Mengenlehre

Wolfgang Kippels

14. September 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Vorweg: Oft gibt es Probleme mit der Mengenlehre, weil man versucht, einen tieferen Sinn darin zu finden. Den gibt es aber nicht! Und wenn man den nicht sieht, glaubt man, man habe das nicht verstanden. Die Mengenlehre basiert eigentlich nur auf der Faulheit der Mathematiker. Sie wollten eine einfache Schreibweise ohne viele Worte für bestimmte Zusammenhänge haben.

1.1 Allgemeiner Mengenbegriff

Die Definition für eine Menge lautet:

> ***Eine Menge ist eine Zusammenfassung gleichartiger Dinge (Elemente genannt) zu einer Gesamtheit (Menge genannt).***

Umgangssprachlich bedeutet „Menge“ so etwas wie „ziemlich viel“. Diese Bedeutung gilt hier ausdrücklich **nicht**, eine mathematische Menge kann auch nur ein einziges, oder sogar gar kein Element enthalten.

Mengen werden üblicherweise mit Großbuchstaben bezeichnet. Man kann sie in **aufzählender** oder in **beschreibender** Form angeben. Die Elemente werden dabei in geschweifte Klammern $\{\dots\}$ gesetzt. In der aufzählenden Form werden die Elemente durch Semikola (Plural von Semikolon) voneinander getrennt. Die Reihenfolge spielt übrigens **keine** Rolle, die Menge $\{1; 2; 3\}$ ist gleich der Menge $\{3; 1; 2\}$. Am besten lässt sich das durch ein paar Beispiele verdeutlichen.

Menge aller Ziffern: Diese Menge enthält genau 10 Elemente, nämlich die Ziffern von 0 bis 9. Das schreibt man in aufzählender Form so:
$Z = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
Es ist natürlich zweckmäßig, durch diese Reihenfolge eine gewisse Ordnung hineinzubringen, notwendig ist das aber nicht.

Menge aller Wochentage: Das geht am besten in aufzählender Form:
$W =${Montag; Dienstag; Mittwoch; Donnerstag; Freitag; Samstag; Sonntag}

Menge aller Planeten unseres Sonnensystems: Auch hier bietet sich die aufzählende Form an.
$P =${Merkur; Venus; Erde; Mars; Jupiter; Saturn; Uranus; Neptun}
(Der Pluto gehört übrigens nicht mehr dazu, er wurde „wegdefiniert“ als Kleinplanet.)

Menge aller Menschen: Hier fällt die aufzählende Form schwer. Theoretisch könnte man alle zirca 3 Milliarden Namen aufzählen, praktisch müsste die Liste jede Sekunde geändert werden, weil ständig irgendwo ein Mensch stirbt oder geboren wird. Weil es immerhin theoretisch möglich ist, haben wir hier tatsächlich eine Menge im mathematischen Sinne.

Menge aller Sterne: Hier ist die aufzählende Form nicht mehr möglich, weil es immer noch Myriaden unentdeckter Sterne gibt. Weil aber immerhin entscheidbar wäre, ob irgendetwas ein Stern ist oder nicht, liegt auch hier eine Menge im mathematischen Sinne vor.

Menge aller 200-jährigen Menschen: Nach meinem Kenntnisstand ist noch niemand so alt geworden. Trotzdem liegt hier eine Menge vor, und zwar eine **Leere Menge**. Darunter versteht man eine Menge, die **keine** Elemente enthält. Das schreibt man so:
$M = \{\ \}$ oder als alternative Schreibweise: $M = \emptyset$.
Mir persönlich gefällt die erste Schreibweise besser, weil man da direkt sieht, dass die Menge leer ist. Meine Meinung ist aber nicht maßgeblich.

Menge der Lottozahlen, die nächsten Samstag gezogen werden: Natürlich wäre es schön, wenn wir diese sechs Zahlen aufzählen könnten! Auch wenn das nicht (jetzt) geht, ist dies eine Menge im mathematischen Sinne. Durch Beobachtung des Ziehungsgerätes nächsten Samstag lässt sich eindeutig feststellen, welche Zahlen dazugehören und welche nicht.

1.2 Zahlenmengen

In der Mathematik interessieren uns natürlich vorrangig **Zahlenmengen**.

1.2.1 Spezielle Zahlenmengen

In der Mathematik gibt es einige spezielle Zahlenmengen. Gekennzeichnet werden sie mit speziellen Buchstaben. Diese Buchstaben enthalten einen zusätzlichen senkrechten Strich. Dies wollen wir uns einmal im Einzelnen genauer ansehen.

Natürliche Zahlen: In der Grundschule haben wir mit den natürlichen Zahlen begonnen. Dies sind die Zahlen, mit denen man zählen kann, also 1, 2, 3 und so weiter. Heute zählt man die 0 aber auch zu den natürlichen Zahlen. In Druckschrift wird diese Zahlenmenge mit einem $\mathbb{N}$ gekennzeichnet. In der Schreibschrift verdoppelt man den vorderen senkrechten Strich. etwa so: $\mathbb{N}$
Neben der Menge $\mathbb{N}$ als Menge aller Natürlichen Zahlen gibt es noch die Menge $\mathbb{N}^*$. Das ist die Menge der Natürlichen Zahlen **ohne die Null**. Hier hat man die Null aus der Menge entfernt, alle anderen Zahlen sind noch mit dabei.

Ganze Zahlen: Beim Rechnen mit Natürlichen Zahlen sind wir bei der Subtraktion, z.B. $4 - 5 = -1$, auf das Problem gestoßen, dass das Ergebnis keine Natürliche Zahl mehr ist. Nehmen wir die Negativen Zahlen mit zu den Natürlichen Zahlen dazu, dann erhalten wir eine Zahlenmenge, die man **Ganze Zahlen** nennt. Die Menge der Ganzen Zahlen wird mit einem $\mathbb{Z}$ gekennzeichnet. In Schreibschrift sieht es so ähnlich aus: $\mathbb{Z}$
Auch hier gibt es noch Untermengen. Nimmt man die Null aus den Ganzen Zahlen

heraus, nennt man diese Menge $\mathbb{Z}^*$. Möchte man nur die Negativen Zahlen aus der Menge der ganzen Zahlen betrachten, dann nennt man diese Menge $\mathbb{Z}^-$. Sinngemäß könnte man die Positiven Ganzen Zahlen mit $\mathbb{Z}^+$ bezeichnen, dies ist jedoch identisch mit der Menge $\mathbb{N}^*$.

Rationale Zahlen: Rechnet man mit den Ganzen Zahlen, dann kommt man spätestens beim Dividieren auf Ergebnisse, die keine Ganzen Zahlen mehr sind, die Brüche. Nimmt man alle Zahlen, die als ganzzahliger Bruch dargestellt werden können, zu den Ganzen Zahlen hinzu, dann erhält man die Menge der **Rationalen Zahlen**, Kennzeichnung durch $\mathbb{Q}$. In Schreibschrift sieht es so aus: $\mathbb{Q}$

Reelle Zahlen: Es gibt nun auch Zahlen, die nicht als ganzzahliger Bruch darstellbar sind. Das sind die Nichtperiodischen Dezimalzahlen wie etwa die Kreiszahl $\pi \approx 3{,}141\,592\,653\,59$ oder die Eulersche Zahl $e \approx 2{,}718\,281\,828\,459\,045$. Auch viele Wurzeln ergeben Nichtperiodische Dezimalzahlen, die nicht als ganzzahliger Bruch dargestellt werden können. Nimmt man diese noch zu den Rationalen Zahlen hinzu, dann erhält man die Menge der **Reellen Zahlen**. Gekennzeichnet werden die Reellen Zahlen durch das Zeichen $\mathbb{R}$. In der Schreibschrift sieht das Zeichen so aus: $\mathbb{R}$

Die Menge der Reellen Zahlen ist übrigens die **Grundmenge** für alle unsere mathematischen Aktionen, solange nichts ausdrücklich etwas anderes gesagt wird. Mehr dazu folgt etwas später in diesem Skript.

Andere Zahlenmengen: Darüber hinaus gibt es beispielsweise auch noch Imaginäre und Komplexe Zahlen[1] mit den Kennzeichnungen $\mathbb{I}$ und $\mathbb{C}$, auf die an dieser Stelle aber nicht eingegangen werden soll.

1.2.2 Zahlenmengen in aufzählender Form

Bei Zahlenmengen gibt es unterschiedliche Darstellungsformen in der aufzählenden Form. Am einfachsten ist das an Beispielen zu erklären.

Menge der natürlichen Zahlen von 4 bis 7: Die aufzählende Form ist bekannt:
$A = \{4; 5; 6; 7\}$
Hier können problemlos **alle** Elemente angegeben werden, weil es nicht zu viele sind.

Die Menge, die nur die Zahl 7 enthält: Das ist trivial, die Menge lautet in aufzählender Form:
$B = \{7\}$

[1] Einzelheiten dazu siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/komplgl.pdf

Menge aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100: Die aufzählende Form ist hier möglich, aber etwas aufwändig. Eine verkürzte Form bietet sich hier an:
$C = \{1; 2; 3; \ldots; 99; 100\}$
Sofern ein System erkennbar ist, wie die nächsten Zahlen gebildet werden, kann man durch **drei** (nicht vier, nicht zwei!) Punkte die Aufzählung unterbrechen und danach das Ende der Aufzählung angeben.

Die Menge aller ungraden natürlichen Zahlen: Hier haben wir eine **unendliche** Menge, es gibt unendlich viele Elemente. Es ist also unmöglich, alle aufzuzählen. Man bricht hier mit **drei** Punkten ab, sobald ein System erkennbar ist.
$D = \{1; 3; 5; 7; \ldots\}$

Die Menge aller Zehnerpotenzen: Auch hier gibt es unendlich viele Elemente, alledings gibt es hier weder einen Anfang, noch ein Ende. Man deutet das durch **drei** Punkte vorn und hinten an:
$E = \{\ldots; 10^{-3}; 10^{-2}; 10^{-1}; 10^{0}; 10^{1}; 10^{2}; 10^{3}; \ldots\}$
Möglich wäre allerdings auch diese Form:
$E = \{10^{0}; 10^{1}; 10^{-1}; 10^{2}; 10^{-2}; 10^{3}; 10^{-3}; \ldots\}$
Auch hier ist klar, wie es weiter geht.

1.2.3 Zahlenmengen in beschreibender Form

Zum Beschreiben ist die Kenntnis bestimmte Zeichen nötig. Da sind beispielsweise die Ungleichungszeichen $<$, $>$, $\leq$ und $\geq$ sowie die Zeichen $\vee$ und $\wedge$ aus der Booleschen Algebra. Diese Zeichen möchte ich vorweg kurz erklären.

$$x > 3$$

Was bedeutet das? Gesprochen wird das als „x größer 3“. Damit sind alle x-Werte gemeint, die – wie gesagt – größer als 3 sind, also beispielsweise die 4, die 1027, die 3,001 oder die Zahl π, aber nicht mehr die 3. Soll die 3 auch dazugehören, dann schreibt man:

$$x \geq 3$$

Das wird gesprochen als „x größer gleich 3“. Das bedeutet, x kann größer als 3 sein, kann aber auch gleich 3 sein. Es darf nur nicht kleiner sein.

Wie kann ich mir die Bedeutung des Zeichens merken? Die Zeichen $>$ und $<$ sehen ja sehr ähnlich aus. Nun, das ist recht einfach:

Merkregel: Die **größere** Zahl steht immer am **größeren** Ende des Zeichens.

Hier ein paar Beispiele:

$$\begin{array}{rcll}
5 & > & 3 & \text{ist richtig} \\
4 & < & 2 & \text{ist falsch} \\
\pi & < & 3{,}2 & \text{ist richtig} \\
8 & \leq & 8 & \text{ist richtig} \\
8 & \geq & 8 & \text{ist richtig} \\
8 & > & 8 & \text{ist falsch} \\
2 & \geq & -5 & \text{ist richtig} \\
-4 & \leq & -3 & \text{ist richtig} \\
4 & \leq & 3 & \text{ist falsch} \\
-100 & > & -101 & \text{ist richtig} \\
\frac{3}{7} & > & 0{,}428 & \text{ist richtig}
\end{array}$$

Die Zeichen $\vee$ und $\wedge$ verknüpfen **Aussagen** miteinander. Was aber ist eine Aussage? Eine Aussage im mathematischen Sinn ist ein Ausdruck, bei dem festgestellt werden kann, ob er wahr oder falsch ist.

Beispiel:

$$3 < 4$$

Dies ist eine wahre Aussage, denn 3 ist tatsächlich kleiner als 4.

Noch ein Beispiel:

$$7 \geq 8$$

Auch das ist eine Aussage, aber eine falsche Aussage. 7 ist eben nicht größer oder gleich 8.

Ein weiteres Beispiel:

$$x < 9$$

Dies ist **keine** Aussage. Es hängt nämlich von der Variablen x ab, ob es wahr oder falsch wird. Je nachdem, welche Zahl man für x einsetzt, wird es wahr oder falsch. Man nennt so etwas eine **Aussageform**.

Wieder ein Beispiel:

$$2 + 4$$

Auch das ist **keine** Aussage, nicht einmal eine Aussageform. Es gibt nichts, was man auf Richtigkeit prüfen kann. Diesen mathematischen Ausdruck nennt man Term.

Kommen wir nun zur Verknüpfung von Aussagen. Hier steht das Zeichen $\vee$[2] für **oder (im nicht ausschließenden Sinn!)**, und das Zeichen $\wedge$[3] für das **und**. Am besten lässt sich das vermutlich an Beispielen erläutern.

---

[2]Das Zeichen $\vee$ ist abgeleitet vom Lateinischen Wort *vel* für *oder*. Der erste Buchstabe von *vel* ähnelt dem Zeichen.

[3]Das Zeichen $\wedge$ ist abgeleitet vom Lateinischen Wort *aut* für *und*. Der erste Buchstabe von *aut* als Großbuchstabe ähnelt dem Zeichen.

Beginnen wir mit der Oder-Verknüpfung.

$$x < 3 \lor x > 5$$

Dargestellt sind so alle Zahlen, die kleiner als 3 **oder** größer als 5 sind, beispielsweise die 2, die 1,7, die -19, die 17, die 512, aber **nicht** die Zahlen 3, π, 4,7 oder 5. Es genügt, dass eine der beiden Teilaussagen wahr ist.

$$x > 3 \lor x > 5$$

Hier werden alle Zahlen erfasst, die größer als 3 **oder** größer als 5 sind. Auf den ersten Blick erscheint das widersinnig, was ist beispielsweise mit der Zahl 10? Ist die 10 größer als 3 oder größer als 5? Sie ist beides gleichzeitig. Das Problem liegt in der Deutschen Sprache. Hier wird das Wort **oder** für eine **exclusive** (ausschließende) Bedeutung werwendet. **Oder** in der Sprache der Mathematik schließt aber **nicht** aus. Die Aussage

$$10 > 3 \lor 10 > 5$$

ist damit **wahr**. Beide Teilaussagen sind wahr, damit ist die Gesamtaussage erst recht war, auch wenn es schon genügt hätte, wenn eine der Teilaussagen wahr wäre. Nehmen wir die Zahl 4:

$$4 > 3 \lor 4 > 5$$

Diese Gesamtaussage ist wahr, weil $4 > 3$ schon eine wahre Aussage ist. Es spielt dann keine Rolle mehr, ob $4 > 5$ nun wahr oder falsch ist. Es hätte also die Aussageform $x > 3$ genügt, um alle Zahlen zu beschreiben, für die auch die ursprüngliche Aussageform eine wahre Aussage ergibt.

Kommen wir nun zur Und-Verknüpfung.

$$x \geq 3 \land x < 5$$

Hier müssen beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein. In Worten sind hier alle Zahlen beschrieben, die *größer gleich 3* ***und*** *kleiner 5* sind. Oder noch deutlicher: Alle Zahlen, die **sowohl größer oder gleich 3 als auch kleiner als 5** sind. Hierzu gehören beispielsweise die Zahlen 3, π, 4 und 4,9, jedoch nicht die Zahlen 2, 0, 5 oder 10.

$$x < 4 \land x \leq 6$$

In diesem Beispiel sind alle x beschrieben, die kleiner als 4 **und** gleichzeitig auch kleiner oder gleich 6 sind. Hier hätte die erste Teilbedingung ausgereicht, denn das ist die schärfere Bedingung. Alle x, die kleiner als 4 sind, sind automatisch auch kleiner gleich 6.

$$x \leq 5 \wedge x > 7$$

Welche x sind kleiner oder gleich 5 **und** gleichzeitig auch größer als 7? Antwort: Keine!

$$x \leq 5 \wedge x \geq 5$$

Welche x sind kleiner oder gleich 5 **und** gleichzeitig auch größer oder gleich 5? Hier muss man ganz genau hinsehen, denn $x = 5$ erfüllt beide Bedingungen, wenn auch als einzige mögliche Zahl.

Für besondere Fälle gibt es noch eine abgekürzte und (wie ich finde) übersichtlichere Schreibweise. Wenn eine Variable x zwischen den Zahlen 10 und 20 liegen soll, könnte man das so darstellen:

$$x > 10 \wedge x < 20$$

x muss einerseits größer als 10 sein **und** gleichzeitig auch kleiner als 20. Die vereinfachte Schreibweise für den selben Zusammenhang sieht so aus:

$$10 < x < 20$$

Man hat hier einfach die Ungleichung $10 < x$ und die Ungleichung $x < 20$ direkt aneinander angekoppelt. Man sieht dann etwas anschaulich schon an der Reihenfolge, dass x zwischen 10 und 20 liegt.

Anmerkung: Für alle, die sich nicht merken können, welches Zeichen für *Und* bzw. für *Oder* steht, gibt es eine Merkregel als Eselsbrücke.

Das Zeichen für ***O****der ist* ***o****ben offen, das Zeichen für* ***U****nd ist* ***u****nten offen.*

Ein weiteres wichtiges Zeichen ist das Zeichen $\in$, gelesen als „**ist Element von**“. Habe ich eine Menge $A = \{3; 5; 7; 9\}$, dann enthält diese Menge genau vier Elemente, nämlich die 3, die 5, die 7 und die 9. Man kann dann beispielsweise sagen:

$$3 \in A$$

Gelesen:„3 ist Element der Menge A.“ Das bedeutet, dass die Zahl 3 ein Element der besagten Menge ist. Gleichermaßen gilt natürlich auch:

$$5 \in A \qquad 7 \in A \qquad 9 \in A$$

Möchte man ausdrücken, dass die Zahl 6 **nicht** zu dieser Menge gehört, dann schreibt man das so:

$$6 \notin A$$

Damit haben wir alle fast Zeichen zusammen, die man für die beschreibende Form einer Menge benötigt. Nehmen wir als erstes Beispiel die Menge der Natürlichen Zahlen von 1 bis 100. Diese Menge könnte in beschreibender Form so aussehen:

$$A = \{x|x \in \mathbb{N} \land 1 \leq x \leq 100\}$$

Den ersten Teil müssen wir noch klären. Der Teil

$$\{x|\ldots\}$$

wird gelesen als:„**Die Menge aller $\boldsymbol{x}$ mit der Eigenschaft ...** “. Dröseln wir das stückchenweise wie Vokabeln einer fremden Sprache auf.

1.	$\{\quad\}$	Die Menge
2.	x	aller x
3.	$\vert$	mit der Eigenschaft

Im Einzelnen:

1. $\{\quad\}$: Die geschweiften Klammern als Mengenklammer kennen wir schon. In den Klammern stehen normalerweise die Elemente.

2. x: Der Buchstabe x wird hier als **Beschreibungsvariable** verwendet.

3. $|$: Hinter diesem Strich kommt/kommen die Bedingung(en), die für die Beschreibungsvariable x erfüllt sein muss/müssen, damit das jeweilige in Frage kommende Element tatsächlich zu der beschriebenen Menge gehört.

Zum besseren Verständnis sehen wir uns das an oben angegebenen Beispiel genauer an.

$$A = \{x|x \in \mathbb{N} \land 1 \leq x \leq 100\}$$

Hinter dem „Beschreibungsstrich“ stehen zwei Bedingungen, die mit einer Und-Verknüpfung (Zeichen $\land$) verbunden sind. Die erste Bedingung $x \in \mathbb{N}$ besagt, dass x eine natürliche Zahl sein muss. *(x ist Element der Menge* $\mathbb{N}$*).* Die zweite Bedingung ist ja, wie weiter vorne beschrieben, die Kurzform für $x \geq 1 \land x \leq 100$, also eigentlich schon eine Und-Verknüpfung aus zwei einzelnen Bedingungen. Wir wissen das aber schon zu deuten als den Zahlenbereich zwische 1 und 100 unter Einschluss der Grenzen.

Nun kann man einwenden, dass zur Darstellung dieser Menge A auch die aufzählende Form möglich ist. Das stimmt. Das sieht im nächsten Beispiel anders aus. Hier sollen alle **Reellen** Zahlen zur Menge B gehören, die zwischen 1 und 100 liegen. Diesmal soll die untere Grenze (die 1) zur Menge dazugehören, aber nicht die 100 an der oberen Grenze. Das kann man dann beispielsweise so schreiben:

$$B = \{x|x \in \mathbb{R} \land 1 \leq x < 100\}$$

<u>**Anmerkung:**</u> Es ist üblich, dass man bei allen Zahlenmengen die Menge der Reellen Zahlen als Grundmenge[4] voraussetzt. Nur dann, wenn **nicht** die Menge der Reellen Zahlen die Grundmenge ist (wie im ersten Beispiel bei Menge A), muss man das explizit angeben. Bei der eben beschriebenen Menge B kann man also die Bedingung $x \in \mathbb{R}$ auch weglassen.

Ein klassisches Beispiel für eine Mengenangabe in beschreibender Form ist die Menge $\mathbb{Q}$, also die Menge aller Rationalen Zahlen (die Menge aller Zahlen, die sich als ganzzahliger Bruch darstellen lassen). Wir haben gesehen, dass hier ein Aufzählen der Elemente nicht ohne weiteres möglich ist. In beschreibender Form sähe das so aus:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x | x = \frac{p}{q} \wedge p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Hier haben wir in der Beschreibung hinter dem Beschreibungsstrich sogar drei Bedingungen, die alle mit Und-Verknüpfung verbunden sind, also gleichzeitig erfüllt sein müssen. In der ersten Bedingung steht, dass die Beschreibungsvariable x als Bruch darstellbar sein muss. Dabei werden gleich zwei neue Beschreibungsvariablen eingeführt und anschließend einzeln beschrieben. Das ist nötig, denn beispielsweise darf ja nicht $p = \pi$ sein. So ist $\frac{\pi}{2}$ zwar formal ein Bruch, aber trotzdem **keine** Rationale Zahl, weil π keine Ganze Zahl ist.

Im Nenner muss man aufpassen. Unbedarft denkt man vielleicht, dass hier auch jede Ganze Zahl zulässig ist, aber die Null (eine Ganze Zahl) darf **nicht** im Nenner stehen. Mit $\mathbb{N}^*$ ist man da auf der sicheren Seite, die Null ist hier ja ausgeschlossen. Um auch negative Brüche zu erhalten (die gehören ja auch zur Menge $\mathbb{Q}$), genügt es, wenn der Zähler negativ wird. Dort haben wir ja die Menge $\mathbb{Z}$ vorgesehen.

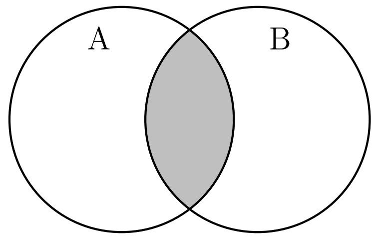
[4]Die Grundmenge ist die Menge der Zahlen, von denen man bei der jeweiligen Problemstellung ausgeht.

1.3 Mengenoperationen

So, wie es in der Algebra Rechenoperationen wie Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren usw. gibt, gibt es bei Mengen auch Operationen.

1.3.1 Schnittmenge

Nebenstehend ist ein Schaubild für die **Schnittmenge** dargestellt. Die beiden Mengen A und B überlappen sich teilweise. In der Schnittmenge von A und B sind alle Elemente enthalten, die sowohl Element der Menge A als auch der Menge B sind. Das Zeichen für die Schnittmenge ist $\cap$. Wenn C die Schnittmenge der Mengen A und B ist, dann schreibt man das so:



Schnittmenge $A \cap B$

$$C = A \cap B$$

Die mathematisch saubere Definition für die Schnittmenge lautet:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Weil wir diese Symbolik eben erst gelernt haben, kommt diese Definition hier noch einmal im Klartext: *Die Schnittmenge der Mengen A und B ist die Menge aller x, mit der Eigenschaft, dass x Element der Menge A und x Element der Menge B ist.*

Zur Vertiefung des Gelernten folgen hier ein paar Übungsaufgaben.

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \{1;2;3;4;5\} \cap \{2;4;6;8;10\} & = & \dots \\
b) & \{10;15;20;25\} \cap \{2;4;6;8;10\} & = & \dots \\
c) & \{1;3;5;7;9\} \cap \{2;4;6;8;10\} & = & \dots \\
d) & \{3;5;7;9;11\} \cap \{5;7;9\} & = & \dots \\
e) & \{x|x \leq \pi\} \cap \{x|x \geq \pi\} & = & \dots \\
f) & \mathbb{Z} \cap \mathbb{N} & = & \dots \\
g) & \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} & = & \dots
\end{array}$$

Die Lösungen stehen auf der nächsten Seite.

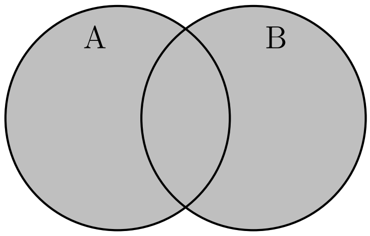
Hier die Lösungen der Übungsaufgaben:

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \{1;2;3;4;5\} \cap \{2;4;6;8;10\} & = & \{2;4\} \\
b) & \{10;15;20;25\} \cap \{2;4;6;8;10\} & = & \{10\} \\
c) & \{1;3;5;7;9\} \cap \{2;4;6;8;10\} & = & \{\ \} \\
d) & \{3;5;7;9;11\} \cap \{5;7;9\} & = & \{5;7;9\} \\
e) & \{x|x \leq \pi\} \cap \{x|x \geq \pi\} & = & \{\pi\} \\
f) & \mathbb{Z} \cap \mathbb{N} & = & \mathbb{N} \\
g) & \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} & = & \mathbb{Z}
\end{array}$$

1.3.2 Vereinigungsmenge

Nebenstehend ist ein Schaubild für die **Vereinigungsmenge** dargestellt. Die beiden Mengen A und B überlappen sich teilweise. In der Vereinigungsmenge von A und B sind alle Elemente enthalten, die Element der Menge A oder der Menge B sind. Das Zeichen für die Schnittmenge ist $\cup$. Wenn C die Vereinigungsmenge der Mengen A und B ist, dann schreibt man das so:

$$C = A \cup B$$



Vereinigungsmenge $A \cup B$

Die mathematisch saubere Definition für die Vereinigungsmenge lautet:

$$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$$

Weil wir diese Symbolik eben erst gelernt haben, kommt diese Definition hier noch einmal im Klartext: *Die Vereinigungsmenge der Mengen A und B ist die Menge aller x, mit der Eigenschaft, dass x Element der Menge A oder x Element der Menge B ist.*

Vergleicht man diese Definition mit der Definition der Schnittmenge, dann fällt möglicherweise auf, dass sie fast identisch sind, nur die Zeichen $\wedge$ und $\cap$ haben sich herumgedreht zu $\vee$ und $\cup$.

Zur Vertiefung des Gelernten folgen hier ein paar Übungsaufgaben.

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \{1;2;3;4;5\} \cup \{2;4;6;8;10\} & = & \ldots \\
b) & \{10;15;20;25\} \cup \{2;4;6;8;10\} & = & \ldots \\
c) & \{1;3;5;7;9\} \cup \{2;4;6;8;10\} & = & \ldots \\
d) & \{3;5;7;9;11\} \cup \{5;7;9\} & = & \ldots \\
e) & \{x|x \leq \pi\} \cup \{x|x \geq \pi\} & = & \ldots \\
f) & \mathbb{Z} \cup \mathbb{N} & = & \ldots \\
g) & \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} & = & \ldots
\end{array}$$

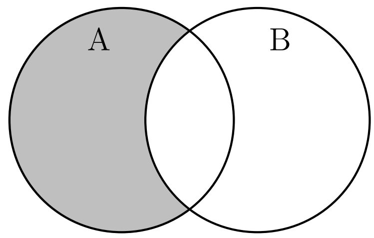
Die Lösungen stehen auf der nächsten Seite.

Hier die Lösungen der Übungsaufgaben:

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \{1;2;3;4;5\} \cup \{2;4;6;8;10\} & = & \{1;2;3;4;5;6;8;10\} \\
b) & \{10;15;20;25\} \cup \{2;4;6;8;10\} & = & \{2;4;6;8;10;15;20;25\} \\
c) & \{1;3;5;7;9\} \cup \{2;4;6;8;10\} & = & \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\} \\
d) & \{3;5;7;9;11\} \cup \{5;7;9\} & = & \{3;5;7;9;11\} \\
e) & \{x|x \leq \pi\} \cup \{x|x \geq \pi\} & = & \mathbb{R} \\
f) & \mathbb{Z} \cup \mathbb{N} & = & \mathbb{Z} \\
g) & \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} & = & \mathbb{Q}
\end{array}$$

1.3.3 Restmenge

Nebenstehend ist ein Schaubild für die **Restmenge** dargestellt. Die beiden Mengen A und B überlappen sich teilweise. In der Restmenge von A **ohne** B (so wird das gesprochen) sind alle Elemente enthalten, die Element der Menge A aber nicht der Menge B sind. Das Zeichen für die Restmenge ist $\setminus$. Manche nennen das auch „Minuszeichen für Mengen". Wenn C die Restmenge der Menge A ohne B ist, dann schreibt man das so:



Restmenge $A \setminus B$

$$C = A \setminus B$$

Die mathematisch saubere Definition für die Restmenge lautet:

$$A \setminus B = \{x|x \in A \land x \notin B\}$$

Weil wir diese Symbolik eben erst gelernt haben, kommt diese Definition hier noch einmal im Klartext: *Die Restmenge der Menge A ohne Menge B ist die Menge aller x, mit der Eigenschaft, dass x Element der Menge A und x nicht Element der Menge B ist.*

Zur Vertiefung des Gelernten folgen hier ein paar Übungsaufgaben.

$$\begin{array}{lrcl}
a) & \{1;2;3;4;5\} \setminus \{2;4;6;8;10\} & = & \ldots \\
b) & \{10;15;20;25\} \setminus \{2;4;6;8;10\} & = & \ldots \\
c) & \{1;3;5;7;9\} \setminus \{2;4;6;8;10\} & = & \ldots \\
d) & \{3;5;7;9;11\} \setminus \{5;7;9\} & = & \ldots \\
e) & \{x|x \leq \pi\} \setminus \{x|x \geq \pi\} & = & \ldots \\
f) & \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} & = & \ldots \\
g) & \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q} & = & \ldots
\end{array}$$

Die Lösungen stehen auf der nächsten Seite.

Hier die Lösungen der Übungsaufgaben:

$$
\begin{array}{lrcl}
a) & \{1;2;3;4;5\} \setminus \{2;4;6;8;10\} & = & \{1;3;5\} \\
b) & \{10;15;20;25\} \setminus \{2;4;6;8;10\} & = & \{15;20;25\} \\
c) & \{1;3;5;7;9\} \setminus \{2;4;6;8;10\} & = & \{1;3;5;7;9\} \\
d) & \{3;5;7;9;11\} \setminus \{5;7;9\} & = & \{3;11\} \\
e) & \{x|x \leq \pi\} \setminus \{x|x \geq \pi\} & = & \{x|x < \pi\} \\
f) & \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} & = & \{-1;-2;-3;\ldots\} \\
g) & \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q} & = & \{\ \}
\end{array}
$$