x, mit der Eigenschaft, dass x Element der Menge A **und** x Element der Menge B ist.*

Zur Vertiefung des Gelernten folgen hier ein paar Übungsaufgaben.

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \{1;2;3;4;5\} \cap \{2;4;6;8;10\} & = & \dots \\
b) & \{10;15;20;25\} \cap \{2;4;6;8;10\} & = & \dots \\
c) & \{1;3;5;7;9\} \cap \{2;4;6;8;10\} & = & \dots \\
d) & \{3;5;7;9;11\} \cap \{5;7;9\} & = & \dots \\
e) & \{x|x \leq \pi\} \cap \{x|x \geq \pi\} & = & \dots \\
f) & \mathbb{Z} \cap \mathbb{N} & = & \dots \\
g) & \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} & = & \dots
\end{array}$$

Die Lösungen stehen auf der nächsten Seite.

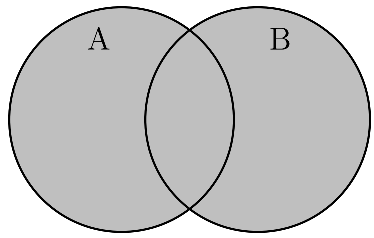
Hier die Lösungen der Übungsaufgaben:

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \{1;2;3;4;5\} \cap \{2;4;6;8;10\} & = & \{2;4\} \\
b) & \{10;15;20;25\} \cap \{2;4;6;8;10\} & = & \{10\} \\
c) & \{1;3;5;7;9\} \cap \{2;4;6;8;10\} & = & \{\ \} \\
d) & \{3;5;7;9;11\} \cap \{5;7;9\} & = & \{5;7;9\} \\
e) & \{x|x \leq \pi\} \cap \{x|x \geq \pi\} & = & \{\pi\} \\
f) & \mathbb{Z} \cap \mathbb{N} & = & \mathbb{N} \\
g) & \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} & = & \mathbb{Z}
\end{array}$$

1.3.2 Vereinigungsmenge

Nebenstehend ist ein Venn-Diagramm für die **Vereinigungsmenge** dargestellt. Die beiden Mengen A und B überlappen sich teilweise. In der Vereinigungsmenge von A und B sind alle Elemente enthalten, die Element der Menge A oder der Menge B sind. Das Zeichen für die Schnittmenge ist $\cup$. Wenn C die Vereinigungsmenge der Mengen A und B ist, dann schreibt man das so:

$$C = A \cup B$$



Vereinigungsmenge $A \cup B$

Gesprochen wird das als: ***A* vereinigt mit *B***. Die mathematisch saubere Definition für die Vereinigungsmenge lautet:

$$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$$

Weil wir diese Symbolik eben erst gelernt haben, kommt diese Definition hier noch einmal im Klartext:

> *Die **Vereinigungsmenge** der Mengen A und B ist die Menge aller x, mit der Eigenschaft, dass x Element der Menge A **oder** x Element der Menge B ist.*

Anmerkung: Bei der **Schnittmenge** mit dem Zeichen $\cap$ kommt in der Definition das **Und**-Zeichen $\wedge$ vor, bei der **Vereinigungsmenge** mit dem Zeichen $\cup$ steht in der Definition das Zeichen $\vee$. Man beachte, dass jedesmal beide Zeichen die gleiche Orientierung haben (oben bzw. unten offen). Ansonsten sind die Definitionen identisch.

Zur Vertiefung des Gelernten folgen hier ein paar Übungsaufgaben.

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \{1;2;3;4;5\} \cup \{2;4;6;8;10\} & = & \ldots \\
b) & \{10;15;20;25\} \cup \{2;4;6;8;10\} & = & \ldots \\
c) & \{1;3;5;7;9\} \cup \{2;4;6;8;10\} & = & \ldots \\
d) & \{3;5;7;9;11\} \cup \{5;7;9\} & = & \ldots \\
e) & \{x|x \leq \pi\} \cup \{x|x \geq \pi\} & = & \ldots \\
f) & \mathbb{Z} \cup \mathbb{N} & = & \ldots \\
g) & \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} & = & \ldots
\end{array}$$

Die Lösungen stehen auf der nächsten Seite.

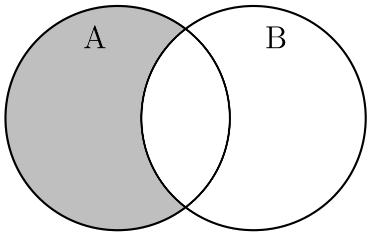
Hier die Lösungen der Übungsaufgaben:

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \{1;2;3;4;5\} \cup \{2;4;6;8;10\} & = & \{1;2;3;4;5;6;8;10\} \\
b) & \{10;15;20;25\} \cup \{2;4;6;8;10\} & = & \{2;4;6;8;10;15;20;25\} \\
c) & \{1;3;5;7;9\} \cup \{2;4;6;8;10\} & = & \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\} \\
d) & \{3;5;7;9;11\} \cup \{5;7;9\} & = & \{3;5;7;9;11\} \\
e) & \{x|x \leq \pi\} \cup \{x|x \geq \pi\} & = & \mathbb{R} \\
f) & \mathbb{Z} \cup \mathbb{N} & = & \mathbb{Z} \\
g) & \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} & = & \mathbb{Q}
\end{array}$$

1.3.3 Restmenge

Nebenstehend ist ein Venn-Diagramm für die **Restmenge** dargestellt. Die beiden Mengen A und B überlappen sich teilweise. In der Restmenge von A **ohne** B sind alle Elemente enthalten, die Element der Menge A aber nicht der Menge B sind. Das Zeichen für die Restmenge ist \. Manche nennen das auch „Minuszeichen für Mengen“. Wenn C die Restmenge der Menge A ohne B ist, dann schreibt man das so:

$$C = A \setminus B$$



Restmenge $A \setminus B$

Gesprochen wird das als: ***A ohne B***. Die mathematisch saubere Definition für die Restmenge lautet:

$$A \setminus B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$$

Weil wir diese Symbolik eben erst gelernt haben, kommt diese Definition hier noch einmal im Klartext: *Die Restmenge der Menge A ohne Menge B ist die Menge aller x, mit der Eigenschaft, dass x Element der Menge A und x nicht Element der Menge B ist.*

Zur Vertiefung des Gelernten folgen hier ein paar Übungsaufgaben.

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \{1;2;3;4;5\} \setminus \{2;4;6;8;10\} & = & \ldots \\
b) & \{10;15;20;25\} \setminus \{2;4;6;8;10\} & = & \ldots \\
c) & \{1;3;5;7;9\} \setminus \{2;4;6;8;10\} & = & \ldots \\
d) & \{3;5;7;9;11\} \setminus \{5;7;9\} & = & \ldots \\
e) & \{x|x \leq \pi\} \setminus \{x|x \geq \pi\} & = & \ldots \\
f) & \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} & = & \ldots \\
g) & \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q} & = & \ldots
\end{array}$$

Die Lösungen stehen auf der nächsten Seite.

Hier die Lösungen der Übungsaufgaben:

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \{1;2;3;4;5\} \setminus \{2;4;6;8;10\} & = & \{1;3;5\} \\
b) & \{10;15;20;25\} \setminus \{2;4;6;8;10\} & = & \{15;20;25\} \\
c) & \{1;3;5;7;9\} \setminus \{2;4;6;8;10\} & = & \{1;3;5;7;9\} \\
d) & \{3;5;7;9;11\} \setminus \{5;7;9\} & = & \{3;11\} \\
e) & \{x|x \leq \pi\} \setminus \{x|x \geq \pi\} & = & \{x|x < \pi\} \\
f) & \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} & = & \{-1;-2;-3;\ldots\} \\
g) & \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q} & = & \{\ \}
\end{array}$$

1.4 Aussagen mit Mengen

Das Gleichheitszeichen $=$ ist ja schon von Rechenoperationen her bekannt. Wir haben es im vorangehenden Teil auch schon benutzt. Trotzdem, zur Konkretisierung, sei hier deutlich erwähnt:

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

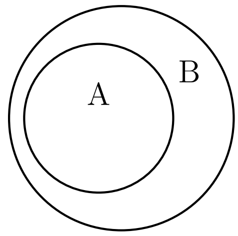
Also keins mehr oder weniger und kein anderes. Genau die gleichen eben.

Ähnlich, wie es zu Gleichungen aus der Algebra als Gegenstücke auch Ungleichungen mit den Zeichen $<$, $>$, $\leq$ und $\geq$ gibt, gibt es hier die Begriffe *Teilmenge* und *Obermenge* mit den Zeichen $\subset$, $\supset$, $\subseteq$ und $\supseteq$. Das sehen wir uns im Detail genauer an.

1.4.1 Teilmenge

Nebenstehend ist ein Schaubild zweier Mengen dargestellt. Die Menge A liegt hier **komplett innerhalb** der Menge B. Wenn es diesen Zusammenhang gibt, dann sagt man: A ist eine Teilmenge von B. Die Schreibweise sieht so aus:

$$A \subset B \quad \text{oder} \quad A \subseteq B$$



Teilmenge $A \subset B$

Hier muss jetzt nämlich zwischen einer **echten** und einer **unechten** Teilmenge unterschieden werden. Beginnen wir mit der **unechten** Teilmenge. Die Definition lautet:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$$

Jetzt haben wir schon wieder zwei neue Mathematische Zeichen, die erklärt werden wollen! Das möchte ich tun, bevor ich die Definition in Klartext übersetze.

Beginnen wir mit dem „Äquivalenzzeichen" $\Leftrightarrow$. Dieses Zeichen verknüpft Aussagen (oder Aussageformen). Links und rechts dieses Zeichens steht eine Aussage. Das Äquivalenzzeichen besagt, dass beide Aussagen den gleichen Wahrheitsgehalt haben. Aus der linken Aussage folgt die rechte, und aus der rechten folgt die linke. Gelesen wird das Zeichen als „**... genau dann, wenn ...**" oder auch „**... dann und nur dann, wenn ...**". Ein kleines Beispiel:

$$2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

Gelesen würde das lauten:

$2x$ ist gleich 6 ***genau dann, wenn*** *x gleich 3 ist.*

Wenn eine Zahl, die man in die linke Gleichung einsetzt, zu einer wahren Aussage führt, tut sie das auch in der rechten Gleichung und umgekehrt. Ich hoffe, das ist einleuchtend. Die Aussagen $2x = 6$ und $x = 3$ sind demnach **äquivalente** Aussagen.

Jetzt fehlt noch der „**Alquantor**“ $\forall$. Dieses Zeichen bedeutet schlicht: „**für alle**“. Auf was sich **alle** bezieht, steht dahinter. Sehen wir uns noch einmal die Definition an.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$$

Hinter dem Alquantor $\forall$ steht $x \in A$. x ist hierbei eine Variable. Was für eine? Das steht dabei, x soll ein Element der Menge A sein. Die Sequenz zwischen dem Äquivalenzzeichen und dem Doppelpunkt kann also wie folgt übersetzt werden:

> *Für alle x, die Element der Menge A sind, gilt:*

Mit dieser „Übersetzungshilfe“ können wir (hoffentlich) die komplette Definition in einen Text übersetzen:

> *Die Menge A ist **unechte Teilmenge** der Menge B genau dann, wenn für alle x, die Element der Menge A sind, gilt: x ist auch Element der Menge B.*

Man könnte also **jedes** Element der Menge A betrachten und würde feststellen, dass es auch Element der Menge B ist. Umgekehrt gilt: Wäre auch nur ein einziges Element der Menge A **nicht** Element der Menge B, dann wäre die Menge A **keine** unechte Teilmenge der Menge B.

Was ist nun daran „unecht“? Nun, nach dieser Definition ist die Menge A auch dann eine (unechte) Teilmenge der Menge B, wenn die Mengen A und B identisch sind, also $A = B$ ist. Sieht man sich den im Schaubild dargestellten Zusammenhang an, dann sieht man, dass die Menge B „größer“ als die Menge A ist, also Elemente enthält, die **nicht** auch in A enthalten sind. Das ist nur bei einer **echten** Teilmenge der Fall. Man muss also in eine Definition für die **echte** Teilmenge als Zusatzbedingung noch einbringen, dass es mindestens noch ein Element der Menge B **nicht** Element der Menge A ist.

Hierfür benötigen wir noch ein weiteres Mathematisches Zeichen, den „Existenzquantor“ $\exists$, gelesen als: „**es existiert**“. Was da existieren muss, steht dann dahinter, ähnlich wie beim Alquantor. Damit können wir jetzt die Definition für die **echte Teilmenge** angeben.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B \wedge \exists x \in B : x \notin A$$

Das übersetzten wir jetzt in Text:

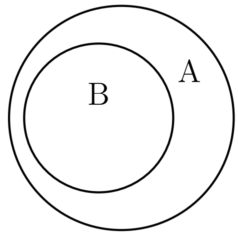
> *Die Menge A ist **echte Teilmenge** der Menge B genau dann, wenn für alle x, die Element der Menge A sind, gilt: x ist auch Element der Menge B und es existiert (mindestens) ein x als Element der Menge B, für das gilt: x ist **nicht** Element der Menge A.*

Wow, das war heftig, oder? Immerhin sieht man, dass die kreative Faulheit der Mathematiker eine Symbolik geschaffen hat, die einen wesentlich geringeren Aufwand darstellt, als ein solcher Text. Man sieht aber vermutlich auch, dass Schaubilder anschaulicher sind.

Anmerkung: Wenn man nur von einer Teilmenge (ohne den Zusatz echt oder unecht) spricht, dann wird meist eine **echte** Teilmenge gemeint. In der Literatur ist das aber nicht einheitlich. Daher empfehle ich, den Zusatz **echt** oder **unecht** stets mit hinzuzufügen. So kann man Missverständnisse vermeiden. Die Rechenzeichen hingegen sind ja eindeutig.

1.4.2 Obermenge

Schon an dem nebenstehend dargestellten Schaubild erkennt man, dass im Vergleich zur Teilmenge die Mengen A und B ihre Rollen getauscht haben. Das Rechenzeichen hat sich gegenüber dem Zeichen für die Teilmenge einfach herumgedreht.



Obermenge $A \supset B$

Wie es eine **echte** und **unechte** Teilmenge gibt, gibt es auch eine **echte** und **unechte** Obermenge. Die Zusammenhänge kann man so darstellen:

$$A \supset B \Leftrightarrow B \subset A$$

$$A \supseteq B \Leftrightarrow B \subseteq A$$

Wie bei einer Ungleichung mit den Zeichen $<$ oder $>$ bzw. $\leq$ oder $\geq$ dreht sich beim Seitentausch das Zeichen mit.

Natürlich können auch die mathematisch korrekten Definitionen angegeben werden:

$$A \supseteq B \Leftrightarrow \forall x \in B : x \in A$$

$$A \supset B \Leftrightarrow \forall x \in B : x \in A \land \exists x \in A : x \notin B$$

Eine Übersetzung in Klartext erspare ich mir an dieser Stelle.

1.4.3 Verknüpfung von Aussagen mit Mengen

Neben dem Begriff der Äquivalenz mit dem Zeichen $\Leftrightarrow$ gibt es auch noch die **Implikation** mit den Zeichen $\Rightarrow$ oder $\Leftarrow$. Als Beispiel für die Äquivalenz nehme ich noch einmal dieses Beispiel:

$$A \supset B \Leftrightarrow B \subset A$$

Die Menge A ist echte Obermenge der Menge B genau dann, wenn die Menge B eine echte Teilmenge der Menge A ist. Aus der linken Aussage folgt die rechte, und aus der rechten Aussage folgt die linke.

Manchmal ist es so, dass aus einer Aussage eine andere folgt, ohne dass der Umkehrschluss auch gilt. Dann spricht man von einer **Implikation**. Ein Beispiel:

Es regnet. $\Rightarrow$ *Die Straße wird nass.*

Wenn man voraussetzt, dass die Straße nicht trocken bleibt, wenn es regnet, dann folgt aus der linken Aussage die rechte. Anders herum gilt das aber nicht, denn das Nasswerden der Straße kann auch andere Ursachen haben, vom Autowaschen über einen Rohrbruch bis zu Überschwemmung durch Hochwasser. Deswegen zeigt der Implikationspfeil $\Rightarrow$ nur nach rechts, nicht nach links. Tauscht man die Aussagen, dann zeigt der Implikationspfeil nach links:

Die Straße wird nass. $\Leftarrow$ *Es regnet.*

Ein anderes Beispiel. Ergänzen Sie – falls möglich – einen Pfeil zwischen den Aussagen bei den drei Punkten:

$$A \subset B \quad \ldots \quad A \subseteq B$$

Was folgt aus welcher Aussage?
Aussage 1: *A ist echte Teilmenge von B*
Aussage 2: *A ist unechte Teilmenge von B*

Schaut man in die Definitionen, dann findet man bei der **echten** Teilmenge eine zusätzliche Bedingung: $\exists x \in B : x \notin A$. Das bedeutet, dass die echte Teilmenge der Spezialfall ist, der in der unechten Teilmenge enthalten ist. Daher lautet die Antwort:

$$A \subset B \Rightarrow A \subseteq B$$

Noch ein Beispiel:

$$A \setminus B = A \quad \ldots \quad A \cap B = \{\ \}$$

Überlegen wir: Die erste Bedingung kann nur gelten, wenn kein Element von B gleichzeitig Element von A ist. Sonst enthielte die Restmenge weniger Elemente, als A, könnte also nicht mehr gleich A sein. Anders ausgedrückt: Die beiden Mengen haben kein einziges gemeinsames Element. Das wiederunm ist das, was die rechte Bedingung aussagt, die Schnittmenge ist leer. Beide Aussagen sind daher **äquivalent**. Die Lösung lautet:

$$A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \{\ \}$$

2 Übungsaufgaben

2.1 Aufgabe 1:

Gegeben sind die Mengen:

$$A = \{1; 4; 5; 6; 9\} \qquad B = \{1; 3; 5; 7; 9\} \qquad C = \{2; 4; 6; 7; 9\} \qquad D = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Bestimmen Sie folgende Mengen in **aufzählender Form**:

$$\begin{array}{lrcl}
a) & (A \setminus B) \setminus C & = & \dots \\
b) & (A \cap B) \cup D & = & \dots \\
c) & (A \cup B) \cap (B \cup D) & = & \dots \\
d) & \big((A \cup D) \setminus C\big) \cap B & = & \dots
\end{array}$$

2.2 Aufgabe 2:

Ergänzen Sie bei den drei Punkten eins der Symbole $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Leftarrow$, falls möglich. Eventuell ist auch keins der Zeichen möglich. Falls $\Leftrightarrow$ ergänzt werden kann, gelten die Symbole $\Rightarrow$ oder $\Leftarrow$ als halb richtig.

$$\begin{array}{lrcl}
a) & A \cap B = \{\ \} & \dots & A \cup B = \{\ \} \\
b) & (A \setminus C) \cup B = A & \dots & B \setminus C \subseteq A \\
c) & A \subset B \wedge A \cap C = \{\ \} & \dots & B \cap C = \{\ \} \\
d) & x \in \mathbb{Q} & \dots & x \in \mathbb{R} \\
e) & \mathbb{Z} \cap A = A & \dots & A \subseteq \mathbb{N} \\
f) & A \subseteq \mathbb{Z} & \dots & A \subseteq \mathbb{R} \\
g) & A \supseteq B \wedge x \notin B & \dots & A \supseteq B \wedge x \notin A \\
h) & A \cup B = \{\ \} & \dots & A = B
\end{array}$$

2.3 Aufgabe 3:

Gegeben sind diese vier Mengen:

$$A = \{1; 3; 4; 5; 9\} \quad B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\} \quad C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \quad D = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$$

Geben Sie die gesuchten Mengen in aufzählender Form an!

$$\begin{array}{lrcl}
a) & A \cup B & = & \dots \\
b) & A \cap B & = & \dots \\
c) & A \setminus B & = & \dots \\
d) & (A \cap B) \cap C & = & \dots \\
e) & A \cap (B \cap C) & = & \dots \\
f) & (A \setminus C) \cup (B \setminus D) & = & \dots \\
g) & \big((A \setminus D) \setminus C\big) \setminus B & = & \dots \\
h) & (B \cup C) \setminus (A \cup D) & = & \dots \\
i) & A \cup (D \setminus A) & = & \dots \\
j) & A \setminus \big((D \setminus C) \setminus B\big) & = & \dots \\
k) & B \setminus \big((A \cup C) \cup D\big) & = & \dots
\end{array}$$

2.4 Aufgabe 4:

Welche Aussagen sind richtig bzw. falsch?

$$\begin{array}{lrcl}
a) & A \subseteq B & \Leftrightarrow & A \cup B = A \\
b) & A \supseteq B \wedge A \subseteq B & \Leftrightarrow & A \cup B = B \\
c) & A \cup B = A & \Rightarrow & A \supset B \\
d) & A = B & \Rightarrow & A \supseteq B \\
e) & A \setminus B = A & \Leftrightarrow & A \cap B = \{\ \}
\end{array}$$

3 Lösungen der Übungsaufgaben

3.1 Aufgabe 1:

Gegeben sind die Mengen:

$$A = \{1; 4; 5; 6; 9\} \qquad B = \{1; 3; 5; 7; 9\} \qquad C = \{2; 4; 6; 7; 9\} \qquad D = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Bestimmen Sie folgende Mengen in **aufzählender Form**:

$$\begin{array}{lrcl}
a) & (A \setminus B) \setminus C & = & \dots \\
b) & (A \cap B) \cup D & = & \dots \\
c) & (A \cup B) \cap (B \cup D) & = & \dots \\
d) & \big((A \cup D) \setminus C\big) \cap B & = & \dots
\end{array}$$

Zur Lösung ist es sinnvoll, schrittweise vorzugehen. Zuerst werden die konkreten Mengen eingesetzt, dann die Klammern ausgerechnet, ggf. schrittweise, danach erfolgt die weitere Zusammenfassung.

3.1.1 Aufgabe 1a)

$$\begin{aligned}
(A \setminus B) \setminus C &= (\{1; 4; 5; 6; 9\} \setminus \{1; 3; 5; 7; 9\}) \setminus \{2; 4; 6; 7; 9\} \\
&= \{4; 6\} \setminus \{2; 4; 6; 7; 9\} \\
&= \{\ \}
\end{aligned}$$

3.1.2 Aufgabe 1b)

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cup D &= (\{1; 4; 5; 6; 9\} \cap \{1; 3; 5; 7; 9\}) \cup \{1; 2; 3; 4; 5\} \\
&= \{1; 5; 9\} \cup \{1; 2; 3; 4; 5\} \\
&= \{1; 2; 3; 4; 5; 9\}
\end{aligned}$$

3.1.3 Aufgabe 1c)

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (B \cup D) &= (\{1; 4; 5; 6; 9\} \cup \{1; 3; 5; 7; 9\}) \cap (\{1; 3; 5; 7; 9\} \cup \{1; 2; 3; 4; 5\}) \\
&= \{1; 3; 4; 5; 6; 7; 9\} \cap \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\} \\
&= \{1; 3; 4; 5; 7; 9\}
\end{aligned}$$

3.1.4 Aufgabe 1d)

$$\begin{aligned}
\big((A \cup D) \setminus C\big) \cap B &= \big((\{1; 4; 5; 6; 9\} \cup \{1; 2; 3; 4; 5\}) \setminus \{2; 4; 6; 7; 9\}\big) \cap \{1; 3; 5; 7; 9\} \\
&= (\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\} \setminus \{2; 4; 6; 7; 9\}) \cap \{1; 3; 5; 7; 9\} \\
&= \{1; 3; 5\} \cap \{1; 3; 5; 7; 9\} \\
&= \{1; 3; 5\}
\end{aligned}$$

3.2 Aufgabe 2:

Ergänzen Sie bei den drei Punkten eins der Symbole $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Leftarrow$, falls möglich. Eventuell ist auch keins der Zeichen möglich. Falls $\Leftrightarrow$ ergänzt werden kann, gelten die Symbole $\Rightarrow$ oder $\Leftarrow$ als halb richtig.

$$\begin{array}{lrcl}
a) & A \cap B = \{\ \} & \dots & A \cup B = \{\ \} \\
b) & (A \setminus C) \cup B = A & \dots & B \setminus C \subseteq A \\
c) & A \subset B \wedge A \cap C = \{\ \} & \dots & B \cap C = \{\ \} \\
d) & x \in \mathbb{Q} & \dots & x \in \mathbb{R} \\
e) & \mathbb{Z} \cap A = A & \dots & A \subseteq \mathbb{N} \\
f) & A \subseteq \mathbb{Z} & \dots & A \subseteq \mathbb{R} \\
g) & A \supseteq B \wedge x \notin B & \dots & A \supseteq B \wedge x \notin A \\
h) & A \cup B = \{\ \} & \dots & A = B
\end{array}$$

3.2.1 Aufgabe 2a)

$$A \cap B = \{\ \} \quad \Leftarrow \quad A \cup B = \{\ \}$$

Beginnen wir auf der linken Seite. Wenn die Schnittmenge leer ist, dann haben beide Mengen kein gemeinsames Element. Daraus kann man aber nicht schließen, dass auch die Vereinigungsmenge leer ist. Hierin sind ja auch alle nicht-gemeinsamen Elemente enthalten.

Nun die andere Richtung. Wenn die Vereinigungsmenge leer ist, dann muss auch jede Einzelmenge leer sein. Würde auch nur eine Einzelmenge nicht leer sein, dann wären deren Elemente in der Vereinigungsmenge enthalten. Wenn beide Mengen leer sind, dann ist natürlich auch die Schnittmenge leer. Daher gilt der Schluss von rechts nach links.

3.2.2 Aufgabe 2b)

$$(A \setminus C) \cup B = A \quad \Rightarrow \quad B \setminus C \subseteq A$$

Beginnen wir links. Aus der Menge A wird etwas weggenommen (gemeinsame Elemente mit Menge C) und anschließend wieder hinzugefügt (Menge B). Anschließend ist die Menge A wieder komplettiert. Das bedeutet, dass genau die Elemente wieder hinzugefügt wurden, die vorher weggenommen wurden. Dabei darf die Menge C durchaus Elemente enthalten, die nicht in A enthalten sind. Beim Bilden der Restmenge $A \setminus B$ spielen diese ja keine Rolle. Die Menge B darf jedoch **keine** Elemente haben, die nicht in A enthalten sind, sonst wäre das Ergebnis der Vereinigung mit B nicht A. Mathematisch ausgedrückt muss $B \subseteq A$ sein.

Betrachten wir nun die rechte Seite. Wenn $B \subseteq A$ ist, und wir nehmen aus B noch etwas weg, dann ist diese Restmenge erst recht unechte Teilmenge von A. Der Implikationspfeil nach **rechts** ist also gültig.

Betrachten wir nun die andere Richtung und beginnen rechts. Falls $B \subseteq A$[7] ist, dann darf C eine **beliebige** Menge sein. Die Restmenge ist dann auf jeden Fall immer noch unechte Teilmenge von A. Es kommt ja nichts dazu.

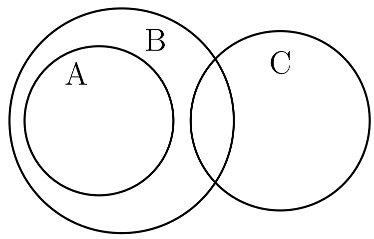
Jetzt wenden wir uns der linken Seite zu. Aus der Menge A wird die **beliebige** Menge C entfernt und durch die Menge B wieder ergänzt. Damit ist keinesfalls sicher, dass die richtigen Elemente wieder hinzugefügt werden, es können durchaus weniger sein. Die Schlussfolgerung von **rechts nach links** ist also **nicht** gegeben.

[7] Dieser Fall **muss** nicht vorliegen, er **kann** es aber!

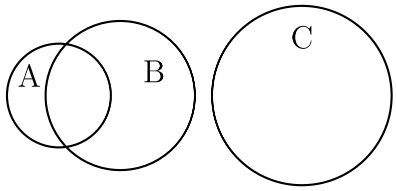
3.2.3 Aufgabe 2c)

$$A \subset B \wedge A \cap C = \{\ \} \quad \ldots \quad B \cap C = \{\ \}$$

Beginnen wir wieder auf der linken Seite. Aus der zweiten Bedingung $A \cap C = \{\ \}$ erkennt man, dass die Mengen A und C „nebeneinander“ liegen, wie in nebenstehendem Venn-Diagramm angedeutet. Wenn B eine Obermenge von A ist, dann können in B durchaus Elemente liegen, die auch zu C gehören. Die Schnittmenge $B \cap C$ wäre dann nicht leer. Damit ist ein Schluss von der linken Seite auf die rechte Seite **nicht** möglich.



Es folgt die Untersuchung, ob aus der rechten Seite die linke folgt. Eine mögliche Konstellation, die die rechte Seite $B \cap C = \{\ \}$ erfüllt, ist in nebenstehendem Venn-Diagramm dargestellt. Hier ist zwar auch $A \cap C = \{\ \}$, aber A ist **keine** Teilmenge von B. Durch dieses Beispiel ist schon gezeigt, dass auch der Schluss von der rechten Seite auf die linke Seite **nicht** möglich ist. Es ist also keine Implikation und erst recht keine Äquivalenz gegeben.



3.2.4 Aufgabe 2d)

$$x \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$$

Jede Rationale Zahl ist eine Reelle Zahl, aber nicht jede Reelle Zahl ist auch eine Rationale Zahl. Man kann auch sagen: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Wenn also x eine Rationale Zahl ist, dann folgt daraus, dass es auch eine Reelle Zahl ist. Umgekehrt gilt das nicht.

3.2.5 Aufgabe 2e)

$$\mathbb{Z} \cap A = A \quad \Leftarrow \quad A \subseteq \mathbb{N}$$

Beginnen wir wieder links. Wenn die Schnittmenge aus $\mathbb{Z}$ und A wieder die Menge A ergibt, dann müssen alle Elemente von A Ganze Zahlen sein. Negative Zahlen sind möglicherweise auch dabei. Damit folgt daraus aber **nicht** die rechte Seite. Hier kann A **keine** negativen Zahlen enthalten. Ein Implikationspfeil darf also nicht nach rechts zeigen.

Es folgt die andere Richtung. Wenn A eine unechte Teilmenge der Natürlichen Zahlen ist, dann enthält A ausschließlich natürliche Zahlen. Schneidet man diese Menge A mit den Ganzen Zahlen, bleibt natürlich wieder A übrig. Alle Elemente von A sind ja als Natürliche Zahlen auch Ganze Zahlen. Der Implikationspfeil zeigt also nach links.

3.2.6 Aufgabe 2f)

$$A \subseteq \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad A \subseteq \mathbb{R}$$

Weil $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist, folgt aus der linken Bedingung die rechte, aber nicht umgekehrt.

3.2.7 Aufgabe 2g)

$$A \supseteq B \wedge x \notin B \quad \Leftarrow \quad A \supseteq B \wedge x \notin A$$

Hier haben wir auf beiden Seiten eine Doppelbedingung mit Und-Verknüpfung. Beginnen wir links. x liegt nicht in B. Überall sonstwo könnt es aber liegen. Weil A eine (unechte) Obermenge von B ist, könnte x also auch in dem Bereich von A liegen, den B in A nicht abdeckt. Damit ist die rechte Bedingung **nicht** erfüllt. Der Implikationspfeil zeigt demnach **nicht** nach rechts.

Wissen wir jedoch, dass x **nicht in *A*** liegt, dann liegt x automatisch auch außerhalb von B. Der Implikationspfeil zeicht nach **links**.

3.2.8 Aufgabe 2h)

$$A \cup B = \{\ \} \quad \Rightarrow \quad A = B$$

Wenn die Vereinigungsmenge beider Mengen leer ist, dann kann weder A noch B irgendwelche Elemente enthalten. Beide sind leer. Damit sind sie auch gleich, der Implikationspfeil zeigt nach rechts. Weiß man aber nur, dass $A = B$ ist, dann ist die Vereinigungsmenge **nicht** automatisch leer. Sie wäre gleich A oder gleich B. Der Implikationspfeil darf also **nicht** nach links zeigen.

3.3 Aufgabe 3:

Gegeben sind diese vier Mengen:

$A = \{1; 3; 4; 5; 9\} \quad B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\} \quad C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \quad D = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

Geben Sie die gesuchten Mengen in aufzählender Form an!

$$\begin{array}{lrcl}
a) & A \cup B & = & \dots \\
b) & A \cap B & = & \dots \\
c) & A \setminus B & = & \dots \\
d) & (A \cap B) \cap C & = & \dots \\
e) & A \cap (B \cap C) & = & \dots \\
f) & (A \setminus C) \cup (B \setminus D) & = & \dots \\
g) & \big((A \setminus D) \setminus C\big) \setminus B & = & \dots \\
h) & (B \cup C) \setminus (A \cup D) & = & \dots \\
i) & A \cup (D \setminus A) & = & \dots \\
j) & A \setminus \big((D \setminus C) \setminus B\big) & = & \dots \\
k) & B \setminus \big((A \cup C) \cup D\big) & = & \dots
\end{array}$$

Hier sollte man wieder schrittweise vorgehen, zunächst die konkreten Mengen einsetzen und nach und nach zusammenfassen.

3.3.1 Aufgabe 3a)

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{1; 3; 4; 5; 9\} \cup \{1; 3; 5; 7; 9; 11\} \\
&= \{1; 3; 4; 5; 7; 9; 11\}
\end{aligned}$$

3.3.2 Aufgabe 3b)

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \{1; 3; 4; 5; 9\} \cap \{1; 3; 5; 7; 9; 11\} \\
&= \{1; 3; 5; 9\}
\end{aligned}$$

3.3.3 Aufgabe 3c)

$$\begin{aligned}
A \setminus B &= \{1; 3; 4; 5; 9\} \setminus \{1; 3; 5; 7; 9; 11\} \\
&= \{4\}
\end{aligned}$$

3.3.4 Aufgabe 3d)

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cap C &= \big(\{1; 3; 4; 5; 9\} \cap \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}\big) \cap \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \\
&= \{1; 3; 5; 9\} \cap \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \\
&= \{1; 3; 5\}
\end{aligned}$$

3.3.5 Aufgabe 3e)

$$\begin{aligned}
A \cap (B \cap C) &= \{1; 3; 4; 5; 9\} \cap \big(\{1; 3; 5; 7; 9; 11\} \cap \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}\big) \\
&= \{1; 3; 4; 5; 9\} \cap \{1; 3; 5; 7\} \\
&= \{1; 3; 5\}
\end{aligned}$$

3.3.6 Aufgabe 3f)

$$\begin{array}{rcl}(A \setminus C) \cup (B \setminus D) & = & \big(\{1;3;4;5;9\} \setminus \{1;2;3;4;5;6;7\}\big) \cup \big(\{1;3;5;7;9;11\} \setminus \{5;6;7;8;9;10\}\big) \\ & = & \{9\} \cup \{1;3;11\} \\ & = & \{1;3;9;11\}\end{array}$$

3.3.7 Aufgabe 3g)

$$\begin{array}{rcl}\big((A \setminus D) \setminus C\big) \setminus B & = & \Big(\big(\{1;3;4;5;9\} \setminus \{5;6;7;8;9;10\}\big) \setminus \{1;2;3;4;5;6;7\}\Big) \setminus \{1;3;5;7;9;11\} \\ & = & \Big(\{1;3;4\} \setminus \{1;2;3;4;5;6;7\}\Big) \setminus \{1;3;5;7;9;11\} \\ & = & \{\ \} \setminus \{1;3;5;7;9;11\} \\ & = & \{\ \}\end{array}$$

3.3.8 Aufgabe 3h)

$$\begin{array}{rcl}(B \cup C) \setminus (A \cup D) & = & \big(\{1;3;5;7;9;11\} \cup \{1;2;3;4;5;6;7\}\big) \setminus \big(\{1;3;4;5;9\} \cup \{5;6;7;8;9;10\}\big) \\ & = & \{1;2;3;4;5;6;7;9;11\} \setminus \{1;3;4;5;6;7;8;9;10\} \\ & = & \{2;11\}\end{array}$$

3.3.9 Aufgabe 3i)

$$\begin{array}{rcl}A \cup (D \setminus A) & = & \{1;3;4;5;9\} \cup \big(\{5;6;7;8;9;10\} \setminus \{1;3;4;5;9\}\big) \\ & = & \{1;3;4;5;9\} \cup \{6;7;8;10\} \\ & = & \{1;3;4;5;6;7;8;9;10\}\end{array}$$

3.3.10 Aufgabe 3j)

$$\begin{array}{rcl}A \setminus \big((D \setminus C) \setminus B\big) & = & \{1;3;4;5;9\} \setminus \Big(\big(\{5;6;7;8;9;10 \setminus \{1;2;3;4;5;6;7\}\big) \setminus \{1;3;5;7;9;11\}\Big) \\ & = & \{1;3;4;5;9\} \setminus \Big(\{8;9;10\} \setminus \{1;3;5;7;9;11\}\Big) \\ & = & \{1;3;4;5;9\} \setminus \{8;10\} \\ & = & \{1;3;4;5;9\}\end{array}$$

3.3.11 Aufgabe 3k)

$$\begin{array}{rcl}B \setminus \big((A \cup C) \cup D\big) & = & \{1;3;5;7;9;11\} \setminus \Big(\big(\{1;3;4;5;9\} \cup \{1;2;3;4;5;6;7\}\big) \cup \{5;6;7;8;9;10\}\Big) \\ & = & \{1;3;5;7;9;11\} \setminus \Big(\{1;2;3;4;5;6;7;9\} \cup \{5;6;7;8;9;10\}\Big) \\ & = & \{1;3;5;7;9;11\} \setminus \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\} \\ & = & \{11\}\end{array}$$

3.4 Aufgabe 4:

Welche Aussagen sind richtig bzw. falsch?

$$\begin{array}{lrcl} a) & A \subseteq B & \Leftrightarrow & A \cup B = A \\ b) & A \supseteq B \wedge A \subseteq B & \Leftrightarrow & A \cup B = B \\ c) & A \cup B = A & \Rightarrow & A \supset B \\ d) & A = B & \Rightarrow & A \supseteq B \\ e) & A \setminus B = A & \Leftrightarrow & A \cap B = \{\ \} \end{array}$$

Hier muss jeweils einzeln geprüft werden, ob aus der linken Bedingung die rechte folgt, und ob aus der rechten die linke folgt. Das Ergebnis wird dann mit dem vorgegebenen Zeichen verglichen.

3.4.1 Aufgabe 4a)

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = A$$

Wenn A eine (unechte) Teilmenge von B ist, dann ist die Vereinigungsmenge der beiden Mengen die „größere“ Menge von den beiden, also die, die (eventuell) mehr Elemente enthält. Das wäre die Obermenge. Die angegebene Aussage ist demnach **falsch**. Man könnte sie durch diese Aussage korrigieren:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B$$

3.4.2 Aufgabe 4b)

$$A \supseteq B \wedge A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B$$

Hier ist A gleichzeitig unechte Obermenge als auch unechte Teilmenge von B. Das ist nur möglich, wenn $A = B$ ist. Aus $A = B$ folgt dann auch $A \cup B = B$ oder $A \cup B = A$. Die Pfeilrichtung des Äquivalenzpfeiles nach **rechts** ist also richtig. Andererseits folgt aus $A \cup B = B$ nicht zwangläufig, dass $A = B$ ist. Die Menge B könnte durchaus mehr Elemente als A haben. Daher ist die Pfeilrichtung des Äquivalenzpfeiles nach links **falsch**. Die Aussage dürfte nur heißen:

$$A \supseteq B \wedge A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad A \cup B = B$$

3.4.3 Aufgabe 4c)

$$A \cup B = A \quad \Rightarrow \quad A \supset B$$

Wenn die Vereinigungsmenge von A mit B gleich A ist, dann muss die Menge B komplett in A enthalten sein. Auf den ersten Blick ist also die dargestellte Aussage richtig. Es kann aber auch sein, dass $A = B$ ist. In diesem Fall ist A aber keine **echte** Obermenge von B. Die angegebene Aussage ist also doch **falsch**. Andererseits würde aus der rechten Aussage durchaus die linke folgen. Daher könnte man die Aussage auf zweierlei Art korrigieren:

$$\begin{array}{rcl} A \cup B = A & \Leftarrow & A \supset B \\ A \cup B = A & \Leftrightarrow & A \supseteq B \end{array}$$

3.4.4 Aufgabe 4d)

$$A = B \quad \Rightarrow \quad A \supseteq B$$

Diese Aussage ist sofort erkennbar richtig, denn der Fall $A = B$ ist im Fall $A \supseteq B$ enthalten. Ein Implikationspfeil in der anderen Richtung wäre **nicht** möglich.

3.4.5 Aufgabe 4e)

$$A \setminus B = A \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \{ \ \}$$

Wenn die Restmenge $A \setminus B = A$ ist, muss die Menge B komplett außerhalb von A liegen. Ansonsten würde weniger als A übrig bleiben. Daher folgt auch sofort, dass die Schnittmenge von A mit B leer ist. Das gilt auch in der anderen Richtung. Daher ist diese Aussage **richtig**.